

## UN ELEMENTO PRISMA TRIANGULAR DE SÓLIDO-LÁMINA PARA EL ANÁLISIS CON GRANDES DEFORMACIONES

Fernando G. Flores<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba-Argentina, y CONICET, [fflores@efn.uncor.edu](mailto:fflores@efn.uncor.edu), <http://www.efn.uncor.edu>*

**Palabras Clave:** Elementos Finitos, Sólido-Lámina, Prisma, Grandes Deformaciones

**Resumen.** Este trabajo desarrolla un elemento de sólido-lámina prismático de base triangular orientado al análisis de láminas delgadas/gruesas con grandes deformaciones elasto-plásticas. El elemento se basa en una formulación lagrangeana total y utiliza como medidas de deformación el logaritmo del tensor de estiramiento material ( $\mathbf{U}$ ) obtenido a partir del tensor derecho de Cauchy-Green ( $\bar{\mathbf{C}}$ ) modificado. Las modificaciones son tres: a) una aproximación clásica de deformaciones transversales de corte mixtas impuestas b) una aproximación de deformaciones impuestas para las componentes en el plano tangente de la lámina y c) una aproximación en deformaciones impuestas mejoradas para la deformación normal a través del espesor (un grado de libertad adicional). El objetivo es poder utilizar el elemento para la simulación de láminas sin que bloquee por cortante, mejorar el comportamiento membranal del triángulo en el plano tangente, eliminar el bloqueo por efecto Poisson y poder tratar materiales elasto-plásticos con flujo plástico incompresible y materiales elásticos cuasi-incompresibles. Se utilizan un punto de integración en el plano del triángulo y tantos como sean necesarios en el eje del prisma. Se presentan varios ejemplos que muestran el comportamiento libre de bloqueo por corte y por efecto Poisson del elemento, como la mejora en el comportamiento en el plano de la lámina alivia el bloqueo volumétrico y el muy buen comportamiento del elemento presentado para el análisis de laminas en régimen no lineal geométrico y material.

## 1. INTRODUCCIÓN

Auspiciado en parte por la continua mejora en las facilidades de procesamiento y también por la necesidad de mejorar distintos aspectos de los modelos a los fines de lograr simulaciones más fieles, el uso de elementos de sólidos para simular láminas ha crecido notoriamente en el último tiempo. Las principales ventajas que resultan de utilizar elementos de sólido son: a) la utilización de relaciones constitutivas tridimensionales y no restringirse a modelos de tensión plana; b) incluir el efecto del contacto correctamente en ambas superficies, en particular cuando hay fricción; c) tratar grandes deformaciones de corte transversal; d) evitar elementos especiales de transición entre mallas que combinan elementos de sólidos y de láminas; e) tratar correctamente contornos no paralelos a la normal a la lámina; f) no utilizar grados de libertad rotacionales que son en general costosos y dificultosos de parametrizar y actualizar.

Para el tratamiento de problemas fuertemente no lineales, debido por ejemplo a modelos constitutivos complejos o cuando hay contornos con contacto, se prefieren los elementos más simples (interpolación lineal) y en lo posible con grados de libertad exclusivamente de desplazamientos. Los elementos de sólido-lámina, esto es cuando se utiliza un sólo elemento en el espesor, desarrollados hasta el presente son todos hexaédricos y particularmente donde más se ha trabajado es en el elemento trilineal de 8 nudos. Es bien conocido que la formulación estándar en desplazamientos de este elemento bloquea severamente al modelar láminas. Estos bloqueos numéricos indican la incapacidad de las funciones de interpolación utilizadas (y sus gradientes) de amoldarse al comportamiento del sólido que muchas veces invalidan las soluciones obtenidas. En problemas con flexión aparece el bloqueo por cortante que aumenta con la esbeltez de la lámina, además una interpolación lineal de los desplazamientos en la dirección transversal no permite que la deformación transversal pueda satisfacer una simple variación lineal debida al efecto Poisson. Para láminas inicialmente curvas suele aparecer un bloqueo adicional debido a la pobre interpolación en el espesor y si la flexión es dominante sin estiramiento de la superficie media es común la aparición del bloqueo membranar. Los modelos constitutivos elásticos cuasi-incompresibles o materiales elasto-plásticos con flujo isócoro introducen una condición adicional en cada punto de integración que conduce al bloqueo volumétrico.

Por otro lado, a los fines de tener elementos computacionalmente eficientes, resulta conveniente y necesario que los elementos de sólido lámina tengan un esquema de integración diferente en el plano tangente de la lámina (el mínimo posible) que en la dirección normal a la lámina, donde la cantidad de puntos de integración debe ser arbitraria a los fines de poder capturar con detalle la flexión y las no-linealidades debidas al modelo constitutivo, en particular el comportamiento elasto-plástico. La utilización de un sólo punto de integración en el plano de la lámina requiere, a los fines de mantener la eficiencia de la expansión en serie de distintas variable (e.g. la inversa del jacobiano) y de algún control sobre los modos espurios de deformación debidos a la subintegración. Lo primero trae alguna limitación en la distorsión admisible de los elementos y lo último normalmente conduce a la introducción de factores que deben ser adecuadamente sintonizados. Las ventajas son sin embargo muy grandes ya que permiten disminuir notoriamente el espacio necesario para el almacenaje de variables internas y el tiempo de CPU, particularmente en códigos con integración explícita de las ecuaciones de movimiento.

Los desarrollos realizados a los fines de curar los distintos bloqueos mencionados son numerosos, en la Referencia [Schwarze y Reese \(2011\)](#) puede verse un detallado estado del arte de los elementos hexaédricos de sólido-lámina. Para evitar el bloqueo debido al incremento espurio de los esfuerzos transversales de corte se utilizan principalmente esquemas de deformaciones naturales impuestas (ANS de su acrónimo en inglés). La clásica aproximación de [Dvorkin y](#)

Bathe (1984) es la habitualmente utilizada cuando se utiliza integración completa en el plano de la lámina (ver por ejemplo Hauptmann y Schweizerhof (1998); Vu-Quoc y Tan (2003)) en tanto que para elementos con integración reducida el esquema debe cambiarse un poco, modificando y aumentando los puntos de muestreo, a los fines de evitar la aparición de modos espurios de deformación (ver por ejemplo Cardoso et al. (2008)). En elementos de sólido con grandes deformaciones el bloqueo volumétrico ha sido principalmente resuelto recurriendo a elementos mixtos con presión constante como propone originalmente Nagtegaal et al. (1974), donde la presión puede eliminarse localmente como grado de libertad promediando la deformación volumétrica sobre todo el elemento lo que conduce a un elemento con deformación volumétrica constante. Esta técnica no es aceptable para elementos de sólido-lámina debido a que conduce a elementos excesivamente flexibles y no permite una adecuada graduación de la deformación transversal a través del espesor. Más recientemente se ha recurrido a técnicas de deformaciones impuestas mejoradas (EAS de su acrónimo en inglés) Simo et al. (1993) consistentes en mejorar el gradiente de la deformación con la inclusión de grados de libertad internos que se condensan a nivel elemental manteniendo como grados de libertad globales sólo los desplazamientos. La técnica de EAS permite no sólo eliminar el bloqueo volumétrico, si no también eliminar los problemas debido al efecto Poisson e incluso puede utilizarse para mejorar el comportamiento membranar del elemento. No está exenta de desventajas, pueden presentarse inestabilidades, requiere aumentar significativamente la base de datos elemental o utilizar un bucle iterativo en cada elemento para la determinación de los grados de libertad interno en cada iteración de Newton-Raphson. Aparentemente el elemento de sólido-lámina con mejor comportamiento es el presentado en las Refs. Schwarze y Reese (2009, 2011) donde se muestra que un grado de libertad interno adicional en conjunto con un esquema de integración reducida es suficiente para solucionar el bloqueo volumétrico y los problemas derivados del efecto Poisson. El elemento satisface las pruebas de la parcela membranar y flexional, muestra muy buenas propiedades de convergencia y funciona correctamente en grandes deformaciones elasto-plásticas como se muestra en Schwarze et al. (2011). Alternativamente Bassa et al. (2013) han desarrollado un elemento con un grado de libertad adicional de desplazamiento en el centro del elemento para mejorar la interpolación en la dirección transversal.

En conocimiento del autor el único desarrollo de elemento de sólido orientado al análisis de lamina de base triangular es el propuesto en Flores (2013b). Allí para evitar el bloqueo por corte transversal se utiliza una aproximación ANS para las componentes del tensor métrico asociadas la dirección local normal a la lámina, en tanto que el bloqueo volumétrico se alivia por un lado promediado la deformación volumétrica en todo el elemento (restringido a usar al menos dos elementos en el espesor) y por otro en el plano tangente a la lámina se hace uso de los elementos adyacentes para lograr una mejora en las correspondientes componentes del tensor métrico (Flores y Oñate (2005)). Se tiene así un elemento sencillo, que no requiere estabilización debido a subintegración, formulado en grandes deformaciones y adecuado para problemas con contacto. La razón de que no se hayan desarrollado elementos prismáticos de base triangular probablemente son las pocas posibilidades que brinda una interpolación cinemática tan restringida. Una ventaja importante que tiene un elemento de base triangular es que los generadores de mallas triangulares son mucho mas eficaces en cuanto a obtener elementos con buena relación de aspecto.

El comportamiento de los elementos estándar prismático de 6 nudos y hexaédricos de 8 nudos es diferente por lo que las estrategias para mejorar su comportamiento también son diferentes. Así el primero muestra un bloqueo por cortante mucho más moderado en tanto que el segundo tiene un mejor comportamiento membranar. Notar además que para una misma densi-

dad de malla una estrategia de integración reducida implica en el primero el doble de puntos de integración que para el segundo.

En este trabajo se propone modificar el elemento “prism” de 6 nudos (Flores (2013b)) a los fines de que sea adecuado como elemento de sólido-lámina, i.e., que pueda utilizarse un elemento en el espesor de la lámina y obtener resultados correctos en láminas delgadas, con relaciones de Poisson distintas de cero e incluso para materiales cuasi-incompresibles o con flujo plástico isócoro.

En la siguiente sección se resume la formulación básica del elemento de sólido. A continuación se presentan las mejoras en el elemento estándar, empezando por la mejora en el plano tangente de la lámina, luego la formulación del corte transversal y finalmente se presenta la técnica EAS utilizada para evitar el bloqueo debido al efecto Poisson. En la Sección 5 se presentan varios ejemplos mostrando el muy buen comportamiento del elemento y finalmente se resumen algunas conclusiones.

## 2. CINEMÁTICA BÁSICA DEL ELEMENTO FINITO DE SÓLIDO

A continuación se presenta la formulación cinemática del elemento de prisma estándar. Las geometrías inicial y deformada del elemento están descritas por las aproximaciones isoparamétricas estándar (Zienkiewicz y Taylor (2000)).

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^6 N^I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{X}^I \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^6 N^I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}^I = \sum_{I=1}^6 N^I(\boldsymbol{\xi}) (\mathbf{X}^I + \mathbf{u}^I) \quad (2)$$

donde  $\mathbf{X}^I$ ,  $\mathbf{x}^I$ , y  $\mathbf{u}^I$  son las coordenadas originales, coordenadas actuales y desplazamientos del nudo  $I$  respectivamente. Las funciones de forma  $N^I(\boldsymbol{\xi})$  son las habituales funciones de forma Lagrangeanas en función de las coordenadas locales  $\boldsymbol{\xi}$  del elemento maestro correspondiente que combinan coordenadas de área  $(\xi, \eta)$  en el plano del triángulo con una interpolación lineal  $(\zeta)$  en la dirección axial del prisma :

$$\begin{aligned} N^1 &= zL^1 & N^4 &= zL^2 \\ N^2 &= \xi L^1 & N^5 &= \xi L^2 \\ N^3 &= \eta L^1 & N^6 &= \eta L^2 \end{aligned} \quad (3)$$

donde se ha usado:

$$\begin{aligned} z &= 1 - \xi - \eta \\ L^1 &= \frac{1}{2}(1 - \zeta) \\ L^2 &= \frac{1}{2}(1 + \zeta) \end{aligned} \quad (4)$$

La evaluación de las derivadas cartesianas se realiza en forma estándar, definiendo la matriz jacobiana en cada punto de interés

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad (5)$$

$$N_{\mathbf{X}}^I = \mathbf{J}^{-1} N_{\boldsymbol{\xi}}^I \quad (6)$$

En tales puntos se define un sistema cartesiano local coincidente con el plano tangente a la lámina orientado según las direcciones principales de ortotropía del material constitutivo

$$\mathbf{R} = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3] \quad (7)$$

de tal forma que las derivadas cartesianas referidas a este sistema ( $\mathbf{Y}$ ) resultan

$$N_{\mathbf{Y}}^I = \mathbf{R}^T N_{\mathbf{X}}^I \quad (8)$$

lo que permite evaluar el gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  en función de las coordenadas actuales de los nudos

$$F_{ij} = \sum_{I=1}^{NN} N_{y_j}^I x_i^I \quad (9)$$

y las componentes del tensor de estiramiento derecho de Cauchy-Green  $\mathbf{C}$

$$C_{ij} = F_{ki} F_{kj} \quad (10)$$

Para obtener las tensiones el tensor de deformaciones se descompone en sus componentes volumétrica y desviadora. Esta descomposición se realiza en forma multiplicativa en cada punto de integración

$$\mathbf{C} = [\det(\mathbf{C})]^{\frac{1}{3}} \mathbf{C}_D = J^{\frac{2}{3}} \mathbf{C}_D \quad (11)$$

donde las deformaciones volumétrica y desviadora se definen como

$$\Delta = \ln J \quad (12)$$

$$\mathbf{e}_D = \ln \left( \mathbf{C}_D^{\frac{1}{2}} \right) \quad (13)$$

con lo cual

$$\mathbf{e} = \frac{\Delta}{3} \mathbf{1} + \mathbf{e}_D \quad (14)$$

Para el cálculo de las deformaciones (13) se requiere la descomposición espectral:

$$\mathbf{C} = \mathbf{L}^T \mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{L} \quad (15)$$

donde  $\mathbf{\Lambda}^2$  es la matriz diagonal que agrupa a los autovalores  $\lambda_i^2$  de  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{L}$  incluye los autovectores (unitarios) asociados.

Adoptando la hipótesis de aditividad de componentes elástica y plástica del tensor de deformaciones éste se escribe:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^p + \mathbf{e}^e \quad (16)$$

Si se utiliza la función de fluencia de von Mises o alguna de las funciones de fluencia propuesta por Hill es posible trabajar con las componentes desviadoras de tensiones y deformaciones, lo que facilita y hace más económica la integración de las ecuaciones constitutivas.

Como se muestra en la próxima sección el tensor  $\mathbf{C}$  se modifica utilizando técnicas de deformaciones impuestas que en un caso incluyen la adición de un grado de libertad interno  $\alpha$ , dando

lugar a un tensor mejorado  $\bar{\mathbf{C}}$ . Las ecuaciones de balance que se intenta resolver (formulación variacional) son para el caso de grandes deformaciones

$$g_1(\mathbf{u}, \alpha) = \int_{V_0} \frac{1}{2} \mathbf{S}(\bar{\mathbf{C}}) : \delta_{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{C}} dV_0 + g_{ext} = 0 \quad (17)$$

$$g_2(\mathbf{u}, \alpha) = \int_{V_0} \frac{1}{2} \mathbf{S}(\bar{\mathbf{C}}) : \delta_{\alpha} \bar{\mathbf{C}} dV_0 = 0 \quad (18)$$

donde  $\mathbf{S}$  es el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff que se relaciona con el tensor  $\mathbf{T}$  mediante las expresiones siguientes:

a) definiendo el tensor de Hencky rotado

$$\mathbf{T}_L = \mathbf{L}^T \mathbf{T} \mathbf{L} \quad (19)$$

b) la relación entre tensores rotados es (ver por ejemplo la referencia [Crisfield \(1997\)](#)):

$$[S_L]_{\alpha\alpha} = \frac{1}{\lambda_{\alpha}^2} [T_L]_{\alpha\alpha} \quad (20)$$

$$[S_L]_{\alpha\beta} = \frac{\ln(\lambda_{\alpha}/\lambda_{\beta})}{\frac{1}{2}(\lambda_{\alpha}^2 - \lambda_{\beta}^2)} [T_L]_{\alpha\beta}$$

c) finalmente el 2do tensor de Piola-Kirchhoff es

$$\mathbf{S} = \mathbf{L} \mathbf{S}_L \mathbf{L}^T \quad (21)$$

Como alternativa a la utilización de la deformación logarítmica la descomposición espectral del tensor  $\bar{\mathbf{C}}$  permite considerar en forma sencilla materiales hiper-elásticos en grandes deformaciones (elastómeros), utilizando modelos tales como los de Ogden, Mooney-Rivlin, neohookeanos, etc. que habitualmente se definen en función de la energía interna de deformación a partir de los estiramientos principales.

### 3. MEJORAS EN EL ELEMENTO ESTÁNDAR

A los efectos de utilizar el elemento prismático en problemas de láminas con grandes deformaciones elasto-plásticas incluyendo contacto es necesario mejorar sustancialmente el comportamiento del mismo. Para ello se realizan modificaciones sobre los tensores de deformación.

La discretización de una lámina con elementos de sólido de 6 nudos implica dos pasos a) una discretización de la superficie media de la lámina con triángulos de 3 nudos y b) una discretización del espesor de la lámina con uno o más elementos de sólido en base al triángulo definido sobre la superficie media. Supondremos entonces que las conectividades del elemento de 6 nudos se introducen con los nudos locales 1 a 3 y 4 a 6 asociados con superficies paralelas a la superficie media y que los últimos tres nudos están por encima de los tres primeros en la dirección del espesor a una distancia igual al espesor de la capa (lo habitual en elementos de sólido-lámina). De esta forma la dirección normal a la superficie media ( $y_3$  local) coincide con la variable natural local  $\zeta$ .

La formulación cinemática del elemento de sólido se basa en el tensor derecho de Cauchy-Green, por lo cual la posibilidad más directa es plantear modificaciones a las componentes de  $\mathbf{C}$  que estén directamente asociadas a la parte que se desea mejorar

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11}^{\#} & C_{12}^{\#} & C_{13}^{*} \\ C_{21}^{\#} & C_{22}^{\#} & C_{23}^{*} \\ C_{31}^{*} & C_{32}^{*} & C_{33}^{*} \end{bmatrix} \quad (22)$$

donde las componentes indicadas con un # son las que tienen influencia principal en el comportamiento en el plano tangente a la lámina y, las denotadas con \* son las que tienen directa influencia en el corte transversal. Esto permite separar el tensor en tres partes

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 \quad (23)$$

donde

$$\mathbf{C}_1 = C_{11} \mathbf{t}^1 \otimes \mathbf{t}^1 + C_{22} \mathbf{t}^2 \otimes \mathbf{t}^2 + C_{12} (\mathbf{t}^1 \otimes \mathbf{t}^2 + \mathbf{t}^2 \otimes \mathbf{t}^1) \quad (24)$$

se corresponde con las componentes sobre el plano tangente

$$\mathbf{C}_2 = C_{13} (\mathbf{t}^1 \otimes \mathbf{t}^3 + \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^1) + C_{23} (\mathbf{t}^2 \otimes \mathbf{t}^3 + \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^2) \quad (25)$$

está asociada principalmente con las deformaciones de corte transversal y

$$\mathbf{C}_3 = C_{33} \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^3 \quad (26)$$

con la deformación en el espesor de la lámina.

A continuación se muestran las modificaciones en cada una de las partes en que se ha dividido a  $\mathbf{C}$ . La modificación propuesta en  $\mathbf{C}_1$  es idéntica a la descrita en Flores (2013b). La modificación en  $\mathbf{C}_2$  es similar a la descrita en Flores (2013b) pero modificando los puntos de muestreo para la aproximación en deformaciones mixtas impuestas. En cuanto a  $\mathbf{C}_3$  se recurre ahora a una aproximación EAS con la inclusión de un grado de libertad interno. Por otro lado a diferencia de la referencia original que utiliza 2 puntos de integración fijos, aquí el número de puntos de integración es arbitrario, lo habitual en elementos de sólido-lámina. El esquema de integración conduce, por razones de optimización, a una forma diferente de evaluar el vector de las fuerzas nodales equivalentes y las matrices de rigidez geométrica. Al respecto para la integral de volumen (respecto a la configuración de referencia) el determinante del jacobiano de la aproximación isoparamétrica se evalúa en tres puntos, los centros de las caras y el centro del elemento, y se interpola cuadráticamente a los puntos de integración.

### 3.1. Mejora en el plano de la lámina usando elementos adyacentes

Para ello se recurre a los elementos adyacentes en el plano de la lámina, de esta forma se involucran 12 nudos en vez de 6 (ver Fig. 1.a). Con lo cual resulta un elemento cuadrático en el plano del triángulo. Aquí se propone la misma opción convectiva usada en láminas (Flores y Oñate (2005)) que consiste en evaluar el tensor  $\mathbf{C}$  a la mitad de cada lado y promediarlo en el centro. En este caso puede hacerse exactamente lo mismo en cada cara, inferior y superior (ver Figura 1.b con la notación de la cara inferior), e interpolar a los puntos de integración. Las funciones locales correspondientes son para la cara inferior

$I$	$N$	$N_{\xi}$	$N_{\eta}$	
1	$(z + \xi\eta)$	$(-1 + \eta)$	$(-1 + \xi)$	
2	$(\xi + \eta z)$	$(1 - \eta)$	$(z - \eta)$	
3	$(\eta + z\xi)$	$(z - \xi)$	$(1 - \xi)$	
7	$\frac{z}{2}(z - 1)$	$(\frac{1}{2} - z)$	$(\frac{1}{2} - z)$	
8	$\frac{\xi}{2}(\xi - 1)$	$(\xi - \frac{1}{2})$	0	
9	$\frac{\eta}{2}(\eta - 1)$	0	$(\eta - \frac{1}{2})$	(27)

Luego sobre cada cara inferior y superior definida por los 3 nudos del elemento y los 3 adyacentes:

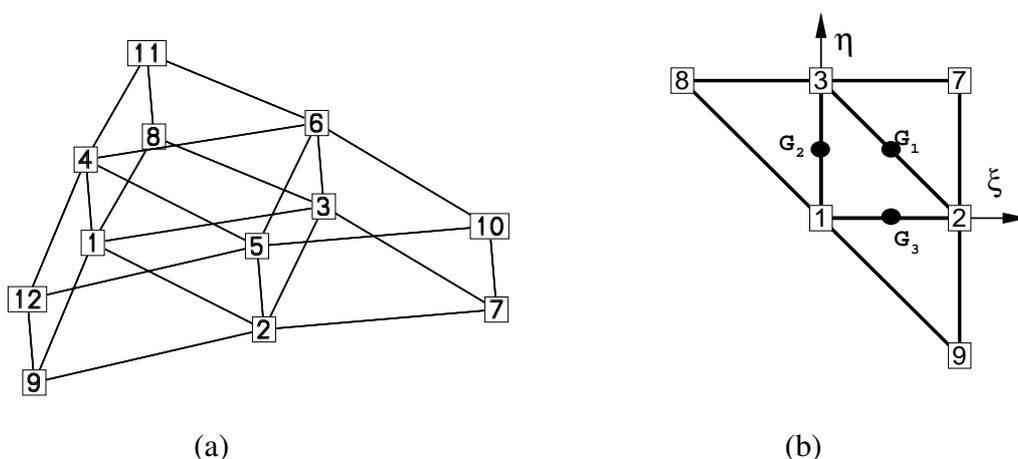


Figura 1: Parcela de elementos

1. En el centro del elemento se evalúa un sistema local  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$  tangente al plano de la lámina y  $\mathbf{t}_3$  normal a la cara ( $\mathbf{t}_1$  y  $\mathbf{t}_2$  se eligen en función del sistema local definido  $\mathbf{R}$  en el centro del elemento).
2. A la mitad de cada lado ( $G_K$ ) se evalúa el jacobiano en el plano  $(\mathbf{X}_\xi, \mathbf{X}_\eta)$  y se proyecta en las direcciones  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$

$$\mathbf{J}_K = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_\xi \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{X}_\eta \cdot \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{X}_\xi \cdot \mathbf{t}_2 & \mathbf{X}_\eta \cdot \mathbf{t}_2 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

3. Se evalúa las derivadas de las funciones de forma que involucran a sólo 4 nudos en cada punto medio  $G_K$

$$\begin{bmatrix} N_1^I \\ N_2^I \end{bmatrix}^K = \mathbf{J}_K^{-1} \begin{bmatrix} N_\xi^I \\ N_\eta^I \end{bmatrix}^K. \quad (29)$$

4. Esto permite calcular las componentes del gradiente de las deformaciones sobre el plano tangente  $(\mathbf{f}_1^K, \mathbf{f}_2^K)$  y con ellos  $C_{ij}^K$  ( $i, j = 1, 2$ ) que luego se promedian en la cara  $\bar{C}_{ij}^f$  ( $f = 1, 2$  según sea cara inferior o superior).
5. De la misma forma que en láminas, cuando sobre un lado no existe el elemento adyacente se incluye en el promedio las componentes  $C_{ij}$  evaluadas sobre el triángulo central.

Se utilizan  $n_G$  puntos de integración en la directriz del prisma. Las componentes en el plano del tensor derecho de Cauchy-Green se interpolan en dichos puntos (recordar que las componentes modificadas de  $\mathbf{C}$  se indican por una barra superpuesta)

$$\bar{C}_{ij}(\zeta) = L^1 \bar{C}_{ij}^1 + L^2 \bar{C}_{ij}^2 \quad (30)$$

La correspondiente matriz tangente  $\bar{\mathbf{B}}_m^f$  que relaciona el incremento en desplazamientos  $\delta \mathbf{u}$  con los cambios en las componentes en el plano del tensor resulta de:

$$\delta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \bar{C}_{11} \\ \frac{1}{2} \bar{C}_{22} \\ \bar{C}_{12} \end{bmatrix} = L^1 \delta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \bar{C}_{11}^1 \\ \frac{1}{2} \bar{C}_{22}^1 \\ \bar{C}_{12}^1 \end{bmatrix} + L^2 \delta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \bar{C}_{11}^2 \\ \frac{1}{2} \bar{C}_{22}^2 \\ \bar{C}_{12}^2 \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} \quad (31)$$

y

$$\begin{aligned}
 \delta \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\bar{C}_{11}^f \\ \frac{1}{2}\bar{C}_{22}^f \\ \bar{C}_{12}^f \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \sum_{K=1}^3 \delta \begin{bmatrix} \frac{1}{2}C_{11}^K \\ \frac{1}{2}C_{22}^K \\ C_{12}^K \end{bmatrix}^f \\
 &= \frac{1}{3} \sum_{K=1}^3 \sum_{J=1}^4 \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^{K(J)} N_1^{(J)} \\ \mathbf{f}_2^{K(J)} N_2^{(J)} \\ \left( \mathbf{f}_1^{K(J)} N_2^{(J)} + \mathbf{f}_2^{K(J)} N_1^{(J)} \right) \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}^{K(J)} \\
 &= \bar{\mathbf{B}}_m^f \delta \mathbf{u}^f
 \end{aligned} \tag{32}$$

donde el vector  $\delta \mathbf{u}^f$  incluye sólo los nudos de la cara  $f$  (inferior o superior). Luego es posible escribir

$$[\bar{\mathbf{B}}_m]_{3 \times 36} = [ L^1 \bar{\mathbf{B}}_m^1 \quad L^2 \bar{\mathbf{B}}_m^2 ] \tag{33}$$

Notar que cada matriz está asociada con nudos distintos, pues la matriz  $\bar{\mathbf{B}}_m^1$  está asociada con los nudos de la cara inferior y la  $\bar{\mathbf{B}}_m^2$  con los nudos de la cara superior.

El vector de fuerzas nodales equivalentes resulta de la integral

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{u}^T \mathbf{r}_m &= \delta \mathbf{u}^T \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix}^T [ L^1 \bar{\mathbf{B}}_m^1, \quad L^2 \bar{\mathbf{B}}_m^2 ] J d\zeta \\
 &= \delta \mathbf{u}^T \left\{ \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix}^T L^1 J d\zeta \bar{\mathbf{B}}_m^1, \quad \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix}^T L^2 J d\zeta \bar{\mathbf{B}}_m^2 \right\} \\
 &= \delta \mathbf{u}^T \left\{ \begin{bmatrix} \bar{S}_{11}^1 \\ \bar{S}_{22}^1 \\ \bar{S}_{12}^1 \end{bmatrix}^T \bar{\mathbf{B}}_m^1, \quad \begin{bmatrix} \bar{S}_{11}^2 \\ \bar{S}_{22}^2 \\ \bar{S}_{12}^2 \end{bmatrix}^T \bar{\mathbf{B}}_m^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{34}$$

donde

$$\delta \mathbf{u}^T = [\delta \mathbf{u}_1^T \delta \mathbf{u}_2^T \delta \mathbf{u}_3^T \delta \mathbf{u}_7^T \delta \mathbf{u}_8^T \delta \mathbf{u}_9^T \delta \mathbf{u}_4^T \delta \mathbf{u}_5^T \delta \mathbf{u}_6^T \delta \mathbf{u}_{10}^T \delta \mathbf{u}_{11}^T \delta \mathbf{u}_{12}^T] \tag{35}$$

### 3.1.1. Matriz de rigidez geométrica

La matriz de rigidez geométrica en tanto resulta de:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_g \Delta \mathbf{u} &= \int_V \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left( \delta \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\bar{C}_{11} \\ \frac{1}{2}\bar{C}_{22} \\ \bar{C}_{12} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u} dV \\
 &= \sum_{G=1}^{n_G} \frac{Vol_G}{3} \sum_{f=1}^2 L^f \sum_{K=1}^3 \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 \left\{ \delta \mathbf{u}^I [N_1^I N_2^I] \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^J \\ N_2^J \end{bmatrix} \right\}^K
 \end{aligned} \tag{36}$$

donde la suma en  $G$  es la integración numérica con  $n_G$  puntos en la dirección  $\zeta$ .

Se puede sacar provecho de los valores  $\bar{\mathbf{S}}$  calculados arriba (34). Para las componentes en el plano es posible escribir

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_g \Delta \mathbf{u} &= \sum_{f=1}^2 \sum_{K=1}^3 \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 \left\{ \delta \mathbf{u}^I [N_1^I N_2^I]^K \left[ \sum_{G=1}^{n_G} \frac{Vol_G}{3} L^f \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} N_1^J \\ N_2^J \end{bmatrix}^K \Delta \mathbf{u}^J \right\} \\ &= \sum_{f=1}^2 \left\{ \sum_{K=1}^3 \sum_{I=1}^4 \sum_{J=1}^4 \left\{ \delta \mathbf{u}^I [N_1^I N_2^I]^K \begin{bmatrix} \bar{S}_{11}^f & \bar{S}_{12}^f \\ \bar{S}_{21}^f & \bar{S}_{22}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^J \\ N_2^J \end{bmatrix}^K \Delta \mathbf{u}^J \right\} \right\}^f \end{aligned} \quad (37)$$

donde nuevamente las contribuciones sobre cada cara son independientes una de la otra.

### 3.2. Tratamiento del corte transversal

El tratamiento del corte transversal se realiza usando una aproximación en deformaciones mixtas impuestas (ANS). En el trabajo de Oñate et al. (1992) que presenta una metodología general para la cura del bloqueo debido al corte transversal en elementos de lámina. Allí se trabaja con un elemento triangular cuadrático completo, que propone una variación lineal de la deformación de corte tangente al lado. Esta aproximación puede particularizarse para elementos más sencillos (Zárate et al. (1994)) imponiendo sobre cada lado un valor constante de la deformación transversal de corte tangente al lado que resulta:

$$\begin{bmatrix} C_{\xi 3} \\ C_{\eta 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta & -\eta & 1 - \eta \\ \xi & \xi - 1 & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} C_{t3}^1 \\ -C_{\eta 3}^2 \\ C_{\xi 3}^3 \end{bmatrix} = \mathbf{P}(\xi, \eta) \tilde{\mathbf{c}} \quad (38)$$

donde las componentes de corte transversal ( $C_{\xi 3}$ ,  $C_{\eta 3}$ ) han sido definidas en un sistema mixto, i.e. que incluye las coordenadas naturales en el plano ( $\xi, \eta$ ) y la coordenada espacial en la dirección transversal ( $y_3$ ). Las componentes de interés se calculan en función del gradiente tangencial al contorno ( $\mathbf{f}_t$ ) y el gradiente en la dirección normal  $y_3$  ( $\mathbf{f}_3$ ) en cada lado: 1 ( $\xi = \eta = \frac{1}{2}$ ), 2 ( $\xi = 0, \eta = \frac{1}{2}$ ) y 3 ( $\xi = \frac{1}{2}, \eta = 0$ ) (ver Figura 2).

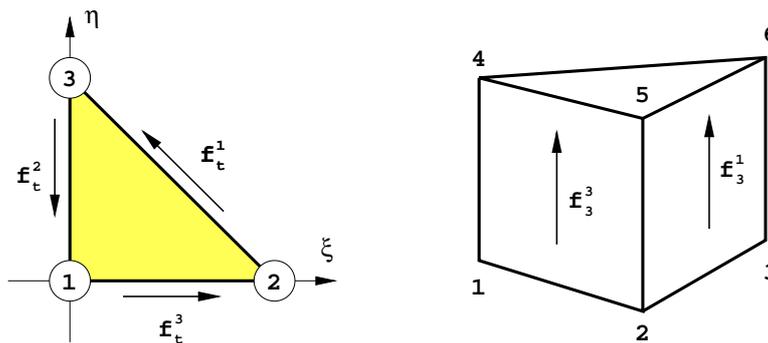


Figura 2: Puntos de evaluación de las componentes transversales en triángulos

Por otro lado la integración se realiza a lo largo del eje del prisma ( $\xi = \eta = \frac{1}{3}$ ), sobre esa línea:

$$\begin{bmatrix} C_{\xi 3} \\ C_{\eta 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} C_{t3}^1 \\ -C_{\eta 3}^2 \\ C_{\xi 3}^3 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2} C_{t3}^1 - C_{\eta 3}^2 + C_{\xi 3}^3}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{\xi 3}^3 \\ C_{\eta 3}^2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

En forma es similar a lo que se realiza en elementos de sólido-lamina hexaédricos [Cardoso et al. \(2008\)](#) con integración reducida (un punto de integración en el plano de la lámina) se eligen los puntos de muestreo para los valores de  $\zeta$  correspondientes a las caras inferior y superior ( $\zeta = \pm 1$ ).

Las tres componentes mixtas evaluadas en los puntos de muestreo son:

$$\tilde{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}C_{t3}^1 \\ -C_{\eta 3}^2 \\ C_{\xi 3}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\mathbf{f}_t^1 \cdot \mathbf{f}_3^1 \\ -\mathbf{f}_\eta^2 \cdot \mathbf{f}_3^2 \\ \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \mathbf{f}_3^3 \end{bmatrix} \quad (40)$$

llevando (40) a (39) permite evaluar:

$$\bar{\mathbf{C}}_2 = C_{\xi 3} (\mathbf{t}^\xi \otimes \mathbf{t}^3 + \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^\xi) + C_{\eta 3} (\mathbf{t}^\eta \otimes \mathbf{t}^3 + \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^\eta) \quad (41)$$

donde  $[\mathbf{t}^\xi \ \mathbf{t}^\eta \ \mathbf{t}^3]$  son los vectores de la base dual de la terna local  $[\mathbf{t}_\xi \ \mathbf{t}_\eta \ \mathbf{t}_3] = \left[ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta} \ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_3} \right]$  y de allí calcular las componentes cartesianas modificadas.

$$\bar{C}_{13} = \mathbf{t}_1 \cdot \bar{\mathbf{C}}_2 \cdot \mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 \cdot [C_{\xi 3} (\mathbf{t}^\xi \otimes \mathbf{t}^3 + \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^\xi) + C_{\eta 3} (\mathbf{t}^\eta \otimes \mathbf{t}^3 + \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^\eta)] \cdot \mathbf{t}_3 \quad (42)$$

denotando por  $a_i^j = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}^j$  (con  $i = 1, 2, 3$  y  $j = \xi, \eta, 3$ )

$$\bar{C}_{13} = C_{\xi 3} (a_1^\xi a_3^3 + a_1^3 a_3^\xi) + C_{\eta 3} (a_1^\eta a_3^3 + a_1^3 a_3^\eta) = C_{\xi 3} a_1^\xi + C_{\eta 3} a_1^\eta \quad (43)$$

y similarmente para la otra componente de interés ( $\bar{C}_{23}$ ). Luego usando la condición  $a_i^3 = \delta_i^3$  resulta

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^\xi & a_1^\eta \\ a_2^\xi & a_2^\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\xi 3} \\ C_{\eta 3} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_p^{-1} \begin{bmatrix} C_{\xi 3} \\ C_{\eta 3} \end{bmatrix} \quad (44)$$

donde  $\mathbf{J}_p^{-1}$  es la inversa del jacobiano de la interpolación isoparamétrica restringido al plano tangente a la superficie. Notar que debido a la forma en que se han definido a los sistemas locales las componentes son nulas en la configuración de referencia.

Las componentes de interés del gradiente de la deformación en el sistema natural en los puntos de muestreo (1-3) se obtienen valuando las derivadas de las funciones de forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^1 \\ -\mathbf{f}_\eta^2 \\ \mathbf{f}_\xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{t_\xi} (\xi = \eta = \frac{1}{2}) \\ -\mathbf{f}_{\eta_\xi} (\xi = 0, \eta = \frac{1}{2}) \\ \mathbf{f}_{\xi_\eta} (\xi = \frac{1}{2}, \eta = 0) \end{bmatrix} \quad (45)$$

donde las derivadas de las funciones de forma (3) valuadas en los 3 puntos de muestreo sobre las caras inferior (1) y superior (2) resultan respectivamente:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}\mathbf{f}_t^1 \\ -\mathbf{f}_\eta^2 \\ \mathbf{f}_\xi^3 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2 \\ \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3 \\ \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sqrt{2}\mathbf{f}_t^1 \\ -\mathbf{f}_\eta^2 \\ \mathbf{f}_\xi^3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^6 - \mathbf{x}^5 \\ \mathbf{x}^4 - \mathbf{x}^6 \\ \mathbf{x}^5 - \mathbf{x}^4 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Hasta aquí, para cada punto de muestreo, se han escrito los gradientes de  $\mathbf{x}$  respecto a coordenadas naturales en el plano de cada cara. Los gradientes en la dirección transversal ( $y_3$ ) se expresan como

$$\mathbf{f}_3 = [\mathbf{f}_\xi \ \mathbf{f}_\eta \ \mathbf{f}_\zeta] \begin{bmatrix} \xi_3 \\ \eta_3 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{f}_\xi \ \mathbf{f}_\eta \ \mathbf{f}_\zeta] \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y_3} \end{bmatrix} = \nabla_\xi(\mathbf{x}) \mathbf{j}_3^{-T} \quad (47)$$

donde  $(\frac{\partial}{\partial y_3})$  son las componentes en la dirección  $y_3$  de la inversa del jacobiano (la tercera columna o  $\mathbf{j}_3^{-1}$ ) o también

$$\mathbf{f}_3 = \sum_{I=1}^6 N_3^I \mathbf{x}^I \quad (48)$$

con

$$N_3^I = [ N_\xi^I \quad N_\eta^I \quad N_\zeta^I ] \mathbf{j}_3^{-T} \quad (49)$$

Obtenidas las componentes mixtas de corte transversal en cada cara, estas se pueden pasar al sistema cartesiano en la misma forma que el gradiente

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial y_1} & \frac{\partial \eta}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y_2} & \frac{\partial \eta}{\partial y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\xi 3} \\ C_{\eta 3} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_p^{-1} \begin{bmatrix} C_{\xi 3} \\ C_{\eta 3} \end{bmatrix} \quad (50)$$

Las componentes de corte transversal del tensor  $\mathbf{C}_2$  respecto al sistema cartesiano resultan entonces de reemplazar las (40) en las (38) y éstas en las (44)

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{23} \end{bmatrix} (\xi, \eta) = \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{P} (\xi, \eta) \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^1 \cdot \mathbf{f}_3^1 \\ -\mathbf{f}_\eta^2 \cdot \mathbf{f}_3^2 \\ \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \mathbf{f}_3^3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{P} (\xi, \eta) \tilde{\mathbf{c}} \quad (51)$$

La matriz  $\tilde{\mathbf{B}}_s$  que relaciona el incremento de desplazamientos con el incremento de deformaciones, resulta de primero evaluar en los puntos de muestreo

$$\tilde{\mathbf{B}}_s \delta \mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{f}_t^1 \cdot \mathbf{f}_3^1 + \mathbf{f}_t^1 \cdot \delta \mathbf{f}_3^1 \\ -\delta \mathbf{f}_\eta^2 \cdot \mathbf{f}_3^2 - \mathbf{f}_\eta^2 \cdot \delta \mathbf{f}_3^2 \\ \delta \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \mathbf{f}_3^3 + \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \delta \mathbf{f}_3^3 \end{bmatrix} \quad (52)$$

donde (con  $\delta \mathbf{x}^e = \delta \mathbf{u}^e$ )

$$\delta \begin{bmatrix} \sqrt{2} \mathbf{f}_t^1 \\ -\mathbf{f}_\eta^2 \\ \mathbf{f}_\xi^3 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}^3 - \delta \mathbf{x}^2 \\ \delta \mathbf{x}^1 - \delta \mathbf{x}^3 \\ \delta \mathbf{x}^2 - \delta \mathbf{x}^1 \end{bmatrix} \quad \delta \begin{bmatrix} \sqrt{2} \mathbf{f}_t^1 \\ -\mathbf{f}_\eta^2 \\ \mathbf{f}_\xi^3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}^6 - \delta \mathbf{x}^5 \\ \delta \mathbf{x}^4 - \delta \mathbf{x}^6 \\ \delta \mathbf{x}^5 - \delta \mathbf{x}^4 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \delta \begin{bmatrix} \sqrt{2} \mathbf{f}_t^1 \\ -\mathbf{f}_\eta^2 \\ \mathbf{f}_\xi^3 \end{bmatrix}^1 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{u}^3 \\ \mathbf{u}^4 \\ \mathbf{u}^5 \\ \mathbf{u}^6 \end{bmatrix} \\ \delta \begin{bmatrix} \sqrt{2} \mathbf{f}_t^1 \\ -\mathbf{f}_\eta^2 \\ \mathbf{f}_\xi^3 \end{bmatrix}^2 &= \delta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \delta \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{u}^3 \\ \mathbf{u}^4 \\ \mathbf{u}^5 \\ \mathbf{u}^6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (54)$$

y

$$\delta \begin{bmatrix} \mathbf{f}_3^1 & \mathbf{f}_3^2 & \mathbf{f}_3^3 \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 & \mathbf{u}^2 & \mathbf{u}^3 & \mathbf{u}^4 & \mathbf{u}^5 & \mathbf{u}^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_3^{1(1)} & N_3^{1(2)} & N_3^{1(3)} \\ N_3^{2(1)} & N_3^{2(2)} & N_3^{2(3)} \\ N_3^{3(1)} & N_3^{3(2)} & N_3^{3(3)} \\ N_3^{4(1)} & N_3^{4(2)} & N_3^{4(3)} \\ N_3^{5(1)} & N_3^{5(2)} & N_3^{5(3)} \\ N_3^{6(1)} & N_3^{6(2)} & N_3^{6(3)} \end{bmatrix} \quad (55)$$

luego interpolar a los puntos de integración usando (39) y finalmente pasar al sistema cartesiano

$$\bar{\mathbf{B}}_s(\xi, \eta) = \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{P}(\xi, \eta) \tilde{\mathbf{B}}_s \quad (56)$$

Las deformaciones de Green-Lagrange asociadas al corte transversal en el eje del elemento son directamente los valores interpolados

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2E_{13} \\ 2E_{23} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{23} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_p^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}} \\ &= \mathbf{J}_p^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{2}C_{t3}^1 - C_{\eta 3}^2 + C_{\xi 3}^3}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{\xi 3}^3 \\ C_{\eta 3}^2 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (57)$$

Las componentes en el tensor derecho de Cauchy-Green se obtienen interpolando los valores calculados en cada cara

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{23} \end{bmatrix}(\zeta) = \begin{bmatrix} \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{23} \end{bmatrix}^1 L^1 + \begin{bmatrix} \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{23} \end{bmatrix}^2 L^2 \quad (58)$$

de la misma forma

$$\bar{\mathbf{B}}_s(\zeta) = \bar{\mathbf{B}}_s^1 L^1 + \bar{\mathbf{B}}_s^2 L^2 \quad (59)$$

En tanto que las fuerzas nodales equivalentes se expresan como:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^T &= \int_V \begin{bmatrix} S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix}^T [\bar{\mathbf{B}}_s]_{2 \times 18} dV \\ &= \int_{-1}^1 \mathbf{Q}^T [\bar{\mathbf{B}}_s^1 L^1 + \bar{\mathbf{B}}_s^2 L^2]_{2 \times 18} J d\zeta \\ &= \int_{-1}^1 A \mathbf{Q}^T L^1 J d\zeta \bar{\mathbf{B}}_s^1 + \int_{-1}^1 A \mathbf{Q}^T L^2 J d\zeta \bar{\mathbf{B}}_s^2 \\ &= \bar{\mathbf{Q}}_{4 \times 1}^T \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_s^1 \\ \bar{\mathbf{B}}_s^2 \end{bmatrix}_{4 \times 18} \end{aligned} \quad (60)$$

donde las fuerzas generalizadas de corte  $\bar{\mathbf{Q}}$  en cada elemento se definen como:

$$\bar{\mathbf{Q}}_{4 \times 1} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} L^1 \\ \begin{bmatrix} S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} L^2 \end{bmatrix} J d\zeta \quad (61)$$

### 3.2.1. Matriz de rigidez geométrica basada en $\bar{Q}$

Con lo anterior puede avanzarse en la obtención de la matriz de rigidez geométrica:

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{sG} \Delta \mathbf{u} = \Delta \left\{ \left[ \begin{array}{c} \bar{\mathbf{B}}_s^1 \\ \bar{\mathbf{B}}_s^2 \end{array} \right] \delta \mathbf{u} \right\}^T \bar{\mathbf{Q}} \quad (62)$$

donde en cada cara se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}_s^f \delta \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{J}_p^{-1}}{3} \left[ \begin{array}{c} -\sqrt{2} \delta \mathbf{f}_t^1 \cdot \mathbf{f}_3^1 - \sqrt{2} \mathbf{f}_t^1 \cdot \delta \mathbf{f}_3^1 + \delta \mathbf{f}_\eta^2 \cdot \mathbf{f}_3^2 + \mathbf{f}_\eta^2 \cdot \delta \mathbf{f}_3^2 + 2 \delta \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \mathbf{f}_3^3 + 2 \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \delta \mathbf{f}_3^3 \\ \sqrt{2} \delta \mathbf{f}_t^1 \cdot \mathbf{f}_3^1 + \sqrt{2} \mathbf{f}_t^1 \cdot \delta \mathbf{f}_3^1 + 2 \delta \mathbf{f}_\eta^2 \cdot \mathbf{f}_3^2 + 2 \mathbf{f}_\eta^2 \cdot \delta \mathbf{f}_3^2 + \delta \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \mathbf{f}_3^3 + \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \delta \mathbf{f}_3^3 \end{array} \right] \\ &= \frac{\mathbf{J}_p^{-1}}{3} \left\{ \left[ \begin{array}{c} -\tilde{\mathbf{B}}_s^1 - \tilde{\mathbf{B}}_s^2 + 2\tilde{\mathbf{B}}_s^3 \\ \tilde{\mathbf{B}}_s^1 - 2\tilde{\mathbf{B}}_s^2 + \tilde{\mathbf{B}}_s^3 \end{array} \right]_{2 \times 18} \right\} \delta \mathbf{u} \quad (63) \end{aligned}$$

considerando el incremento de por ejemplo las componentes de la cara inferior  $[\bar{Q}_1, \bar{Q}_2] \Delta (\bar{\mathbf{B}}_s^1 \delta \mathbf{u})$  resulta

$$\frac{1}{3} [\bar{Q}_1, \bar{Q}_2] \mathbf{J}_p^{-1} \left[ \begin{array}{c} -\sqrt{2} \delta \mathbf{f}_t^1 \cdot \Delta \mathbf{f}_3^1 - \sqrt{2} \Delta \mathbf{f}_t^1 \cdot \delta \mathbf{f}_3^1 + \delta \mathbf{f}_\eta^2 \cdot \Delta \mathbf{f}_3^2 + \Delta \mathbf{f}_\eta^2 \cdot \delta \mathbf{f}_3^2 + 2 \delta \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \Delta \mathbf{f}_3^3 + 2 \Delta \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \delta \mathbf{f}_3^3 \\ \sqrt{2} \delta \mathbf{f}_t^1 \cdot \Delta \mathbf{f}_3^1 + \sqrt{2} \Delta \mathbf{f}_t^1 \cdot \delta \mathbf{f}_3^1 + 2 \delta \mathbf{f}_\eta^2 \cdot \Delta \mathbf{f}_3^2 + 2 \Delta \mathbf{f}_\eta^2 \cdot \delta \mathbf{f}_3^2 + \delta \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \Delta \mathbf{f}_3^3 + \Delta \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \delta \mathbf{f}_3^3 \end{array} \right]$$

llamando

$$[\bar{Q}'_1, \bar{Q}'_2] = [\bar{Q}_1, \bar{Q}_2] \mathbf{J}_p^{-1} \quad (64)$$

se tiene

$$[\bar{Q}'_1, \bar{Q}'_2] \Delta (\bar{\mathbf{B}}_s^1 \delta \mathbf{u}) = \frac{1}{3} \left( \begin{array}{c} (-\bar{Q}'_1 + \bar{Q}'_2) (\sqrt{2} \delta \mathbf{f}_t^1 \cdot \Delta \mathbf{f}_3^1 + \sqrt{2} \Delta \mathbf{f}_t^1 \cdot \delta \mathbf{f}_3^1) + \\ (-\bar{Q}'_1 - 2\bar{Q}'_2) (-\delta \mathbf{f}_\eta^2 \cdot \Delta \mathbf{f}_3^2 - \Delta \mathbf{f}_\eta^2 \cdot \delta \mathbf{f}_3^2) + \\ (2\bar{Q}'_1 + \bar{Q}'_2) (\delta \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \Delta \mathbf{f}_3^3 + \Delta \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \delta \mathbf{f}_3^3) \end{array} \right). \quad (65)$$

En la implementación las derivadas  $N_3^{J(K)}$  relacionadas con  $\mathbf{f}_3$  se guardan en un arreglo para cada cara pero las relacionadas con  $\mathbf{f}_t$  no (que involucran sólo dos nudos de la cara por derivada), pues esas cuentas se realizan en forma explícita ya que tienen sobre cada lado valor 0, 1 y -1 que se van permutando de acuerdo al lado, así se tiene que para la cara inferior

$$\begin{aligned} \sqrt{2} (\delta \mathbf{f}_t^1 \cdot \Delta \mathbf{f}_3^1 + \delta \mathbf{f}_3^1 \cdot \Delta \mathbf{f}_t^1)^1 &= (\delta \mathbf{u}^3 - \delta \mathbf{u}^2)^T \sum_{J=1}^6 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \hat{N}_3^{J(1)} \Delta \mathbf{u}^J \\ &+ (\Delta \mathbf{u}^3 - \Delta \mathbf{u}^2)^T \sum_{J=1}^6 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \hat{N}_3^{J(1)} \delta \mathbf{u}^J \\ - (\delta \mathbf{f}_\eta^2 \cdot \Delta \mathbf{f}_3^2 + \delta \mathbf{f}_3^2 \cdot \Delta \mathbf{f}_\eta^2)^1 &= (\delta \mathbf{u}^1 - \delta \mathbf{u}^3)^T \sum_{J=1}^6 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \hat{N}_3^{J(2)} \Delta \mathbf{u}^J \\ &+ (\Delta \mathbf{u}^1 - \Delta \mathbf{u}^3)^T \sum_{J=1}^6 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \hat{N}_3^{J(2)} \delta \mathbf{u}^J \quad (66) \\ (\delta \mathbf{f}_\xi^3 \cdot \Delta \mathbf{f}_3^3 + \delta \mathbf{f}_3^3 \cdot \Delta \mathbf{f}_\xi^3)^1 &= (\delta \mathbf{u}^2 - \delta \mathbf{u}^1)^T \sum_{J=1}^6 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \hat{N}_3^{J(3)} \Delta \mathbf{u}^J \\ &+ (\Delta \mathbf{u}^2 - \Delta \mathbf{u}^1)^T \sum_{J=1}^6 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \hat{N}_3^{J(3)} \delta \mathbf{u}^J \end{aligned}$$

y similarmente para la superior

### 3.3. Mejora en el comportamiento transversal

Para evitar el bloqueo debido al efecto Poisson cuando la flexión es importante y con ello colaborar en aliviar el bloqueo volumétrico (en problemas cuasi-incompresibles o elasto-plásticos con flujo isócoro), se recurrirá a una formulación con deformaciones impuestas mejoradas para la componente  $C_3$ .

#### 3.3.1. Técnica de deformaciones impuestas mejoradas

El método EAS estándar interpola la componentes en coordenadas naturales. En nuestro caso interesa mejorar  $C_{33}$  por lo cual utilizaremos una forma que se aleja ligeramente de la forma estándar como se explica a continuación.

En el centro ( $\xi = \eta = \frac{1}{2}, \zeta = 0$ ) del elemento se evalúa la componente cartesiana en la dirección  $y_3$  del gradiente de la deformación

$$\mathbf{f}_3^C = \sum_{I=1}^6 N_3^{IC} \mathbf{x}^I \quad (67)$$

y se define el gradiente en la dirección transversal modificado

$$\bar{\mathbf{f}}_3 = \mathbf{f}_3^C e^{\alpha\zeta} \quad (68)$$

luego la componente de interés del tensor derecho de Cauchy-Green es

$$\bar{C}_{33} = \bar{\mathbf{f}}_3^C \cdot \bar{\mathbf{f}}_3^C e^{2\alpha\zeta} = C_{33}^C e^{2\alpha\zeta} \quad (69)$$

Notar que para la aproximación isoparamétrica la componente transversal del tensor de deformaciones resulta en primera aproximación

$$\lambda_3 = \sqrt{C_{33}} = \sqrt{\mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{f}_3} \quad (70)$$

$$e_{33} = \ln(\lambda_3) = \frac{1}{2} \ln(C_{33}) \quad (71)$$

que es prácticamente constante en dirección 3 para el elemento lineal, en tanto que si ahora se usa la versión mejorada

$$\begin{aligned} \bar{e}_{33} &= \frac{1}{2} \ln(\bar{C}_{33}) \\ &= \frac{1}{2} \ln(C_{33}^C e^{2\alpha\zeta}) \\ &= \frac{1}{2} \ln(C_{33}^C) + \alpha\zeta \\ &= e_{33}^C + \alpha\zeta \end{aligned} \quad (72)$$

En esta versión lo que se desprecia son los cambios que produciría  $\bar{\mathbf{f}}_3$  en las otras componentes  $C_{13}$  y  $C_{23}$  del tensor derecho de Cauchy-Green, sin embargo estas se evalúan en la forma indicada en la sección previa y aquí sólo se considera la influencia en la componente  $C_{33}$ .

### 3.3.2. Ecuación de equilibrio y solución implícita

La variación de la deformación de Green involucra el grado de libertad interno  $\alpha$  y es

$$\begin{aligned}\delta \bar{E}_{33} &= \frac{1}{2} \delta \bar{C}_{33} = \delta \mathbf{f}_3^C \cdot \mathbf{f}_3^C e^{2\alpha\zeta} + \bar{C}_{33} \zeta \delta \alpha \\ &= \left( \sum_{I=1}^6 N_3^{IC} \delta \mathbf{u}^I \right) \cdot \mathbf{f}_3^C e^{2\alpha\zeta} + \bar{C}_{33} \zeta \delta \alpha \\ &= e^{2\alpha\zeta} \mathbf{B}_3^C \delta \mathbf{u}^e + \bar{C}_{33} \zeta \delta \alpha\end{aligned}\quad (73)$$

donde la primera parte reemplaza a la parte correspondiente en la formulación exclusivamente en desplazamientos (la diferencia es el factor  $e^{2\alpha\zeta}$  en las componentes asociadas a  $\delta E_{33}$ ).

Las ecuación de balance (18) asociada a la variable  $\alpha$  es

$$\delta \alpha \int_{-1}^1 S_{33} \bar{C}_{33} \zeta J d\zeta = 0 \quad (74)$$

Llamando:

$$\int_{-1}^1 S_{33} \bar{C}_{33} \zeta J d\zeta = r_\alpha \quad (75)$$

la aplicación de la técnica de Newton-Raphson permite aproximar el valor de  $\alpha$  que anula el residuo (75)

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial S_{33} \bar{C}_{33}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial S_{33} \bar{C}_{33}}{\partial \alpha} \Delta \alpha \right] \zeta J d\zeta + r_\alpha = 0 \quad (76)$$

con

$$\frac{\partial S_{33} \bar{C}_{33}}{\partial \mathbf{u}} = \bar{C}_{33} \mathbf{D}_3 \bar{\mathbf{B}} + 2S_{33} e^{2\alpha\zeta} \mathbf{B}_3^C = \bar{C}_{33} \mathbf{D}_3 \bar{\mathbf{B}} + 2S_{33} \bar{\mathbf{B}}_3 \quad (77)$$

$$\frac{\partial S_{33} \bar{C}_{33}}{\partial \alpha} = \bar{C}_{33} D_{33} \bar{C}_{33} \zeta + 2S_{33} \bar{C}_{33} \zeta = \bar{C}_{33} (D_{33} \bar{C}_{33} \zeta + 2S_{33} \zeta) \quad (78)$$

donde  $\mathbf{D}$  es la matriz (notación de Voigt) constitutiva tangente,  $\mathbf{D}_3$  es su tercera fila (o columna) y  $D_{33}$  la componente sobre la diagonal de ésta última. Por otro lado  $\bar{\mathbf{B}}$  es la matriz que relaciona incrementos de deformaciones de Green con incrementos de desplazamiento a partir de las aproximaciones en deformaciones impuestas para el tensor  $\mathbf{C}$ .

Para la solución mediante técnicas implícitas usando un procedimiento de Newton-Raphson, el parámetro  $\alpha$  se condensa localmente en cada elemento a partir de la ecuación (76):

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 [(\bar{C}_{33} \mathbf{D}_3 \bar{\mathbf{B}} + 2S_{33} \bar{\mathbf{B}}_3) \Delta \mathbf{u} + \bar{C}_{33} (D_{33} \bar{C}_{33} \zeta + 2S_{33} \zeta) \Delta \alpha] \zeta J d\zeta + r_\alpha &= 0 \\ \mathbf{H} \Delta \mathbf{u} + k_\alpha \Delta \alpha + r_\alpha &= 0\end{aligned}\quad (79)$$

donde

$$k_\alpha = \int_{-1}^1 \bar{C}_{33} (D_{33} \bar{C}_{33} + 2S_{33}) \zeta^2 J d\zeta \quad (80)$$

$$\mathbf{H} = \int_{-1}^1 (\bar{C}_{33} \mathbf{D}_3 \bar{\mathbf{B}} + 2S_{33} \bar{\mathbf{B}}_3) \zeta J d\zeta \quad (81)$$

luego

$$\Delta\alpha = -\frac{r_\alpha}{k_\alpha} - \frac{1}{k_\alpha} \mathbf{H} \Delta\mathbf{u} \quad (82)$$

que se reemplaza en las correspondiente ecuación de equilibrio asociada a la variación de los desplazamientos (17)

$$\delta\mathbf{u}^T \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{S} dV - \delta\mathbf{u}^T G_{ext} = \delta\mathbf{u}^T \mathbf{r}(\mathbf{u}, \alpha) \quad (83)$$

una vez linealizadas

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left[ \bar{\mathbf{B}}^T \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{u}} \Delta\mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \alpha} \Delta\alpha \right) + \mathbf{S} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{u}} \Delta\mathbf{u} + \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial \alpha} \Delta\alpha \right) \right] J d\zeta + \mathbf{r}(\mathbf{u}) &= \mathbf{0} \\ \int_{-1}^1 \left[ \bar{\mathbf{B}}^T (\mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} \Delta\mathbf{u} + \mathbf{D}_3 \bar{\mathbf{C}}_{33} \zeta \Delta\alpha) + \mathbf{S} \mathbf{G} \Delta\mathbf{u} + 2S_{33} \bar{\mathbf{B}}_3 \zeta \Delta\alpha \right] J d\zeta + \mathbf{r}(\mathbf{u}) &= \mathbf{0} \\ \int_{-1}^1 \left[ (\bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}^T + \mathbf{S} \mathbf{G}) \Delta\mathbf{u} + (\bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D}_3 \bar{\mathbf{C}}_{33} + 2S_{33} \bar{\mathbf{B}}_3) \Delta\alpha \zeta \right] J d\zeta + \mathbf{r}(\mathbf{u}) &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{u} + \mathbf{H}^T \Delta\alpha) + \mathbf{r}(\mathbf{u}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_T \Delta\mathbf{u} - \mathbf{H}^T \left( \frac{r_\alpha}{k_\alpha} + \frac{1}{k_\alpha} \mathbf{H} \Delta\mathbf{u} \right) + \mathbf{r}(\mathbf{u}) &= \mathbf{0} \\ \left( \mathbf{K}_T - \mathbf{H}^T \frac{1}{k_\alpha} \mathbf{H} \right) \Delta\mathbf{u} - \mathbf{H}^T \frac{r_\alpha}{k_\alpha} + \mathbf{r}(\mathbf{u}) &= \mathbf{0} \quad (84) \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G = \int_{-1}^1 \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} J d\zeta + \int_{-1}^1 \mathbf{S} \mathbf{G} J d\zeta \quad (85)$$

Las contribuciones de la expresión (84) al esquema de Newton-Raphson son:

$$\bar{\mathbf{K}}_T = \mathbf{K}_T - \mathbf{H}^T \frac{1}{k_\alpha} \mathbf{H} \quad (86)$$

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{H}^T \frac{r_\alpha}{k_\alpha} \quad (87)$$

### 3.3.3. Matriz de Rigidez Geométrica

La contribución a las fuerzas residuales de la componente transversal es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_3 &= \int_V \mathbf{B}_3 S_{33} dV \\ &= \int_{-1}^1 e^{2\alpha\zeta} \mathbf{B}_3^C S_{33} J d\zeta \\ &= \mathbf{B}_3^C \bar{S}_{33} \quad (88) \end{aligned}$$

donde

$$\bar{S}_{33} = \int_{-1}^1 e^{2\alpha\zeta} S_{33} J d\zeta \quad (89)$$

de donde la contribución a la rigidez geométrica es:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{G3} \Delta \mathbf{u} &= \delta \mathbf{f}_3^C \cdot \Delta \mathbf{f}_3^C \bar{S}_{33} \\ &= \sum_{I=1}^6 (\delta \mathbf{u}^I)^T \sum_{J=1}^6 N_3^{IC} N_3^{JC} \bar{S}_{33} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^J \end{aligned} \quad (90)$$

### 3.3.4. Solución Explícita

La forma más directa para abordar el problema cuando se utiliza integración explícita de las ecuaciones de movimiento es usar la condición (82). Para ello una forma posible es

1. Usar como fuerzas nodales equivalentes

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{H}^T \frac{r_\alpha}{k_\alpha} \quad (91)$$

y realizar una primera actualización del parámetro EAS

$$\hat{\alpha}_{n+1} = \alpha_n - \frac{r_\alpha}{k_\alpha} \quad (92)$$

2. Usando el esquema en diferencias centrales determinar los desplazamientos incrementales  $\Delta \mathbf{u}$
3. y luego realizar una segunda actualización del parámetro EAS donde

$$\alpha_{n+1} = \hat{\alpha}_{n+1} - \frac{\mathbf{H} \Delta \mathbf{u}}{k_\alpha} \quad (93)$$

Lo anterior requiere (además de guardar  $\alpha$  que es indispensable)

- Guardar  $k_\alpha$  del paso anterior, puede recalcularse pero el aumento de la base de datos es mínimo por lo cual no vale la pena
- Almacenar el vector  $\mathbf{H}$  a los efectos de evitar su recálculo, lo cual implica un incremento importante en la base de datos elemental
- Conocer  $\mathbf{D}_3$  (elasto-plástico que relaciona incrementos del segundo tensor de Piola-Kirchhoff con las deformaciones de Green-Lagrange), lo cual sí implica un aumento apreciable del número de operaciones de punto flotante en cada punto de integración. Esto es así porque  $\mathbf{D}_3$  no está disponible en la integración Explícita (el mismo problema que cuando se hace estabilización de elementos sub-integrados)

A los fines de evitar el aumento de la base de datos elemental [Simo et al. \(1993\)](#) proponen (en códigos implícitos) para modelos con un importante número de grados de libertad internos (12) no almacenar las correspondientes submatrices (que aquí se han reducido al vector  $\mathbf{H}$  y al escalar  $k_\alpha$ ) y utilizar un esquema iterativo para actualizar los grados de libertad internos en la rutina de evaluación de tensiones y fuerzas nodales equivalentes. [Simo et al. \(1993\)](#) dicen que con pocas iteraciones (ellos proponen usar sólo 2) se obtienen resultados suficientemente buenos.

En esa línea, si dicho proceso iterativo es razonablemente exacto en un código con integración implícita de las ecuaciones de movimiento, lo será mucho más en un código explícito. Por otro lado iterar en la evaluación del cálculo de las tensiones es proporcionalmente muy costoso en un código explícito por lo cual se admitirá que una iteración conduce a resultados suficientemente buenos. Las pruebas numéricas realizadas en modelos elasto-plástico han corroborado estas presunciones incluso utilizando la componente  $D_{33}$  elástica.

## 4. EJEMPLOS

En el conjunto de ejemplos presentados abajo se denota por  $SPR$  al elemento desarrollado aquí. Al respecto el sufijo  $Q$  indica que se ha considerado la mejora en el comportamiento membranar. Se denota por  $PRISM$  al elemento sobre el cual se basa el anterior (descrito en Flores (2013b)). Con fines comparativos se utilizan resultados obtenidos con otros elementos:  $Q1SPS$  es un elemento de sólido-lámina con integración reducida con un excelente comportamiento Schwarz y Reese (2009, 2011); Schwarz et al. (2011) en tanto que  $LBST$  y  $BBST$  son elementos triangulares de lámina delgada sin grados de libertad rotacionales, el primero (Flores y Oñate (2001)) utiliza el triángulo de deformación constante para la membrana en tanto que el segundo (Flores y Oñate (2007)) incluye una aproximación en deformaciones impuestas para la membrana. Más ejemplos pueden verse en Flores (2013a).

### 4.1. Prueba de la parcela

La prueba de la parcela se entiende como una condición necesaria para la convergencia del elemento. En el caso de elementos de sólido se espera que frente a desplazamientos impuestos en los nudos de la parcela correspondientes a un gradiente de deformación constante (prueba de la parcela membranar) se obtengan esfuerzos constantes en todo los elementos. En el caso de elementos de lámina se imponen desplazamientos y rotaciones correspondientes a un tensor de curvaturas constante (prueba de la parcela flexional) y se espera obtener un tensor de momentos constante en todos los elementos. Para el caso de un elemento de sólido-lámina claramente este debe satisfacer la prueba de la parcela membranar y, aunque tal vez no sea imprescindible, resulta muy conveniente que satisfaga la prueba de la parcela flexional ya que se tendrá un elemento mas robusto y confiable.

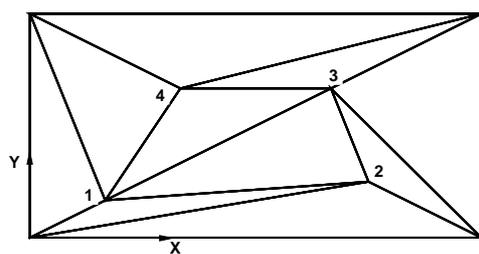
En la Figura 3 se muestra una parcela que ha sido extensamente utilizada para evaluar elementos de lámina cuadriláteros y elementos de sólido-lamina hexaédricos. Aquí cada elemento hexaédrico ha sido reemplazado por dos elementos prismáticos. La dimensión del lado mayor es  $a = 0,24\text{mm}$  y la del lado menor  $b = 0,12\text{mm}$ , en tanto que el espesor considerado es  $t = 0,001\text{mm}$ . La superficie inferior tiene coordenada  $z = -t/2$ . Las propiedades mecánicas del material utilizado son: módulo de Young  $E = 10^6\text{Mpa}$  y relación de Poisson  $\nu = 0,25$ . Debido a que el problema considerado es lineal se han utilizado sólo 2 puntos de integración en el espesor en las posiciones habituales de la cuadratura de Gauss ( $\zeta = \pm 1/\sqrt{3}$ ).

#### 4.1.1. Prueba de la parcela membranar

El campo de desplazamientos impuesto (en los nudos exteriores) responde a la función lineal

$$u_x = \left(x + \frac{y}{2}\right) \times 10^{-3} \quad u_y = \left(y + \frac{x}{2}\right) \times 10^{-3} \quad (94)$$

y  $u_z = 0$  sólo en los nudos de la capa inferior para permitir la contracción debido al efecto Poisson. Usando el elemento  $SPR$  se obtienen los resultados correctos, tanto los desplazamien-



Coordenadas [mm]

1: (0.04, 0.02)

2: (0.18, 0.03)

3: (0.16, 0.08)

4: (0.08, 0.08)

Figura 3: Prueba de la parcela

tos de los nudos internos correspondientes a (94) como las tensiones en todos los elementos ( $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 1333,3$  MPa y  $\sigma_{xy} = 400$  Mpa). En todos los elementos el grado de libertad interno  $\alpha$  es nulo. Los mismos resultados se obtienen con la versión SP<sub>R</sub>Q ya que el gradiente es constante.

#### 4.1.2. Prueba de la parcela flexional

En este caso el campo de desplazamientos propuesto es:

$$u_x = \left(x + \frac{y}{2}\right) \frac{z}{2} \times 10^{-3} \quad u_y = \left(y + \frac{x}{2}\right) \frac{z}{2} \times 10^{-3} \quad u_z = (x^2 + xy + y^2) \frac{1}{2} \times 10^{-3} \quad (95)$$

que se impone en los vértices de la parcela en ambas caras de la lámina. Los resultados obtenidos nuevamente son los correctos para ambas versiones del elemento, tanto en lo que se refiere a los desplazamientos que responden a la expresión (95) como las tensiones en los puntos de integración ( $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \pm 0,3849$  MPa y  $\sigma_{xy} = \pm 0,1155$  Mpa) en tanto que el grado de libertad interno resulta  $\alpha = 0,3333 \times 10^{-8}$ . El elemento por lo tanto satisface la prueba de la parcela flexional.

#### 4.2. Viga en voladizo con carga puntual

Este es un ejemplo que ha sido considerado por diversos autores [Simo et al. \(1990b\)](#); [Fontes Valente et al. \(2004\)](#); [Schwarze y Reese \(2011\)](#). Una viga en voladizo de longitud  $L = 10$  mm ancho  $B = 1$  mm y espesor  $t = 0,1$  mm está sometida a una carga normal  $F = 40$  N. Para el módulo de Young considerado  $E = 10^6$  Mpa se tiene un comportamiento de grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones. Usando distintos valores de relación de Poisson ( $\nu = 0,0$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\nu = 0,4999$ ) se puede evaluar si la metodología propuesta permite evitar respectivamente el bloqueo por corte transversal, el bloqueo debido al efecto Poisson y el bloqueo volumétrico.

En la Figura 4.a se ve la configuración original y deformada, la cual se obtiene en 10 pasos de carga iguales. La discretización incluye 16 elementos en la dirección longitudinal, uno en el ancho, uno en el espesor y dos puntos de integración. En la Figura 4.b se ha graficado el desplazamiento del punto de aplicación de la carga en función del factor de carga  $\lambda[0:1]$  para 5 valores de la relación de Poisson. El caso  $\nu = 0$  permite comparar con los resultados de referencia ( $u_z = 7,08$  mm) y evaluar si la cura propuesta para el corte transversal es adecuada. El resultado obtenido  $u_z = 7,06$  mm indica que efectivamente el elemento está libre de bloqueo por cortante. El segundo valor de relación de Poisson ( $\nu = 0,30$ ) permite determinar si el método EAS efectivamente evita el bloqueo por efecto Poisson. En este caso el desplazamiento calculado es  $u_z = 7,01$  mm que si bien no es exactamente el mismo que el anterior muestra que

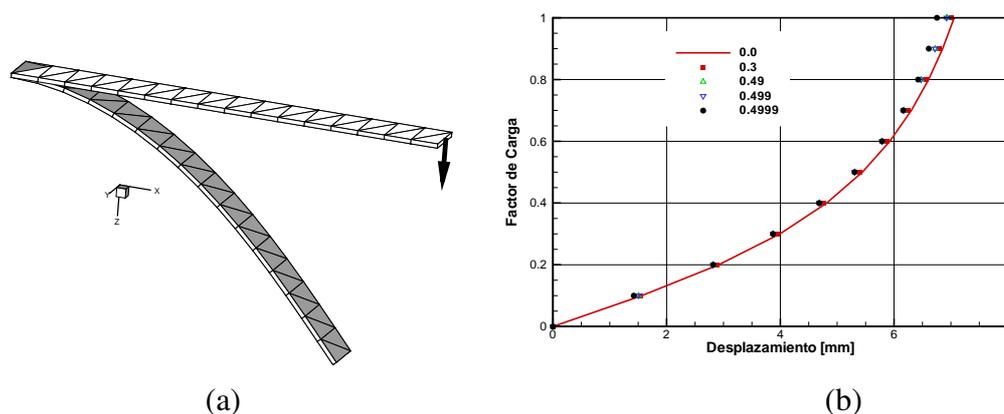


Figura 4: Viga en voladizo con carga puntual

la metodología propuesta permite razonablemente evitar el bloqueo debido al efecto Poisson obteniendo una adecuada gradación de las deformaciones transversales. Finalmente los últimos 3 valores de relación de Poisson (0,49, 0,499 y 0,4999) permiten observar si el deterioro del comportamiento del elemento es importante en el rango quasi-incompresible. Puede observarse que si bien las diferencias van creciendo con el coeficiente de Poisson estas son del orden del 4 % para la más alta de las relaciones de Poisson consideradas.

### 4.3. Semi-esfera incompleta con cargas puntuales

Este caso es un bien conocido problema de doble curvatura en el contexto de grandes desplazamientos elásticos. La Figura 5 se muestra el cuarto de la geometría considerada en base a condiciones de simetría. Éste es un problema básicamente inextensional donde el comportamiento membranar no es importante y que, debido a la doble curvatura, es importante el efecto Poisson en el espesor y el bloqueo por curvatura. Se han considerado dos mallas que incluyen 16 y 24 elementos por lado. La mas gruesa es usualmente utilizada para determinar si el elemento sufre de problemas de bloqueo debido a la curvatura inicial, i.e. si los resultados no difieren en más de un 5 % de los correctos se presume que el elemento no presenta dicho bloqueo. El radio de la superficie media es  $R = 10\text{mm}$ , y el espesor es  $t = 0,04\text{mm}$  ( $R/t = 250$ ). Las propiedades mecánicas son  $E = 6,825 \times 10^4\text{GPa}$  y  $\nu = 0,3$ .

La Figura 5 muestra a la derecha la configuración deformada para un desplazamiento entrante del 60 % del radio. En tanto que la Figura 6 se muestran los desplazamientos de los puntos

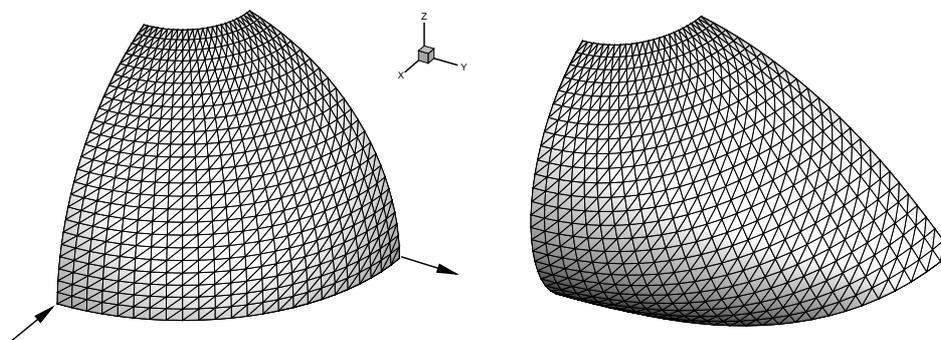


Figura 5: Esfera incompleta con cargas puntuales. Geometría original y deformada.

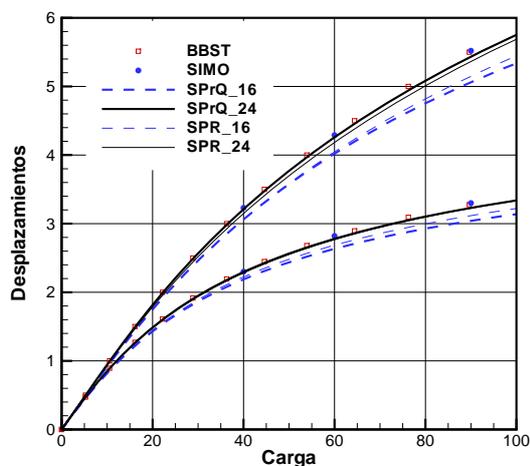


Figura 6: Esfera incompleta con cargas puntuales. Desplazamientos de los puntos cargados.

cargados, allí se incluyen resultados obtenidos con elementos de lámina de la Referencia [Simó et al. \(1990a\)](#) y resultados convergidos obtenidos con el elemento BBST con una malla de 32 elementos. El mayor de los desplazamientos corresponde a la carga entrante y tiene el signo cambiado. Del elemento propuesto se indican los desplazamientos obtenidos con ambas versiones del elemento propuesto. Puede notarse que la mejora al considerar la formulación membranar es muy pequeña en este caso. Los resultados obtenidos con la malla de 16 elementos por lado son un 8 % menores que los convergidos en contraste con los resultados presentados en la Referencia [Schwarze y Reese \(2011\)](#) donde con un elemento hexaédrico con integración reducida se obtienen muy buenos resultados con la misma densidad de malla. Por otro lado con la discretización de 24 elementos por lado se obtienen resultados acordes a lo esperado.

#### 4.4. Embutición de una lámina cuadrada

Como último ejemplo se ha considerado la embutición de una lámina delgada correspondiente a un “benchmark” de Numisheet’93 ([Makinouchi et al. \(1993\)](#)). En la Figura 7 se ve la geometría de las herramientas. La chapa original es cuadrada de 75 mm de lado.

Se han considerado condiciones de simetría según los ejes coordenados, por lo que se ha

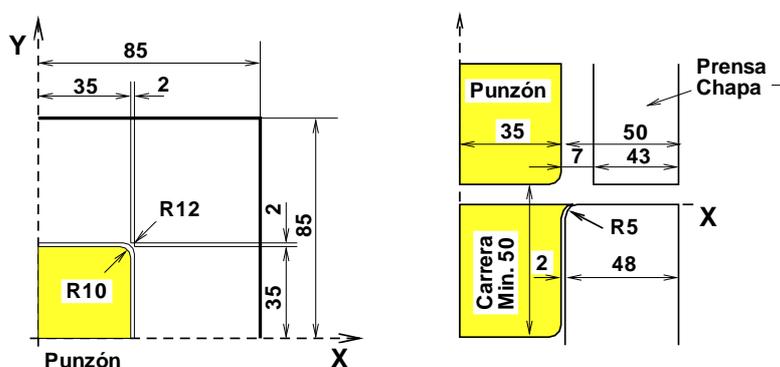


Figura 7: Geometría de las herramientas (dimensiones en mm) en el “benchmark” de Numisheet ’93

modelado sólo un cuarto de la geometría con una discretización en planta de 30 divisiones en cada dirección (1800 elementos en el plano). La fuerza sobre el pisador (prensa chapa) es de 19,6 kN y el coeficiente de fricción adoptado es  $\mu = 0,144$ . Se ha realizado una embutición de 40 mm (carrera del punzón).

En la Figura 8 se muestra la fuerza sobre el punzón en función del avance del mismo. Se han incluido para comparación los resultados obtenidos con el elemento de lámina triangular de 3 nudos **BBST** y también resultados obtenidos con el elemento de sólido **Prism** usando cuatro capas en el espesor. Del presente elemento sólo se incluyen los resultados obtenidos con la versión **SPrQ** ya que la versión sin la mejora en el comportamiento en el plano bloquea severamente debido al flujo plástico isócoro. En este último caso no sólo las fuerzas de embutición son incorrectas sino que en la parte final del proceso ocurre un aumento localizado espurio de las deformaciones plásticas efectivas. Las diferencias entre los distintos modelos son mínimas.

En la Figura 9 se muestra los contornos de deformación plástica efectiva para el presente elemento (centro) y para comparación los obtenidos con el sólido **Prism** usando 4 elementos en el espesor (izquierda) y con el modelo con elementos de lámina **BBST** (derecha). En el caso del elemento de lámina la zona de mayor deformación plástica es un poco menor y en los puntos de mayor engrosamiento (centro de los lados) la deformación plástica equivalente es mucho menor. Las diferencias entre el modelo de sólidos y sólido-lámina son muy pequeñas.

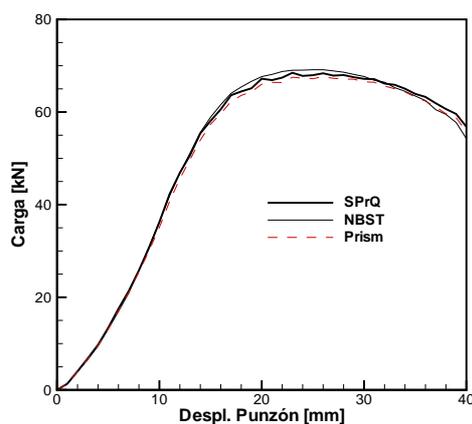


Figura 8: Fuerza en el punzón en función del avance del mismo.

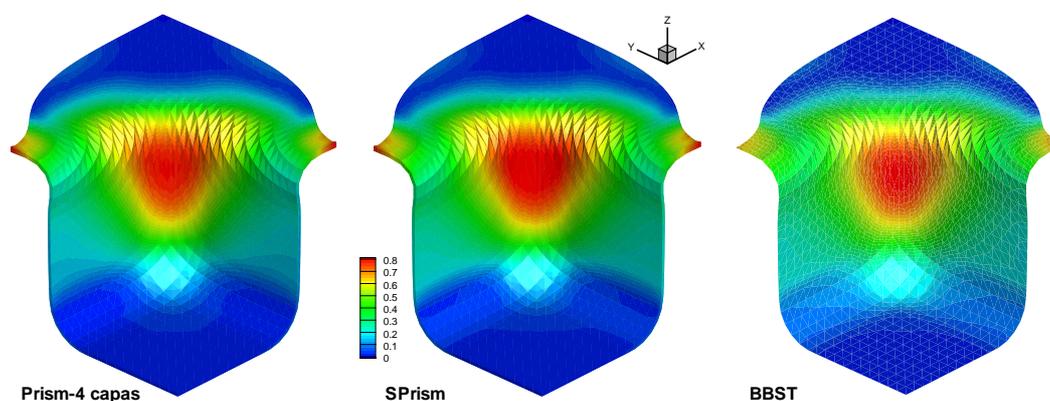


Figura 9: Deformación plástica equivalente para el máximo desplazamiento del punzón

## 5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha desarrollado un elemento de sólido-lámina de base triangular (prisma) adecuado para el análisis no lineal con grandes deformaciones elasto-plásticas. En la formulación se han utilizado técnicas de deformaciones naturales impuestas para evitar el bloqueo por corte transversal y de deformaciones impuestas para mejorar el comportamiento membranar. Para evitar el bloqueo por Poisson se ha recurrido a un esquema de deformaciones impuestas mejoradas con un único grado de libertad adicional. El bloqueo volumétrico se alivia como una combinación de la aproximación membranar y la transversal. La formulación es sencilla y permite efectivamente lograr el objetivo buscado. Las principales conclusiones son:

- El bloqueo por corte transversal desaparece completamente.
- La mejora en el comportamiento membranar es no sólo importante en problemas dominados por el comportamiento membranar (embutición por ej.) si no que resulta crucial para aliviar el bloqueo volumétrico.
- La formulación EAS para la deformación transversal evita el bloqueo por efecto Poisson y alivia el bloqueo volumétrico en problemas cuasi-incompresibles.
- En problemas explícitos una iteración local en el cálculo del grado de libertad interno parece suficiente para obtener resultados confiables. Aún en problemas elasto-plástico en uso de  $D_{33}$  elástico conduce a buenos resultados.
- En superficies de doble curvatura el elemento converge a los resultados correctos pero no con la misma velocidad que lo hacen los elementos hexaédricos con integración reducida.
- El elemento funciona correctamente en problemas con grandes deformaciones elasto-plásticas.

## AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo financiero de CONICET (Argentina) y de la SeCyT-UNC.

## REFERENCIAS

- Bassa B., Sabourin F., y Brunet M. A new nine-node solid-shell finite element using complete 3d constitutive laws. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92, 2013.
- Cardoso R., Yoon J., Mahardika M., Choudhry S., Alves de Sousa R., y Fontes Valente R. Enhanced assumed strain (eas) and assumed natural strain (ans) methods for one-point quadrature solid-shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75:156–187, 2008.
- Crisfield M. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures II: Advanced Topics*. John Wiley and Sons, 1997.
- Dvorkin E. y Bathe K. A continuum based four-node shell element for general nonlinear analysis. *Engineering Computations*, 1:77–88, 1984.
- Flores F. Development of a non-linear triangular prism solid-shell element using ans and eas techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 266:81–97, 2013a.
- Flores F. A 'prism' solid element for large strain shell analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 253:274–296, 2013b.

- Flores F. y Oñate E. A basic thin shell triangle with only translational dofs for large strain plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:57–93, 2001.
- Flores F. y Oñate E. Improvements in the membrane behaviour of the three node rotation-free shell triangle using an assumed strain approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:907–932, 2005.
- Flores F. y Oñate E. A rotation-free shell triangle for the analysis of kinked and branching shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69:1521–1551, 2007.
- Fontes Valente R., Alves de Sousa R., y Natal J. An enhanced strain 3d element for large deformation elastoplastic thin-shell applications. *Computational Mechanics*, 34:38–52, 2004.
- Hauptmann R. y Schweizerhof K. A systematic development of solid-shell element formulations for linear and nonlinear analyses employing only displacement degrees of freedom. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42:49–70, 1998.
- Makinouchi A., Nakamachi E., Oñate E., y Wagoner R. *Proceedings of the International Conference NUMISHEET'93*. 1993.
- Nagtegaal J., Parks D., y Rice J. On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 4:153–177, 1974.
- Oñate E., Zienkiewicz O., Suárez B., y Taylor R. A methodology for deriving shear constrained reissner-mindlin plate elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:345–367, 1992.
- Schwarze M. y Reese S. A reduced integration solid-shell finite element based on the eas and the ans concept. geometrically linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80:1322–1355, 2009.
- Schwarze M. y Reese S. A reduced integration solid-shell finite element based on the eas and the ans concept—large deformation problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85:289–329, 2011.
- Schwarze M., Vladimirov I., y Reese S. Sheet metal forming and springback simulation by means of a new reduced integration solid-shell finite element technology. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200:454–476, 2011.
- Simo J., Armero F., y Taylor R. Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3d finite deformation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 110:359–386, 1993.
- Simo J., Fox D., y Rifai M. On a stress resultant geometrically exact shell model. part iii: Computational aspects of the non-linear theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 79:21–70, 1990a.
- Simo J., Rifai M., y Fox D. On a stress resultant geometrically exact shell model. part iv: variable thickness shells with through-the-thickness stretching. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 81:91–126, 1990b.
- Vu-Quoc L. y Tan X. Optimal solid shells for non-linear analyses of multilayer composites. i. statics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:975–1016, 2003.
- Zárate F., Oñate E., y Flores F. A simple triangular element for thick and thin plate and shell analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:2569–2582, 1994.
- Zienkiewicz O. y Taylor R. *The finite element method. Vol II: Solid Mechanics*. Butterworth heinemann, 2000.