

APLICACIÓN DE UN MODELO DE FISURACIÓN COHESIVA AL ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD DE FISURAS EN PRESAS DE HORMIGÓN FRENTE A LA ACCIÓN DE PRESIONES INTERNAS

María Paula Zappitelli^a, E. Ignacio Villa^a, José Fernández-Sáez^b y Claudio G. Rocco^a

^a*Departamento de Construcciones, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Calle 48 y 115 s/n, (B1900TAG) La Plata, Buenos Aires, Argentina, paulazappitelli@hotmail.com*

^b*Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de las Estructuras, Universidad Carlos III de Madrid, Av. de la Universidad 30. 29811, Leganés, Madrid, España*

Palabras Clave: Modelo de Fisuración Cohesiva, Presas de hormigón, Presiones de inyección.

Resumen. Durante los trabajos de reparación de presas de hormigón de gravedad con resinas epoxi pueden emplearse presiones de inyección significativas. Es importante diseñar adecuadamente el proceso de inyección y el máximo valor que la misma pueda alcanzar para evitar que la fisura se propague durante los trabajos de reparación. Estas presiones actúan perpendicularmente al plano de la fisura y generan un estado tensional que tiende a que la fisura crezca. Si el valor de la tensión supera la resistencia a tracción del material, puede producirse la propagación de la fisura.

Este trabajo presenta los resultados de un análisis numérico realizado para estudiar el comportamiento en fractura de una presa de hormigón ante la presencia de una fisura de origen térmico. Se llevó a cabo un análisis numérico usando el Método de los Elementos Finitos (MEF) y un Modelo de Fisuración Cohesiva (MFC). Las geometrías adoptadas reproducen un patrón potencial de fisuración debido a efectos térmicos como resultado del calor liberado durante la hidratación del cemento. Este tipo de fisuras suelen localizarse cerca de la sección central de la presa causando un plano vertical de fisuración, el cual comienza en el paramento aguas arriba y se propaga perpendicularmente al mismo. Incluso cuando su presencia no compromete la integridad estructural, estas fisuras pueden afectar el funcionamiento en servicio de las presas debido a la generación de filtraciones de agua. Se ha realizado un estudio paramétrico correspondientes a 3 fisuras, con la misma morfología y diferente tamaño, variando la relación entre la altura de la fisura y la altura total de la presa, y su ancho en relación al ancho total de la misma. La distribución real de presiones de inyección debida al proceso de inyección fue simplificada a través de la aplicación de cargas concentradas. Los resultados pueden aplicarse a la estimación de la estabilidad de fisuras pre-existentes debido a la acción de presiones internas, las cuales aparecen durante los trabajos de sellado de fisuras con resinas a presión.

1. INTRODUCCIÓN

Como consecuencia de los gradientes de masa y superficie resultantes del proceso de hidratación del cemento es común que en las presas de hormigón aparezcan fisuras de origen térmico. Los mencionados gradientes de masa se originan como resultados de los cambios volumétricos que experimenta el hormigón debido a los gradientes térmicos generados como consecuencia del importante volumen de calor liberado durante la hidratación del cemento y su posterior enfriamiento.

Las fisuras de origen térmico pueden no comprometer la capacidad resistente de la estructura, pero sí afectar la durabilidad de la misma, ya que permiten la filtración de agua, [ACI \(2001\)](#).

Para poder dar solución a este tipo de patología suele ser habitual sellar las fisuras utilizando una resina de base epoxi o poliuretano inyectada a presión. Al realizar este tipo de intervención es muy importante diseñar la secuencia y las presiones de inyección de modo tal que la fisura permanezca estable y no se genere su propagación a causa del propio procedimiento de inyección, [ICOLD \(1997\)](#); [Villa et al. \(2011\)](#); [Rocco et al. \(2011\)](#).

En este trabajo se presentan los resultados del estudio numérico tridimensional de la estabilidad de fisuras de origen térmico sometidas a un procedimiento de inyección. Se utiliza el Método de los Elementos Finitos adoptando un criterio de segundo orden mediante el empleo del Modelo de Fisuración Cohesiva.

En la sección 2 se presenta un resumen del Modelo de Fisuración Cohesiva y en la sección 3 se describen las características del modelo numérico empleado.

En la sección 4 se muestran y analizan los resultados obtenidos y finalmente, en la sección 5, se presentan las conclusiones más importantes del trabajo.

2. MODELO DE FISURACIÓN COHESIVA

Como en todos los materiales con comportamiento cuasi-frágil, en el hormigón la tenacidad proviene de la fisuración subcrítica que precede a la rotura. Este daño subcrítico origina una respuesta tensión-deformación fuertemente no lineal en el material.

En la Figura 1 se muestra esquemáticamente la zona en proceso de fractura (ZPF) que se desarrolla en el frente de las fisuras macroscópicas. Como puede observarse entre éstas y las microfisuras aparece una zona puente como resultado de la débil interfase existente entre los agregados y la matriz, [Anderson \(1995\)](#).

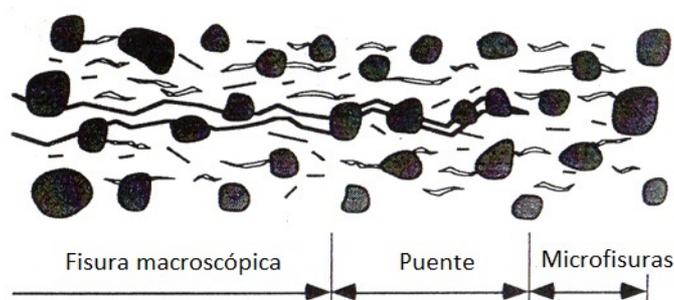


Figura 1: Crecimiento de una fisura en el hormigón, [Anderson \(1995\)](#)

Si se analiza la respuesta en tracción del hormigón se observa que luego de un pequeño grado de no linealidad causado por microfisuración, el material alcanza su resistencia a tracción, f'_t . A partir de ese momento el daño subsecuente se concentra en la zona local de fractura, dando

lugar a lo que se denomina ablandamiento del material. Prácticamente todos los desplazamientos que siguen a la tensión máxima se deben a la zona dañada, [Anderson \(1995\)](#).

Uno de los modelos utilizados para describir este comportamiento en el hormigón es el modelo de fisuración cohesiva (MFC). El empleo de una zona cohesiva para describir los procesos no lineales próximos a la punta de una fisura se remonta a los trabajos de [Dugdale \(1960\)](#) y [Barenblatt \(1962\)](#). El primero de ellos analizó el comportamiento plástico en láminas de acero con hendiduras proponiendo la existencia de una zona cohesiva, ver [Figura 2 \(b\)](#) mientras que el segundo introdujo el concepto de zona cohesiva para simular las fuerzas interatómicas en un sólido frágil, ver [Figura 2 \(a\)](#).

El concepto de zona cohesiva puede extenderse a otros tipos de comportamiento no lineal en el que aparece una “cuasi-grieta” cosida por fuerzas transmitidas entre sus caras, ya sea por puentes intergranulares, por fibras, por fricción entre áridos o por existencia de grietas solapadas, ver [Figura 2 \(c\) a \(f\)](#), de los cuales los últimos dos son mecanismos que aparecen en el hormigón.

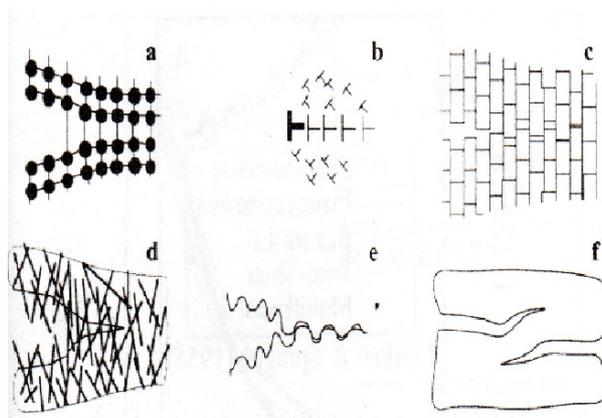


Figura 2: Varias posibilidades físicas de fisuras cohesivas: (a) fuerzas interatómicas, (b) línea plástica (línea de dislocaciones), (c) puentes entre granos, (d) cosido por fibras, (e) fricción entre áridos, y (f) solapamiento de fisuras, [Planas et al. \(1995\)](#)

El salto cualitativo en este tipo de modelos se produce cuando [Hillerborg et al. \(1976\)](#) extienden el modelo para representar no sólo el comportamiento en la punta de una grieta preexistente sino en cualquier punto del sólido macroscópicamente continuo y sin grietas. En este punto conviene insistir en que el modelo es macroscópico: todas las irregularidades microestructurales (como granos, fisuras, microgrietas y rugosidades de las caras de la grieta) deben ser suavizadas (homogeneizadas), [Planas \(2000\)](#).

Como se mencionó anteriormente, en el MFC la zona dañada se representa mediante una fisura ficticia entre cuyas caras se pueden transmitir tensiones, la magnitud de las mismas viene dada por la separación entre las mismas. La relación entre tensión y separación se materializa a través de la curva o función de ablandamiento. Esta función es una propiedad del material y uno de los parámetros fundamentales del modelo, se define de manera que la tensión decrece desde un valor inicial igual a la resistencia a tracción del material, f'_t , hasta anularse cuando la apertura alcanza un valor crítico u_c , momento en que se genera una fisura real que constituye una discontinuidad del material, ver [Figura 3](#). El área encerrada debajo de la curva de ablandamiento es la energía específica de fractura, G_F , la cual representa el trabajo externo necesario para generar una superficie fisurada de área unitaria. La función de ablandamiento puede adoptar distintas formas, lineal, bilineal o exponencial, como se observa en la [Figura 4](#).

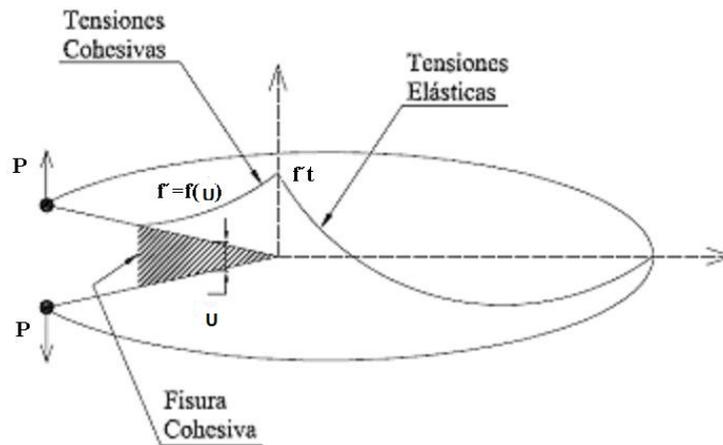


Figura 3: Fisura cohesiva contenida en un sólido bidimensional

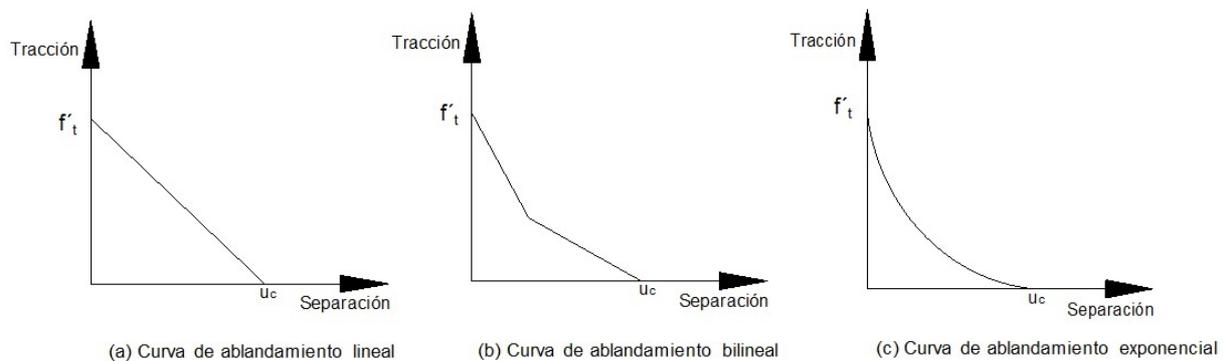


Figura 4: Distintos tipos de funciones de ablandamiento: (a)Lineal, (b)Bilineal y (c)Exponencial

3. DESCRIPCIÓN DEL MODELO NUMÉRICO

3.1. Generalidades

Para el estudio de la estabilidad de fisuras se realizó un modelo tridimensional de un módulo tipo de presa de hormigón mediante la utilización de un código comercial de probada eficiencia para resolver esta clase de problemas ABAQUS V6.11. La geometría y las dimensiones de la presa fueron tomadas de las recomendaciones del [USACE \(1995\)](#) y pueden observarse en la Figura 5.

Para poder implementar el MFC en un código de elementos finitos es necesario emplear dos tipos de elementos: elementos cohesivos (COH3D8 y COH3D6) en la zona cohesiva y elementos lineales de integración completa (C3D8 y C3D6) en la zona no cohesiva. Es importante destacar que si se utiliza un orden de integración inferior al completo para formulaciones basadas en desplazamientos o formulaciones mixtas, en general el análisis no es confiable, por ello a menos que la formulación del elemento haya sido lo suficientemente testada en cuanto a su convergencia y estabilidad no se recomienda en general el uso de elementos de integración reducida, [Bathe \(1996\)](#).

Se debe mencionar que al trabajar con elementos cohesivos es necesario determinar cuál es el tamaño máximo de elemento a emplear para asegurar un buen funcionamiento de los mismos.

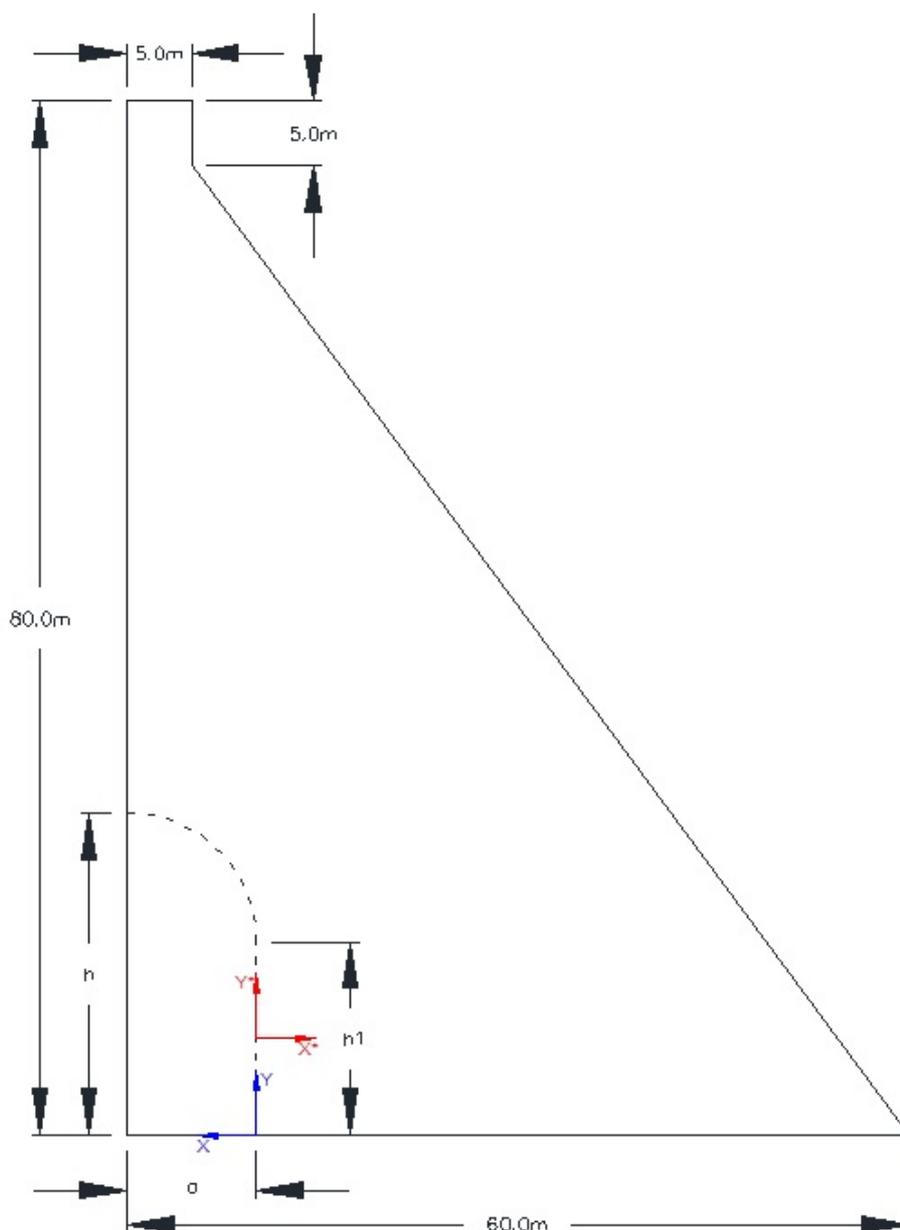


Figura 5: Perfil de la presa y morfología de la fisura

Éste se calcula mediante la siguiente expresión, Bazant y Planas (1998)

$$e = 0,08 * L_{ch} \quad (1)$$

en la cual L_{ch} es la longitud característica del material y se determina según se indica en la expresión

$$L_{ch} = EG_F / (f'_t)^2 \quad (2)$$

Donde E representa el módulo de elasticidad del material, G_F la energía específica de fractura y f'_t la resistencia a tracción.

Para el presente trabajo se obtuvo que el tamaño máximo de los elementos cohesivos debía

ser de 50mm, los valores de los parámetros utilizados para calcularlo se detallan en la Tabla 1.

Los elementos cohesivos se colocaron en una faja de 2m de ancho ubicada en dirección aguas abajo del frente de la fisura. En la Figura 6 se observa la malla de elementos finitos utilizada para uno de los casos estudiados y el detalle de la faja de elementos cohesivos.

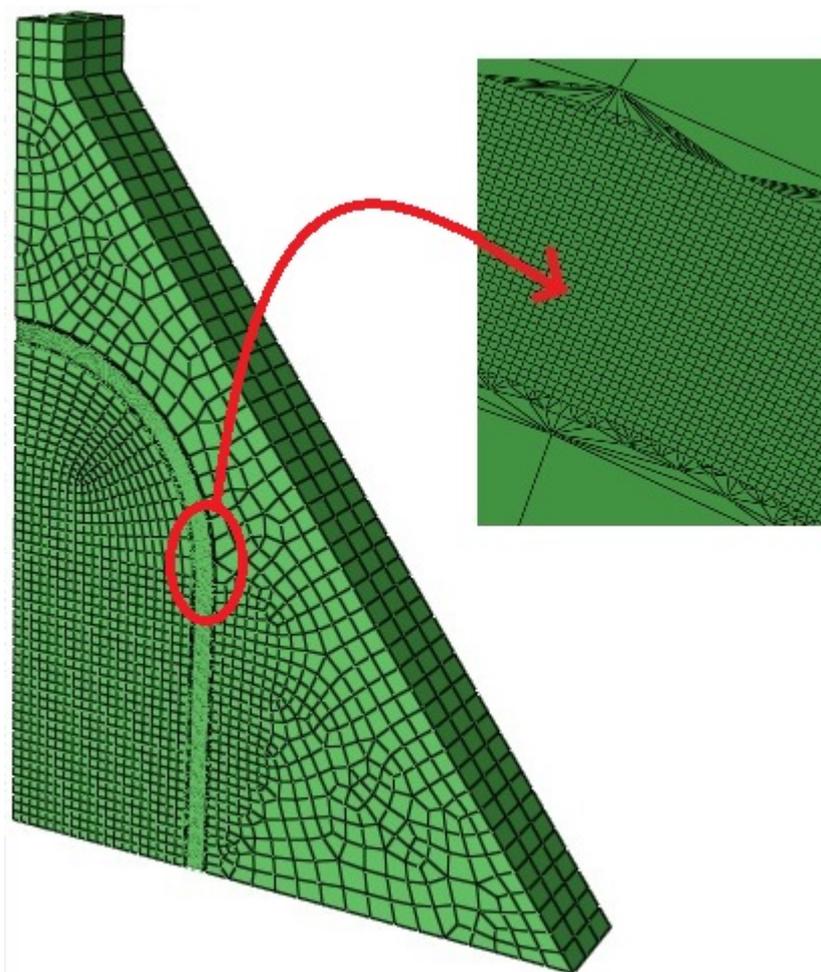


Figura 6: Malla de la presa y detalle de la faja de elementos cohesivos

En cuanto a las condiciones de contorno, por simplicidad se consideró que la fisura se encontraba contenida en el plano medio del módulo de la presa, por lo que se emplearon condiciones de simetría y se modeló la mitad de la geometría.

Para representar un comportamiento simétrico en los elementos cohesivos no es suficiente con introducir condiciones de simetría, debe incluirse también el efecto de la rigidez lateral mediante la utilización de equation constraints, [ABAQUS \(2009\)](#); ésta es una herramienta disponible en [ABAQUS \(2011\)](#) que asegura que los nodos de las caras superior e inferior de los elementos cohesivos no se desplacen en forma relativa en las direcciones perpendiculares a la dirección de apertura del elemento. La base de la presa se encuentra empotrada.

Para estos modelos se adoptó una función de ablandamiento de tipo lineal como la que presenta en la Figura 4 (a), con una apertura crítica, u_c igual a 0.075mm.

En la Tabla 1 se presentan las propiedades del hormigón considerado.

Antes del inicio del daño se asume un comportamiento elástico lineal en el elemento cohesivo, este comportamiento se escribe en términos de una matriz constitutiva elástica, \mathbf{K} , la cual

relaciona las tensiones nominales con las deformaciones nominales a través de la interface, como se indica en la siguiente expresión, [ABAQUS \(2011\)](#)

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_n \\ t_s \\ t_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{nn} & K_{ns} & K_{nt} \\ K_{sn} & K_{ss} & K_{st} \\ K_{tn} & K_{ts} & K_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_s \\ \epsilon_t \end{bmatrix} = \boldsymbol{\epsilon} \quad (3)$$

Las tensiones nominales se definen como las componentes de las fuerzas divididas por el área original en cada punto de integración, t_n es la tensión normal y t_s y t_t las tensiones de corte.

Las deformaciones nominales se definen como las aperturas divididas por el espesor original en cada punto de integración. Como el espesor utilizado es unitario, las deformaciones nominales son iguales a las aperturas. ϵ_n representa la deformación normal y ϵ_s y ϵ_t las deformaciones por corte.

En este modelo se considera que el comportamiento entre tensiones normales y tensiones de corte es desacoplado, por lo que la matriz \mathbf{K} tiene elementos no nulos sólo en la diagonal, [ABAQUS \(2011\)](#)

Para adoptar un valor para los elementos de la matriz \mathbf{K} se debe considerar que aunque la flexibilidad del elemento cohesivo puede contribuir a la deformación global de la estructura, su único propósito es simular el proceso de fisuración. Si la contribución de dicho elemento a la deformación global no es lo suficientemente pequeña comparada con la deformación provocada por el material constitutivo, no se asegura una conexión rígida entre las dos caras de la estructura vinculadas con los elementos cohesivos antes de que comience el proceso de fisuración. Sin embargo valores muy grandes de los elementos de la matriz \mathbf{K} pueden causar problemas numéricos, como oscilaciones espurias de las tensiones. Por este motivo deben utilizarse valores de los elementos de \mathbf{K} lo suficientemente grandes como para proveer una rigidez razonable y lo suficientemente pequeños como para no generar problemas numéricos, [Turón et al. \(2007\)](#); [ABAQUS \(2011\)](#). Para este trabajo se consideró que los valores de K_{nn} , K_{ss} y K_{tt} eran los mismos e iguales a 10 veces el módulo de elasticidad del material (270000 N/mm).

Parámetros del hormigón	
Módulo de elasticidad, E	27 GPa
Resistencia a tracción, f'_t	1.6 MPa
Energía de fractura, G_F	0.06 Nmm/mm ²
Coefficiente de Poisson	0.3

Tabla 1: Propiedades mecánicas del hormigón

3.2. Casos estudiados

Se estudiaron tres tamaños de fisuras, cuyas dimensiones se presentan en la Tabla 2, en la Figura 5 se indica qué representa cada una de dichas dimensiones.

Para cada tamaño de fisura propuesto se consideraron dos estados de carga para una presión de inyección de 10MPa. El primero consistió en la aplicación de dicha presión a lo largo del frente de la fisura a una distancia de 1.2m del mismo. El segundo estado de carga consideró la

Caso	h [m]	h1 [m]	a [m]
1	12.5	7.5	5
3	25	15	10
5	50	30	20

Tabla 2: Parámetros geométricos de las fisuras

aplicación de presiones de inyección a una altura entre 3m y 15m, medidos respecto de la base de la presa, alejando la carga del frente de la fisura a razón de aproximadamente 1m, estando la carga más cercana a 1.2m del frente y la más alejada a 5m, 9m y 7m, para los casos 1, 3 y 5 respectivamente.

Se adoptaron dos hipótesis, aplicación de la carga con acumulación de daño y sin acumulación de daño; la primera de ellas se refiere a que una vez que termina de actuar una presión en un punto comienza a actuar la siguiente presión considerando el efecto provocado sobre el modelo debido a la presión previamente aplicada, por el contrario la segunda hipótesis considera que luego de culminada la acción de una de las presiones la siguiente actuará sobre el modelo original.

En cada punto de inyección se consideró una distribución de presión en forma radial según una ley logarítmica con valor máximo en el punto de inyección y valor cero a una distancia igual al radio de inyección. Este radio se adoptó igual a la distancia media entre el punto de inyección y los puntos de inyección colindantes, [Villa et al. \(2011\)](#).

4. RESULTADOS

A continuación se presenta los resultados correspondientes al estudio de la evolución de la zona dañada para las distintas configuraciones de fisuras y estados de carga propuestos, para los cuales se varió la posición de los puntos de inyección, tanto respecto al plano de fundación como al frente de la fisura.

La región marcada en color rojo en la Figura 7 muestra, para la fisura del caso 1, la extensión que alcanza la zona cohesiva para la presión de inyección actuante, considerando el estado de carga correspondiente a presiones de inyección aplicadas a lo largo del frente de la fisura en forma no simultánea a 1.2m del mismo con acumulación de daño. La zona cohesiva se define como la zona en que el material se encuentra en condición de ablandamiento parcial o total.

En la Figura 8 se compara para los tres casos analizados la extensión de la zona cohesiva para el estado de carga indicado anteriormente.

Se puede observar que en los tres casos la extensión de la zona cohesiva alcanza un valor máximo el cual se mantiene en el intervalo correspondiente con la configuración recta de la geometría de la fisura para los casos 1 y 5, y con la configuración curva de dicha geometría para el caso 3, luego dicho valor decrece.

También se observa que el intervalo de alturas en el que se mantiene el valor máximo de la mencionada zona cohesiva es mayor cuanto más alta es la fisura, lo mismo sucede con la longitud del intervalo de decrecimiento de dicho valor.

Las imágenes de la Figura 9 muestran, para una presión de 10MPa aplicada a 5m respecto del plano de fundación, cómo se reduce la extensión de la zona cohesiva a medida que el punto de aplicación de la carga se aleja del frente de la fisura hacia aguas arriba, lo cual puede vincularse

a la poca profundidad que alcanza la misma cuando la presión de inyección se encuentra en la posición más cercana al frente de la fisura.

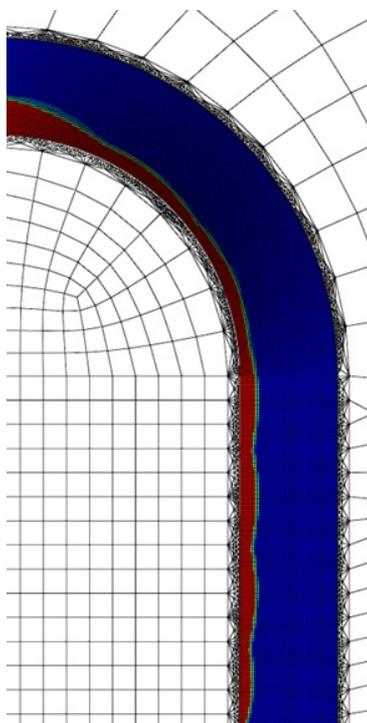


Figura 7: Profundidad de la zona cohesiva para presiones aplicadas a lo largo del frente de la fisura. Caso 1

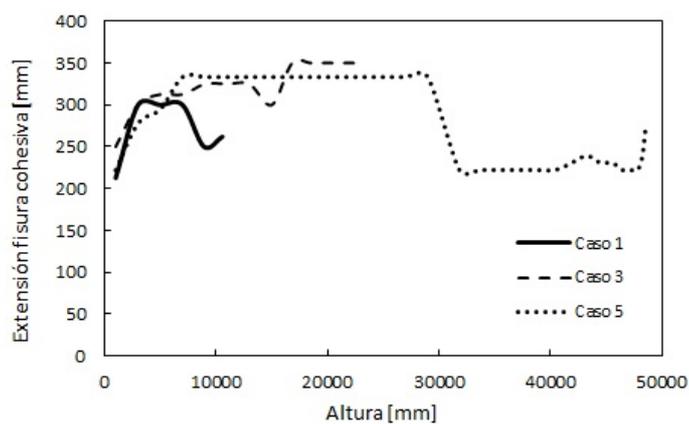


Figura 8: Profundidad de la zona cohesiva para puntos a distinta altura respecto del plano de fundación. Casos 1, 3 y 5

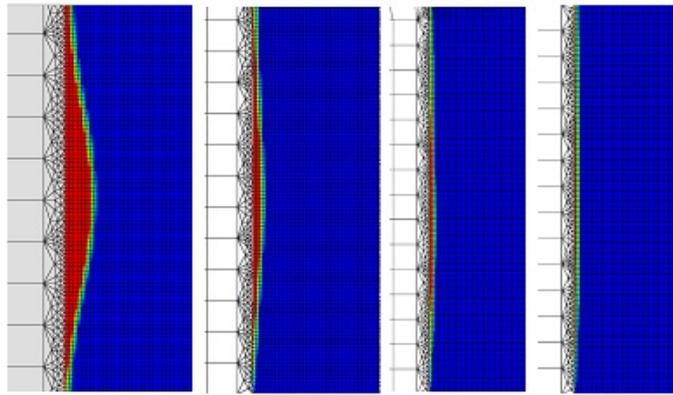


Figura 9: Extensión de la zona cohesiva para 10MPa de presión aplicada a 1.2m, 2.15m, 3.1m y 4.05m del frente de la fisura

En las Figuras 10, 11 y 12 se presenta la variación de la apertura relativa de la fisura (U_{max}/U_c), respecto de la posición relativa de la carga al frente de la misma (X/a , donde a es el ancho de la fisura) para los casos 1, 3 y 5 para presiones de inyección ubicadas en una horizontal a 3m, 7m y 15m respectivamente, medidos desde la base de la presa. La adopción de una cota determinada para la aplicación de las presiones de inyección consideradas en el presente trabajo se determina a partir de los resultados publicados en Rocco et al. (2011). El parámetro U_{max} representa la apertura de la fisura en el punto de máxima apertura, y el parámetro U_c la apertura crítica de la fisura. El hecho de que las mayores aperturas relativas ocurran para las cargas más cercanas al frente de la fisura origina que los valores de las mismas alcanzados bajo la hipótesis con acumulación de daño sean mayores que los correspondientes a la hipótesis sin acumulación de daño.

En las Figuras 13 y 14 se compara para los tres casos estudiados la apertura relativa de la fisura respecto de la posición relativa de la carga, considerando las dos hipótesis analizadas. En las mencionadas figuras se observa que las aperturas relativas para ambas hipótesis son similares para los casos 3 y 5, y alcanzan valores máximos cuando las cargas se ubican en las cercanías del frente de la fisura.

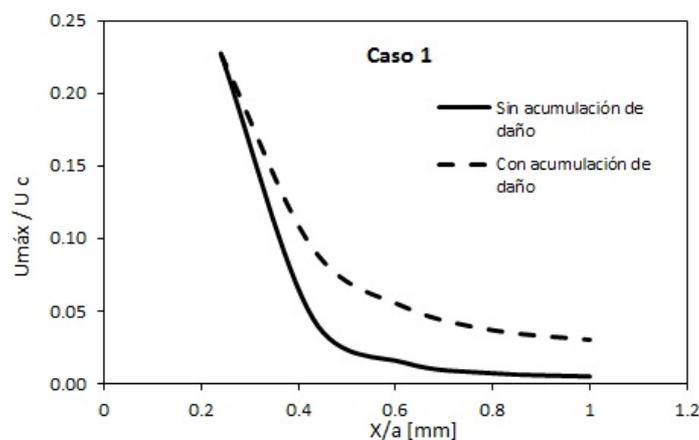


Figura 10: Variación de la apertura relativa de la fisura respecto de la posición relativa de la carga aplicada, para las hipótesis con acumulación y sin acumulación de daño. Caso 1

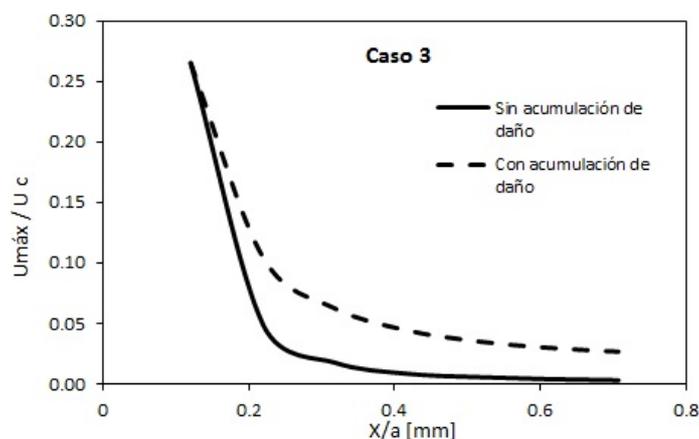


Figura 11: Variación de la apertura relativa de la fisura respecto de la posición relativa de la carga aplicada, para las hipótesis con acumulación y sin acumulación de daño. Caso 3

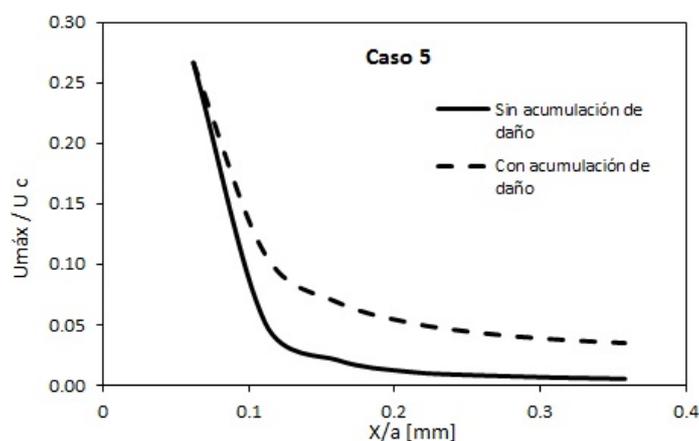


Figura 12: Variación de la apertura relativa de la fisura respecto de la posición relativa de la carga aplicada, para las hipótesis con acumulación y sin acumulación de daño. Caso 5

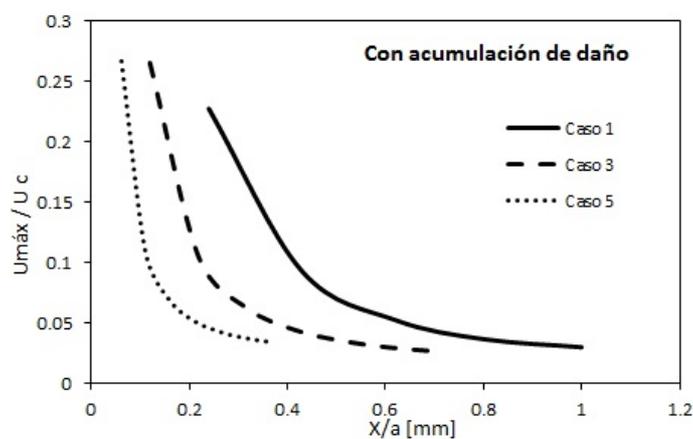


Figura 13: Variación de la apertura relativa de la fisura a lo largo del frente de la misma. Casos 1, 3 y 5. Hipótesis con acumulación de daño.

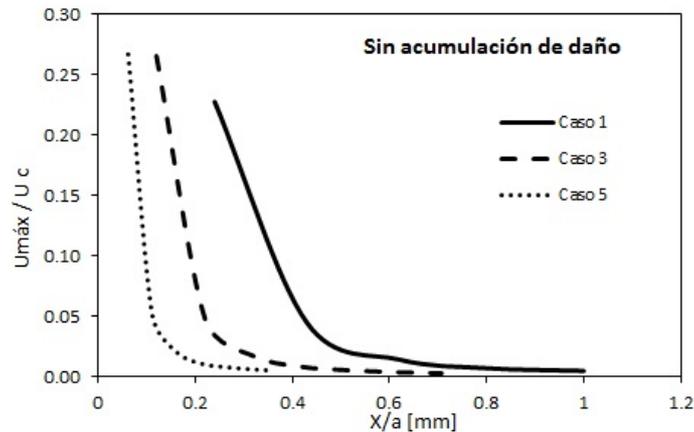


Figura 14: Variación de la apertura relativa de la fisura a lo largo del frente de la misma. Casos 1, 3 y 5. Hipótesis sin acumulación de daño.

En la Figura 15 se presenta para los casos 1, 3 y 5 la profundidad de la zona dañada, determinada a través de la relación U/U_c , en relación de la distancia X^* , la cual se mide respecto del frente de la fisura, como se indica en la Figura 5. El valor U representa aperturas y U_c apertura crítica, como se mencionó anteriormente.

En cuanto al estado de carga se utilizó una presión de inyección ubicada a 1.2m del frente de la fisura y a 3m, 7m y 15m de altura medidos a partir de la base de la presa. La hipótesis considerada fue sin acumulación de daño.

Finalmente en la Figura 16 se observa la configuración y extensión de la zona dañada para los casos analizados, indicada a través de la coordenada Y^* , la cual se mide a partir de los 3m, 7m o 15m respecto del plano de fundación, según se trate de los casos 1, 3 o 5, respectivamente (ver Figura 5). La hipótesis utilizada fue sin acumulación de daño.

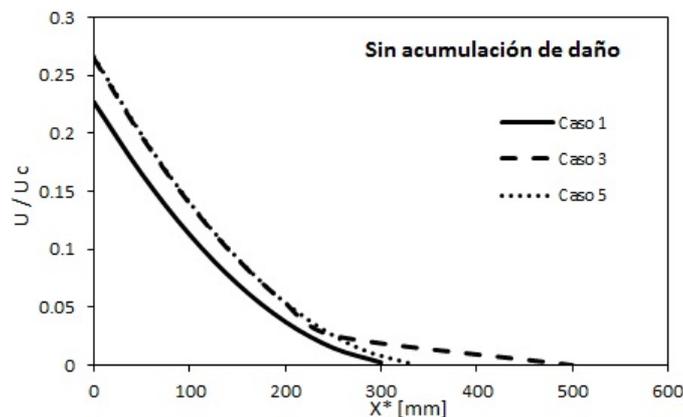


Figura 15: Variación de la apertura relativa de la fisura dentro de la zona cohesiva para presiones de inyección aplicadas a 1.2m del frente de la fisura. Casos 1, 3 y 5. Hipótesis sin acumulación de daño.

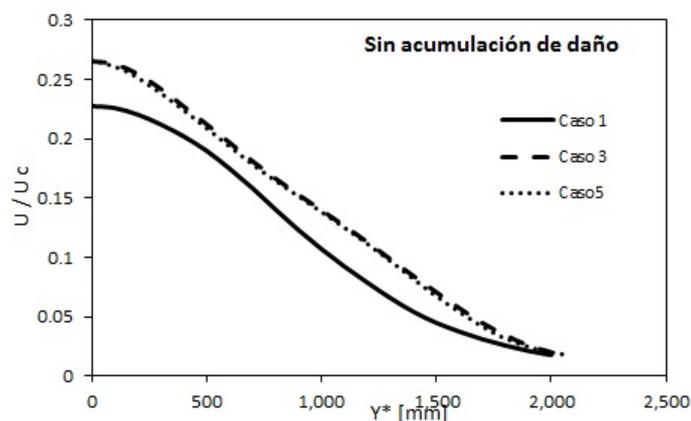


Figura 16: Variación de la apertura relativa de la fisura a lo largo del frente de la misma para presiones de inyección aplicadas a 1.2m del frente de la fisura. Casos 1,3 y 5. Hipótesis sin acumulación de daño.

5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se presentan los resultados correspondientes a una simulación numérica tridimensional del estudio comparativo de la estabilidad de fisuras de geometría semejante en presas de hormigón, sometidas a la acción de presiones de inyección, implementando un modelo de fisura cohesiva.

Se aplicó una presión de 10MPa a 1.2m del frente de la fisura, en dirección horizontal en puntos ubicados entre 1.2m y 9m, medidos respecto de dicho frente, y en dirección vertical en puntos separados 2m a lo largo del frente de la fisura. Se consideró que las presiones se distribuían según una ley logarítmica con un radio de acción igual a la distancia entre puntos de inyección colindantes.

A partir de los resultados obtenidos, válidos para la geometrías de presa y fisuras analizadas, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- * El modelo demostró ser una herramienta útil para poder estimar y predecir el nivel de propagación del daño que se genera en el frente de una fisura preexistente cuando la misma es sometida a presiones de inyección.
- * En cualquiera de los casos analizados, para puntos de inyección a 1m del frente de la fisura se produce el crecimiento de la misma en forma localizada. A su vez para una determinada relación alto/ancho de fisura (h/a), se alcanzan valores determinados de h y a para los cuales no se incrementa la longitud de la zona de propagación (casos 3 y 5).
- * La extensión de la zona dañada se reduce a medida que nos alejamos del punto de aplicación de la carga. A su vez la configuración de dicha zona no varía al alcanzar determinados valores de h y a , para una determinada relación alto/ancho de fisura (h/a).
- * Las mayores extensiones de la zona cohesiva para cargas aplicadas a lo largo del frente de la fisura ocurren en la zona correspondiente con la parte recta de la geometría de la misma para los casos 1 y 5, y con la parte curva para el caso 3.
- * Cuando los puntos de inyección se encuentran a más de 2m del frente de la fisura ésta se mantiene prácticamente estable, mostrando una extensión de la zona cohesiva despreciable a los efectos prácticos.

REFERENCIAS

- ABAQUS. *Modeling Fracture and Failure with Abaqus. Crack Growth in a Helicopter Airframe Component using Cohesive Elements*. Dassault Systèmes, 2009.
- ABAQUS. *User's Manual Version 6.11*. Dassault Systèmes Simulia Corp., 2011.
- ACI. Control of cracking in concrete structures (ACI 224R-01). *American Concrete Institute, Farmington Hills, MI*, 2001.
- Anderson T.L. *Fracture Mechanics, Fundamentals and Applications*. CRC Press LLC, 1995.
- Barenblatt G.I. The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech*, 7:55–129, 1962.
- Bathe K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- Bazant Z.P. y Planas J. Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle structures. *CRC Press LLC*, 1998.
- Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 8:100–108, 1960.
- Hillerborg A., Modèr M., y Petersson P.E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement Concrete Res.*, 6:773–782, 1976.
- ICOLD. Concrete dams-control and treatment of cracks, review and case histories. *Bulletin N°107*, 1997.
- Planas J. Fractura de hormigón y fisura cohesiva. *Anales de Mecánica de la Fractura* 17, 17:267–274, 2000.
- Planas J., Elices M., y Guinea G.V. "The extended cohesive crack". In *Fracture of Brittle Disordered materials: Concrete, Rock and Ceramics*. G. Bakker and B. L. Karihaloo, eds., 1995.
- Rocco C., Braun M., Zappitelli M., y Villa E. Estabilidad de fisuras en presas de hormigón frente a la acción de presiones internas. *Mecánica Computacional*, XXX:127–139, 2011.
- Turón A., Dávila C., Camanho P., y Costa J. An engineering solution for mesh size effects in the simulation of delamination using cohesive zone models. *Engineering Fracture Mechanics* 74, 74:1665–1682, 2007.
- USACE. Gravity dam design, engineering and design. 1995.
- Villa E., Braun M., Zappitelli M., Vaquero Hernández A., y Rocco C. Simulación numérica del proceso de inyección de fisuras en presas de hormigón. *Anales de Mecánica de la Fractura* 28, 2:625–630, 2011.