

TÉCNICAS PARA DEFINIR LA CINEMÁTICA DE MALLAS ADAPTABLES A DOMINIOS CON FRONTERAS MÓVILES

Ezequiel J. López^{*}, Jorge A. Toth^{*} y Norberto M. Nigro[†]

^{*} Universidad Nacional del Comahue,
8300 Neuquén, Argentina (jtoth@uncoma.edu.ar)

[†] Centro Internacional de Mecánica Computacional CIMEC, INTEC, CONICET
3000 Santa Fe, Argentina (nnigro@intec.unl.edu.ar)

Key words: Mallas móviles, CFD, ALE.

Resumen. *Este trabajo expone cuatro métodos hábiles para definir la cinemática de mallas adaptables a dominios con fronteras móviles. El movimiento de los nodos de la grilla constituye un requerimiento fundamental en la resolución de problemas CFD mediante la técnica ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian). Asumiendo una malla inicial, una de las metodologías propuestas minimiza la distorsión de los elementos de la malla mientras transcurre la deformación del dominio. La distorsión de los elementos se evalúa mediante una apropiada relación geométrica de calidad. Las técnicas restantes se basan en la resolución de una EDP elíptica, dos de ellas requiriendo la equiseparación de las líneas de flujo de calor sobre cada superficie isoterma al asimilar el problema con uno de conducción de calor. En la última propuesta, cada dominio instantáneo se asimila a la sección de un sólido al nivel $z = f(t)$, una función continua monótonamente creciente. El eje z surca los centros geométricos de los sucesivos dominios yuxtapuestos. Para un intervalo temporal $0 < t \leq t_f$, las trayectorias de los nodos fueron identificadas con las líneas de flujo de calor correspondientes un problema térmico estacionario ficticio, cuya solución la determinan un salto térmico oportuno y apropiadas condiciones de contorno. La conductividad fue modulada mediante el campo de temperatura de un transiente diseñado a propósito de uniformar la intensidad del flujo sobre las superficies isotermas. En todos los casos, la malla inicial determinó la topología de las sucesivas mallas. Adicionalmente, se aplican dos de los métodos al mallando las cámaras de compresión de un nuevo motor rotativo, comparándose los resultados obtenidos.*

1 INTRODUCCIÓN

La simulación del flujo dentro de la cámara de combustión de un motor de combustión interna equivale a resolver un problema particular de interacción fluido-estructura donde la estructura es una parte del contorno del dominio que actúa cuerpo rígido cuyo movimiento no depende del flujo que lo atraviesa. A diferencia de muchos problemas de interacción fluido-estructura este movimiento se conoce a priori y puede ser definido por el usuario mediante una ley de movimiento. Para los problemas de interacción fluido-estructura en general y para este caso particular existen diferentes formas de tratar el problema. La división más general presenta por un lado los métodos denominados *Interface / front tracking*¹ donde la malla se deforma para adaptarse al movimiento de la interface o contorno. Por otro lado tenemos los métodos denominados *Interface capturing* donde la interfase se define mediante una función auxiliar que se transporta con un campo de velocidades en una malla fija. Ejemplos de esquemas del primer tipo son las formulaciones por elementos finitos espacio-tiempo deformables^{2,3}, el método Euleriano-Lagrangiano arbitrario (ALE)⁴. Del mismo modo esquemas que caen dentro del segundo tipo son el *VOF (Volume of fluid)*⁵, los denominados *phase field methods*, los métodos *front capturing* y los de tipo *Level-Set*^{6,7}.

Específicamente en su aplicación al análisis del flujo en el cilindro de un motor de combustión interna una de las técnicas más adoptadas es ALE.

En lo que hace a la implementación de la estrategia ALE la mayoría de los trabajos la usan en un contexto de volumen finito. La lista de referencias es grande y los trabajos más citados los incluimos como referencia^{8,9,10,11}. Una de las principales dificultades de esta formulación es la satisfacción de la ley de conservación geométrica (GCL) para lo cual varias estrategias ad-hoc se proponen. Por otro lado el método de los elementos finitos tiene la habilidad de ser completamente consistente con la estrategia ALE satisfaciendo naturalmente la mencionada ley de conservación¹². En las referencias citamos algunos de los trabajos más relevantes que emplean ALE con elementos finitos^{12,13,14,15,16}.

En la resolución de problemas CFD con fronteras móviles utilizando una estrategia ALE, cualquiera sea el modelo a implementar, la cinemática de la grilla debe ser proporcionada en la instancia de generación de mallas. Esta etapa puede realizarse en el pre-proceso o durante el cálculo. La primera opción consiste en generar mallas en instantes predeterminados accesibles al programa principal mediante un archivo. Debido a que los tiempos de cálculo quedan definidos por restricciones que tienen en cuenta el flujo y la discretización espacial del dominio para asegurar la estabilidad de la solución, en general no corresponderán a los instantes para los cuales se calculó la malla. En estos casos, deben interpolarse las posiciones nodales entre las mallas inmediatamente anterior y posterior al tiempo de cálculo. La posibilidad de generar mallas durante el proceso permite eliminar la interpolación antes descrita porque para cada tiempo de cálculo es generada la correspondiente malla. Esta alternativa simplifica la etapa de pre-proceso a costa de un proceso de cómputo más extenso.

La cinemática de la malla debe establecerse aplicando un modelo apropiado, capaz de mover los puntos nodales y deformar los elementos sin provocar un sensible deterioro de la calidad de la grilla. En general, el cumplimiento de este requisito no puede extenderse a todo

tiempo de cálculo, porque en su transcurso los modelos degradan la calidad de la malla respecto de la inicial. Cuando la calidad de la grilla deformada resulta inaceptable para el cálculo, se impone ejecutar una instancia de remallado del dominio; consistente, al mismo nivel temporal, en la generación de una nueva malla caracterizada por otro conjunto de nodos y elementos; debiéndose luego, desde la malla deteriorada, interpolar la solución sobre la nueva grilla. Esta interpolación introduce una difusión numérica adicional, por lo cual conviene disminuir al mínimo el número de remallados.

El remallado puede constituir una alternativa favorable cuando opera compensando la degradación de la solución inducida por el gradual deterioro de la malla a lo largo de tiempos suficientemente prolongados. En razón de que el balance óptimo para la calidad de la solución depende de cada problema en particular, la opción entre remallar o retener la malla establece otro problema a salvar; puesto que, en cada caso, una elección inteligente de la cantidad y oportunidad de las instancias de remallado reduce los errores de la solución.

En este trabajo se proponen cuatro métodos útiles para la determinación de la cinemática de una malla, uno de ellos basado en la minimización de la distorsión de los elementos, y los tres restantes en la resolución de una EDP elíptica. También se comparan dos de los métodos propuestos en una aplicación particular, consistente en el mallado de la cámara de compresión del Motor Rotativo de Combustión a Volumen Constante¹⁷ (MRCVC– Patente: P 96 01 05411 – INPI, Argentina).

El principal objetivo buscado a través de estas estrategias para el movimiento de mallas, es mejorar la calidad de los resultados respecto de los que arrojan otras conocidas, procurando minimizar la cantidad de los remallados necesarios.

2 CALIDAD DE UNA MALLA

Aunque la calidad de la malla depende del problema a resolver, valen criterios generales que deben ser satisfechos cualquiera sea la malla. La distorsión de los elementos es un criterio, cuya evaluación se realiza en forma indirecta vinculando las dimensiones geométricas del elemento. Estas relaciones admiten definición por parte del usuario, empero existen algunas preferentemente utilizadas, entre las cuales pueden citarse los siguientes ejemplos para aplicaciones bidimensionales:

- Relación de aspecto: se define como la razón entre los radios de los círculos circunscrito y el inscrito más pequeño del elemento, es decir:

$$RA = \frac{R_{circ}}{r_{insc}} \quad (1).$$

La Figura 1 sugiere algunos ejemplos. Puede demostrarse que la mínima relación de aspecto entre todos los triángulos corresponde al equilátero, con $RA = 2$.

- Otra relación utilizada para elementos triangulares es:

$$Q = \frac{4\sqrt{3}A}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} \quad (2),$$

donde A es el área del triángulo y l_1 , l_2 y l_3 son las longitudes de sus lados. La constante $4\sqrt{3}$ es introducida para que Q sea igual a la unidad cuando el triángulo es equilátero. Para cualquier otro triángulo el valor de Q será menor, $0 < Q \leq 1$.

Las definiciones anteriores coinciden en asignar al triángulo equilátero la categoría de ideal de referencia a fin de compararlo con cualquier otro elemento triangular.

3 MODELO DE MÍNIMA DISTORSIÓN DE LOS ELEMENTOS (MMDE)

Cualquiera sea el modelo implementado para definir la cinemática de una malla, debe evaluarse su calidad recurriendo a alguna relación geométrica adecuada como las definidas por (1) o (2). Acorde con lo anticipado en la introducción, en cada nivel temporal según lo que resulte de dicha evaluación se elige la opción de retener la grilla actualizada o remallar el dominio. Esto inspiró la idea de modular la relación geométrica que mide la calidad de los elementos de una malla a efectos de establecer su ley cinemática, dando origen al MMDE descrito a continuación.

La idea básica del modelo consiste en minimizar la distorsión de los elementos de la malla durante la deformación del dominio, suponiendo dada una malla inicial y adoptando una relación geométrica que determine la calidad de la grilla. La topología de la malla inicial se mantiene inalterada en las sucesivas mallas, pues según esta propuesta las coordenadas espaciales de los nodos se acomodan con arreglo al óptimo consignado. Entonces, en cualquier instante, la malla así obtenida tendrá la mejor definición posible relativa a la malla inicial y al índice geométrico de calidad adoptado.

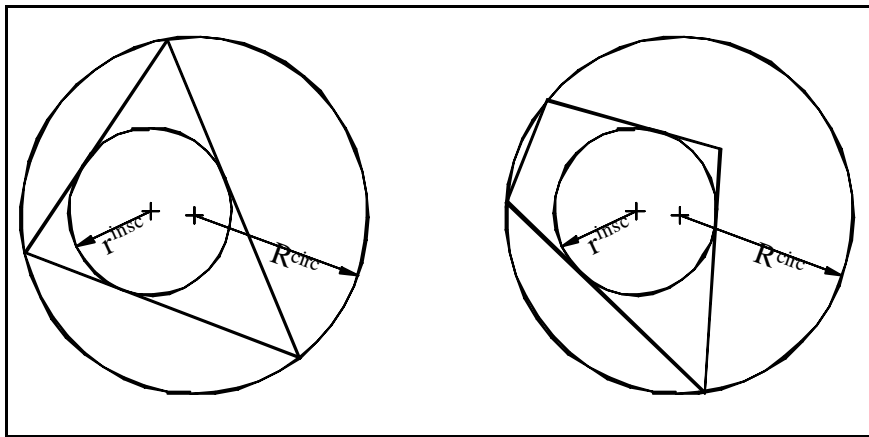


Figura 1

Sea $W_t \subset \mathbb{R}^{n_{de}}$ el dominio espacial en el tiempo $t \in (0, t_f)$ sobre el cual se desea definir la cinemática de la malla, donde n_{de} es el número de dimensiones espaciales. Se supone que el movimiento de las fronteras de W_t (G_t) está prefijado.

Siendo q la relación geométrica seleccionada para evaluar la calidad de la malla y q_r el valor de tal relación para el elemento ideal de referencia, si la malla inicial posee N_t elementos en total, el modelo propone minimizar la siguiente función objetivo:

$$F(X) = q_r N_t - \sum_{i=1}^{N_t} q_i(X) \quad (3),$$

donde X es el vector de incógnitas que contiene todas las coordenadas de los puntos nodales.

La función (3) plantea la diferencia entre la suma ideal de q extendida a todos los elementos considerándolos de geometría “perfecta” ($q = q_r$) y la misma suma empleando el valor real que puede adoptar tal relación. Por lo tanto, el resultado que arrojará este modelo son mallas caracterizadas por la mínima diferencia entre el promedio real de q y q_r .

Para la resolución de la ecuación (3), debe distinguirse entre nodos interiores del dominio y los nodos de la frontera, porque éstos quedan sujetos a la restricción de pertenencia que vincula sus coordenadas conforme la ley temporal de definición del contorno. A seguir se desarrollan los enfoques utilizados para tratar sendos tipos de nodos.

3.1 Nodos interiores

Asumiendo que la malla inicial posee N elementos con por lo menos uno de sus nodos perteneciente al interior del dominio, el problema planteado consiste en minimizar la siguiente función objetivo:

$$F_{int}(X_{int}) = q_r N - \sum_{i=1}^N q_i(X_{int}) \quad (4),$$

donde X_{int} es el vector de incógnitas; cuya cantidad está dada por el producto $n_{de} \cdot N_i$, donde N_i es el número de los nodos interiores. La condición necesaria para que la función objetivo (4) posea un mínimo es que sean simultáneamente nulas sus derivadas respecto de todas y cada una de las incógnitas¹⁸.

3.2 Nodos de frontera

Considerando M la cantidad de elementos que poseen al menos un nodo perteneciente al contorno del dominio, la función objetivo a minimizar se define:

$$F_{cont}(X_{cont}) = q_r M - \sum_{i=1}^M q_i(X_{cont}) \quad (5),$$

sujeta a las restricciones:

$$g_i(X_{cont}) = 0 \quad i = 1, \dots, N_c \quad (6);$$

donde X_{cont} es el vector de incógnitas, g_i la ecuación de definición de la frontera del dominio para el i -ésimo nodo y N_c el número de nodos pertenecientes a \mathbf{G}_t . La cantidad de incógnitas en este caso es $n_{de} \cdot N_c$.

Para resolver el problema que plantean (5) y (6), se formula el lagrangiano

$$L(X_{cont}, \mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_{N_c}) = q_r M - \sum_{i=1}^M q_i(X_{cont}) - \sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{I}_i g_i(X_{cont}) \quad (7),$$

que, como puede demostrarse, posee los mismos puntos estacionarios de la función objetivo, cumpliendo además las restricciones impuestas¹⁸. En la formulación del lagrangiano se introducen los multiplicadores de Lagrange \mathbf{I}_i (uno por cada restricción, es decir, uno por nodo de frontera), adicionándose entonces otras N_c incógnitas al problema. Por lo tanto, en la nueva formulación el número de incógnitas es $(n_{de}+1) \cdot N_c$. La condición necesaria para que el lagrangiano (7) posea un punto estacionario es que sean nulas sus derivadas respecto de cada incógnita¹⁸.

Un inconveniente para cualquier modelo que procure definir la cinemática de una malla, ocurre cuando la frontera del dominio posee puntos en los cuales el vector normal al contorno es discontinuo. En problemas bidimensionales este tipo de puntos interpreta el acordamiento de dos curvas sin continuidad entre los vectores tangentes. La estrategia más burda para acometer la resolución de esta índole de problemas es fijar un nodo en cada uno de los puntos de discontinuidad y conservarlo en esa posición mientras la discontinuidad persista o hasta la próxima instancia de remallado. Esta solución, no obstante su simpleza y generalidad, aumenta o disminuye la densidad de los nodos de frontera sobre los tramos del contorno subtendidos entre las discontinuidades, respectivamente, al contraerse o elongarse dichos tramos. Este hecho afecta directamente el tamaño de los elementos de la malla, provocando elevados incrementos localizados de la densidad de la grilla a expensas de una disminución de la densidad en el interior del dominio. Tal dificultad también aparece implicada por la aproximación o alejamiento relativos entre dos o más tramos de la frontera.

4 MÉTODO DE EQUISPARACIÓN DE LAS LÍNEAS DE FLUJO (MELF)

Suponiendo dada una familia de curvas mediante la ley:

$$y_N = g_{(x,a)} \quad (8),$$

la familia ortogonal implicada debe satisfacer la ecuación diferencial:

$$y' = - \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^{-1} \quad (9).$$

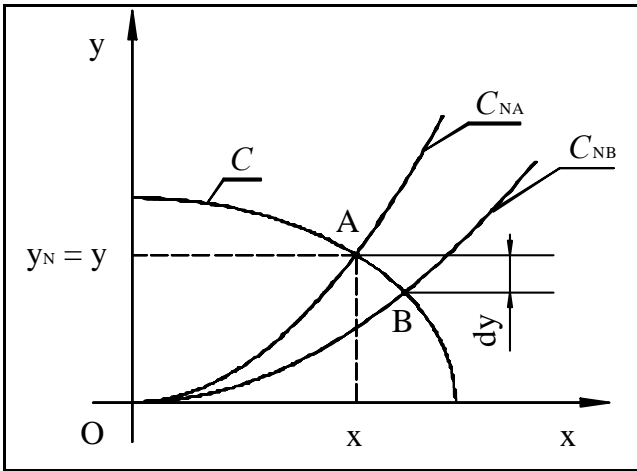


Figura 2

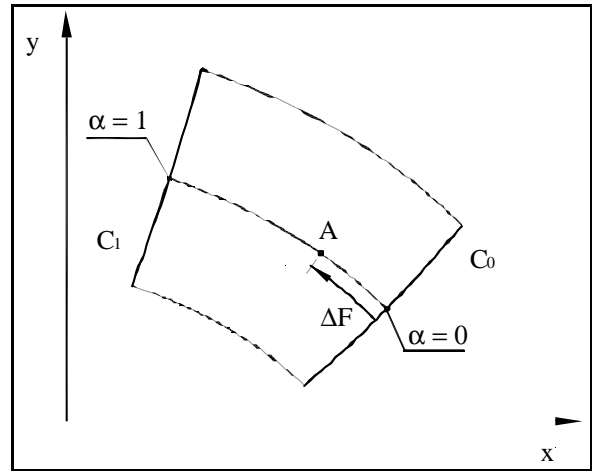


Figura 3

De acuerdo con la Figura 2, C denota una de las curvas de la familia dada según (9), designando C_{NA} una curva ortogonal (8) que interseca a C en el punto A , en el cual se verifica $y_N = y$, siendo $y_N = g_{(x,a)}$. El punto B interpreta la intersección de C y la curva denominada C_{NB} , una de la familia (8), aunque valuada en $(a + Da)$; o sea, C_{NB} resulta $y_N = g_{(x,a+Da)}$. Luego, los puntos A y B están separados en la dirección de la curva C por una distancia diferencial dy que satisface el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} dy = -\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{-1} dx \\ dy = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial g}{\partial a}\right) da \end{cases} \quad (10).$$

Al eliminar dy de las anteriores y transponiendo se obtiene:

$$\frac{dx}{da} = -\frac{\left(\frac{\partial g}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{\left[1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2\right]} \quad (11),$$

la cual es la tasa de variación del parámetro sobre la curva C . La longitud diferencial del arco subtendido entre los puntos A y B (dF) puede evaluarse así:

$$dF = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (12).$$

Luego, sustituyendo en la anterior las equivalencias (10) y (11) y operando, se arriba a:

$$\frac{dF}{d\mathbf{a}} = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{a}}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2}} \quad (13),$$

destacándose la importancia de la anterior porque interpreta la tasa de variación del arco medido sobre C por unidad de variación del parámetro \mathbf{a} . Por lo tanto, si se identifica C con una isoterma y la familia ortogonal con líneas de flujo equiespaciadas a lo largo de la primera, la ecuación (13) se reduce a una constante.

Se aborda entonces el problema de hallar un par de familias mutuamente ortogonales que mediante una sucesión de tramos de sus curvas describan la frontera del dominio, identificando una familia con las isotermas de un problema térmico y la otra con las líneas de flujo correspondientes, impuesta también la condición de que las últimas se distribuyan uniformemente a lo largo de las isotermas que intersecan; es decir, se exige el cumplimiento de la restricción de equidistancia (13) en todos los puntos del dominio. Por lo tanto, la derivada de la expresión (13) en la dirección de la isoterma a la cual pertenece el punto genérico A debe ser nula. Asumiendo la curva C ilustrada en la Figura 2 como una isoterma ortogonal a la curva C_{NA} en el punto A , surge que, para la derivada direccional, corresponde adoptar la dirección definida por la ecuación (11). Planteando la nulidad de la derivada de la función (13) en esa dirección y operando, se obtiene:

$$\left[1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2\right] \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{a}^2}\right) + \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{a}}\right)^2 \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right) - 2 \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{a}}\right) \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{a} \partial x}\right) = 0 \quad (14).$$

La expresión anterior constituye una ecuación elíptica, pudiéndonosla asimilar a la de gobierno del flujo de calor 2D de un problema con fuente y conductividad no isotropa, que al resolverse con adecuadas condiciones de frontera determina la función $g_{(x,\mathbf{a})}$ en la totalidad del dominio, cumpliendo la condición de equiseparación planteada.

Un aspecto importante es la definición del parámetro \mathbf{a} , porque una elección conveniente facilitará el chequeo de las condiciones de frontera, simplificando también la resolución de la ecuación (14). Asumiendo $\mathbf{a} = 0$ sobre la frontera adiabática C_0 y $\mathbf{a} = 1$ a lo largo de la frontera adiabática C_1 , relativo a la Figura 3 y para un punto A del dominio xy , sobre la isoterma que lo contiene, se mide desde suyo la distancia DF que separa A de la frontera C_0 , estableciéndose la magnitud del parámetro \mathbf{a} que rige en A como la razón:

$$\mathbf{a} = \frac{DF}{DF_T} \quad (15);$$

donde DF_T denota la longitud que entre ambas fronteras adiabáticas subtiende la misma isoterma.

La función $y_N = g_{(x,a)}$ que satisface (14) en el dominio $x\mathbf{a}$ tiene la condición de contorno dada por el valor de la ordenada $y_f = g_f$ correspondiente a la propia abscisa x_f de la frontera del dominio físico. Además, sobre cada frontera “adiabática” del dominio físico se conoce

$$y'_f = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_f$$

y, en virtud de (13) y de la propia definición de \mathbf{a} antes expuesta, también están determinadas, sobre las fronteras “isotérmicas” del dominio físico, tanto $\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_f$ como $\left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{a}} \right)_f$. Estos “flujos” sobre las fronteras del campo de “temperatura” $y_N = g_{(x,a)}$, calculado sobre el dominio transformado $x\mathbf{a}$, permiten la formulación de condiciones de contorno tipo Neumann – Dirichlet combinadas. Por lo tanto, el contorno del dominio físico contiene la totalidad de la información que deja bien planteado el problema elíptico (14). En consecuencia, el campo de “temperatura” $g = g_{(x,a)}$, que traduce la equiseparación de las líneas de flujo a un significado apenas geométrico, debe ser resuelto, en forma exacta o numérica, también partiendo de condiciones sólo geométricas. Por supuesto, no habiendo distinción entre las direcciones x e y , lo planteado acerca de la ordenada y como “temperatura” sobre el contorno del dominio transformado $x\mathbf{a}$ puede aplicarse a la abscisa x , adjudicándole el carácter de isoterma a las fronteras que en el análisis precedente fueron supuestas adiabáticas.

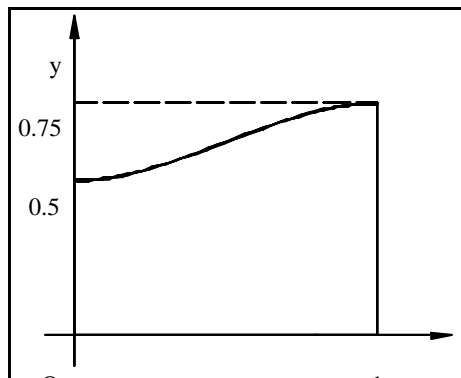


Figura 4

A modo de ejemplo, se plantea hallar una malla arreglada a la condición de equiseparación para la región que expone la Figura 4:

$$0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \left[1 - x^2 \left(x - \frac{3}{2} \right) \right].$$

En este ejemplo la ecuación (14) fue resuelta numéricamente en el dominio $x\mathbf{a}$ en forma explícita hasta la convergencia del transiente (esquema en diferencias finitas, centrado espacialmente y atrasado en el tiempo), obteniéndose los resultados que despliegan las figuras 5 y 6.

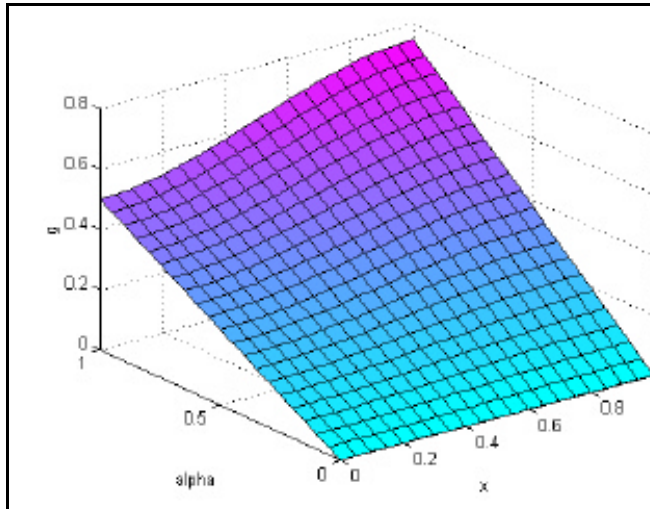


Figura 5 La función $y_N = g(x, a)$ en el plano $x\mathbf{a}$.

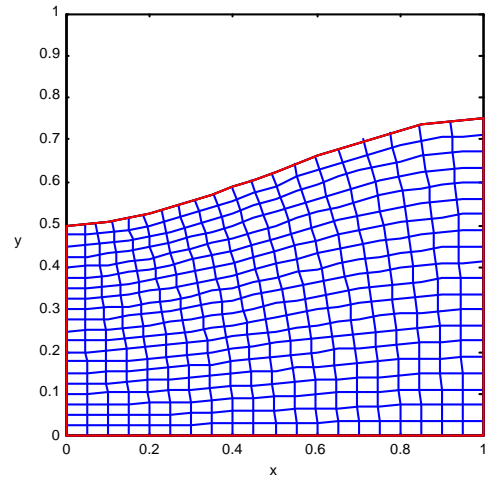


Figura 6 Malla determinada por $y_N = g(x, a)$ y familia ortogonal.

El método de equiseparación podría mallar dominios conexos o disconexos, o que mutan entre ambas variedades topológicas, simplemente resolviendo la ecuación (14) en el dominio $x\mathbf{a}$ como un transiente con las condiciones de frontera que, en el mismo instante, están definidas para cada punto por la correspondiente ordenada del contorno en el dominio físico xy . La calidad de la malla de cuadrángulos obtenible compensaría las dificultades indicadas en el párrafo anterior. Se debería estudiar la extensión del método al caso 3D, para hallar el correlato tridimensional de la ecuación (14); tomando en consideración que, en lugar de líneas, las isotermas y las fronteras de los tubos de flujo serán superficies. El desarrollo de esta estrategia amerita futuros trabajos, indagando técnicas de mallado 3D más generales adecuadas a la resolución de problemas CFD con fronteras móviles.

5 MÉTODO DE LA CONDUCTIVIDAD MODULADA POR LA TEMPERATURA (MCMT)

La Figura 7 ilustra el dominio físico y un haz de líneas de flujo asociado al campo de temperatura permanente implicado por una conductividad uniforme, impuesta la condición de adiabaticidad sobre las fronteras AB y DC y siendo las líneas AD y BC sendas isotermas, correspondientes a distintos niveles térmicos. En este sencillo ejemplo, el campo de temperatura que satisface la ecuación $\nabla^2 T = 0$, pone de manifiesto un hecho físico de fácil comprensión: el haz de líneas de flujo equiespaciadas sobre la frontera AD no se distribuye con la misma regularidad sobre la isoterma BC . Este fenómeno ocurre porque el flujo sobre

cada isoterma resulta más intenso en las adyacencias de la frontera adiabática AB . Luego, esta distribución no uniforme de la intensidad del flujo estimuló la búsqueda de una conductividad artificial que, en el mismo dominio físico y entre las mismas isothermas de frontera, indujera una intensidad de flujo de calor constante a lo largo de todas las isothermas del campo.

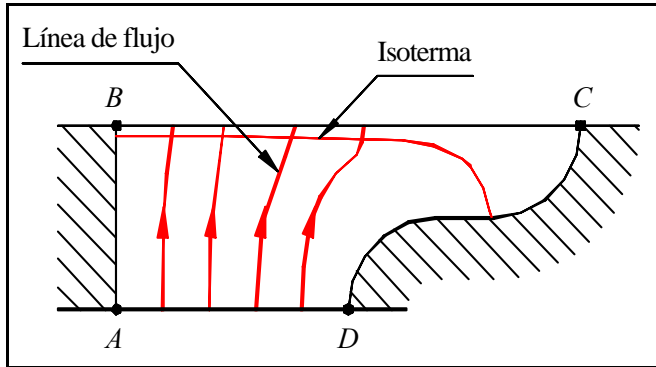


Figura 7

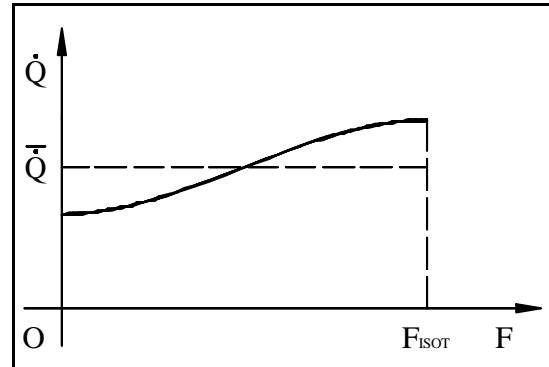


Figura 8

En la Figura 8 está representada a lo largo de una isoterma dada la intensidad del flujo, cuya magnitud se aplicará a modular la conductividad sobre la misma línea; operando tal modulación incrementos o decrementos del flujo en aquellos puntos donde su magnitud sea, respectivamente, inferior o superior al promedio de intensidad valuado sobre esa isoterma, a saber:

$$\bar{Q} = \frac{\dot{Q}}{F_{ISOT}} = -\frac{1}{F_{ISOT}} \int_0^{F_{ISOT}} \mathbf{k} \bar{\nabla} T \cdot \hat{n} dF \quad (16);$$

donde F_{ISOT} refiere la longitud completa de la isoterma a la cual pertenece el punto genérico (x, y) , siendo \hat{n} el versor normal al diferencial de arco dF .

La noción delineada sugiere imponer la siguiente pauta de actualización:

$$\mathbf{k}^*_{(i,j)} = \frac{\dot{Q}_{(i,j)}}{F_{ISOT(i,j)} \left| \bar{\nabla} T \right|_{(i,j)}} \quad (17),$$

donde \mathbf{k}^* denota la conductividad actualizada, de forma que en cada nivel temporal ficticio el campo de conductividad se modifica para forzar al flujo sobre las isothermas a una continua aproximación hacia el promedio (16).

Esta metodología resuelve los campos de temperatura y de conductividad, siendo factible obtener las isothermas y las líneas de flujo; es decir, emergen los datos requeridos para calcular, en el mismo dominio físico, los campos de conductividad y temperatura sujetos a la condición impuesta por el MELF. Entonces, si este último resultado reproduce los campos térmico y de conductividad, dentro de un margen tolerado de error numérico, se contrasta la hipótesis de equivalencia entre el método de equiseparación y el de la conductividad modulada por la temperatura. Asimismo, vale ensayar esta contrastación de equivalencia

cotejando en los dominios xy o $x\mathbf{a}$, sobre todo el campo discreto de las abscisas, las ordenadas de las líneas de flujo respectivamente asociadas a sendos métodos.

Como ejemplo, se propone mallar el dominio ilustrado en la Figura 4 aplicando el MCMT y luego comparar estos resultados con aquellos conseguidos mediante el MELF. En las figuras 9 y 10 pueden observarse los resultados obtenidos. La Figura 11 muestra la discrepancia relativa porcentual entre los valores de $y_N = g(x, \mathbf{a})$ calculados por los dos métodos. En virtud del buen ajuste comprobado entre las mallas, resultaría útil intentar una demostración matemática rigurosa de la equivalencia entre las dos técnicas, expresada hasta aquí sólo en términos numéricos, aunque del todo consistente con la perspectiva física que las identifica.

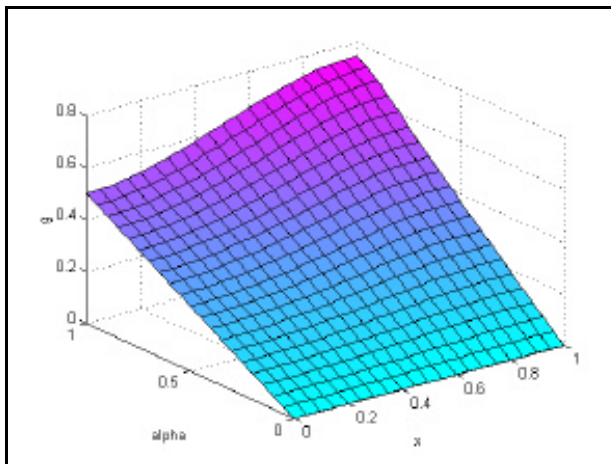


Figura 9 La función $y_N = g(x, \mathbf{a})$ en el plano $x\mathbf{a}$.

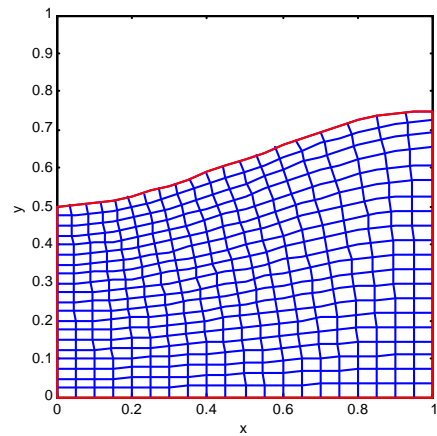


Figura 10 Malla determinada por $y_N = g(x, \mathbf{a})$ y familia ortogonal.

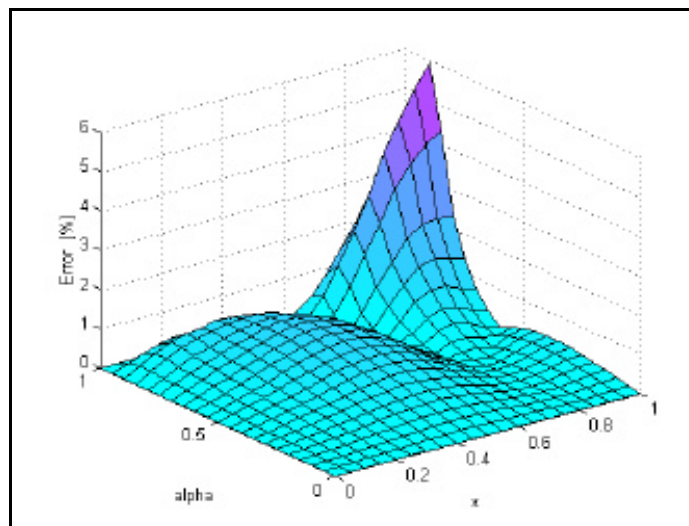


Figura 11 Discrepancia relativa porcentual entre los valores de $y_N = g(x, \mathbf{a})$ calculados por el MELF y el MCMT.

6 MODELO DE LÍNEAS DE FLUJO DE CALOR (MLFC)

El MLFC se propone con el objetivo de definir la cinemática de mallas bidimensionales, resultando aplicable a dominios que poseen impuesto el movimiento de sus fronteras.

El problema que se plantea consiste en determinar la cinemática de una malla para la región plana $W_t \subset \mathbb{R}^2$ con geometría variable en el intervalo de tiempo $0 < t \leq t_f$, siendo conocida la variación de G_t en función del tiempo. Este modelo determina la cinemática de los nodos de la malla interiores del dominio, siendo necesaria una estrategia complementaria para comportar los nodos de frontera.

6.1 Cinemática de nodos interiores

Dado el plano sobre el cual se extiende el dominio, el sistema de referencia es establecido de modo que dicho plano sea paralelo al xy . Posteriormente se genera un sólido artificial superponiendo los dominios instantáneos, estando sus respectivos centros geométricos alineados según una dirección perpendicular al plano xy (dirección z). La alineación de los centros geométricos no es una imposición del modelo; tratándose simplemente de una estrategia para obtener un sólido algo menos “retorcido”. La superposición se regula adoptando una función que vincula cada instante con alguna coordenada z , es decir, $z = f(t)$; la cual debe ser una función monótonamente creciente a fin de evitar inconsistencias en la generación del sólido. Esta función controla la componente en la dirección z del gradiente de la superficie lateral frontera del volumen ficticio. En particular, cuando se presentan problemas en los cuales la geometría del dominio de interés posee una elevada tasa de variación temporal, es necesaria una adecuada elección de la función $z = f(t)$ a fin de lograr mallas con elementos cuya distorsión no sea excesiva.

Una vez generado el sólido artificial, se lo adopta como dominio para un problema térmico estacionario auxiliar:

$$\nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla T) = 0 \quad (18),$$

siendo T la temperatura y \mathbf{k} el coeficiente de difusión térmica; imponiendo apropiadas condiciones de contorno en los niveles $z_i = f(0)$ y $z_f = f(t_f)$, y adiabaticidad en el resto de la frontera.

La determinación del coeficiente \mathbf{k} es una tarea de esencial importancia para la obtención de resultados aceptables. En este trabajo, tal definición se realizó recurriendo a aquella propuesta en el MCMT, desarrollado en el apartado 5.

Luego, estando definida una malla para el dominio en el instante inicial, las líneas de flujo de calor con origen en los nodos de esa grilla, obtenidas de la distribución de temperatura en el interior del volumen, determinan las posiciones y velocidades de los nodos de la malla respecto al centro geométrico de la región correspondiente para cualquier otro instante comprendido en el intervalo $0 < t \leq t_f$.

6.2 Cinemática de nodos de frontera

La identificación de las trayectorias de los puntos nodales de la malla con líneas de flujo de calor impone una severa restricción al modelo presentado: la necesidad de poseer superficies de flujo diferenciables. Este requisito torna en una limitación cuando es necesario definir las trayectorias de nodos de contorno en problemas donde las fronteras del sólido artificial son “filosas”. Entre las posibilidades que evitan esta dificultad, se cuenta el empleo de una transformación “suavizante” aplicada al volumen ficticio, de modo que las líneas de flujo de calor posean definición en toda la extensión de esa superficie. Luego, antitransformación mediante, sería viable el cálculo de las trayectorias nodales para el sólido original. La implementación de la estrategia expuesta resulta laboriosa y aumenta el costo computacional cuando se acomete el mallado de dominios con geometría compleja y numerosas aristas. Por este motivo, se sugiere utilizar para los nodos de frontera alguna otra estrategia.

7 RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados que surgieron de aplicar el MMDE y MLFC al mallado de las cámaras de un compresor tipo MRCVC en su versión más simplificada¹⁷. Las cámaras del MRCVC poseen una compleja variación temporal de su geometría. Por ejemplo, entre las posiciones correspondientes a los volúmenes máximo y mínimo ($\mathbf{q} = 0$ y $\mathbf{q} = \frac{n+2}{2n}\mathbf{p}$, respectivamente, con n el número de paletas, r el radio del vano que aloja cada paleta y R el radio de la trayectoria que describe el eje de la misma¹⁷), la cantidad de arcos circulares acordados sobre el contorno del dominio se reduce de 8 a 4.

Esta drástica alteración de la geometría constituye un obstáculo que, prácticamente, no puede sortear la mayoría de los generadores de mallas móviles. Por lo tanto, en este trabajo se propone eludir las posiciones del conjunto móvil de la máquina donde ocurren problemas infranqueables para los modelos; aproximando lateralmente esas posiciones (por izquierda y por derecha en \mathbf{q}). Para estos ángulos críticos fue adoptada una nueva malla válida desde el instante correspondiente. Entre cada par de estos ángulos, cuando fue apropiado, también se realizó un remallado del dominio tomando en cuenta la degradación del índice de calidad promediado sobre los triángulos de la grilla.

En el desarrollo de los modelos (apartados 3 y 6) y en la aplicación presente, el tiempo es asumido como la variable independiente. Aceptando que la velocidad de rotación del eje motor \mathbf{w} es constante, vale la relación:

$$\mathbf{q} = \mathbf{w}t$$

entonces, el ángulo \mathbf{q} transforma al tiempo según un escalamiento.

Las características geométricas del MRCVC para el cual se obtuvieron los resultados son: $R = 11.7$, $r = 4.4$ y $n = 3$.

7.1 Modelo de mínima distorsión de los elementos

Como fue anticipado, para aplicar el MMDE debe seleccionarse un índice de calidad geométrica. Luego, a propósito de simplificar la implementación computacional, se adoptó la relación Q definida por (2). Esta definición induce inestabilidades en el esquema iterativo que

resuelve el sistema de ecuaciones asociadas al modelo. Tales inestabilidades se advierten en algunos nodos de las regiones del dominio adyacentes a los ápices de la frontera; originándose porque, para elementos de escasa calidad geométrica, en cada iteración, las diferencias entre la solución del sistema de ecuaciones y los valores de inicialización de las incógnitas arrojan un orden equivalente al valor Q de los elementos ($DQ \cong Q \cong 0$), generando perturbaciones de la solución que pueden amplificarse sin límite. Para superar este inconveniente, se propone la adopción de Q^{-1} como la relación geométrica de calidad. Para la relación geométrica de calidad escogida resulta $q_r = 1$, pues el elemento de referencia es el triángulo equilátero.

Los cálculos se llevaron a cabo para $Dq = 0.5^\circ$. Los sistemas de ecuaciones resultantes fueron resueltos mediante el método de Newton–Raphson. Todas las mallas iniciales fueron obtenidas mediante el generador de mallas bidimensionales de un programa comercial; al principiar la deformación de cualquiera de éstas, las posiciones de los nodos fueron corregidas recurriendo al modelo de optimización propuesto. Con la consigna de no deteriorar en exceso la calidad de la malla al aproximarse al ángulo donde se realizará el próximo remallado, fue distribuida la distorsión en el intervalo angular Dq_r entre dos remallados consecutivos. La estrategia consiste en remallar efectivamente en la mitad del intervalo Dq_r en lugar de hacerlo al inicio. Luego, mediante incrementos negativos y positivos del ángulo, son alcanzados los correspondientes extremos de aquel intervalo.

Se presentan como resultados las grillas correspondientes a los ángulos inicial, medio (aproximadamente) y final del segundo intervalo Dq_r (correspondiente a la región 2^{17}). Fueron empleadas mallas de relativamente pocos elementos para visualizar directamente el desempeño del modelo. Asimismo, para cada región se presenta la evolución de la relación geométrica de calidad media (Q_{medio}) definida como:

$$Q_{medio} = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} Q_i \quad (19),$$

donde Q_i está dado por (2). Las figuras 12 a 18 ilustran estos resultados.

Las discontinuidades en las curvas de Q_{medio} corresponden a cada ángulo de remallado. Del análisis de esas curvas, se concluye que el modelo tiende a deteriorar la calidad global de la malla respecto a la inicial.

- Región 2 ($7.91^\circ \leq q < 52.09^\circ$):
 - Primera malla: 291 elementos y 202 nodos.

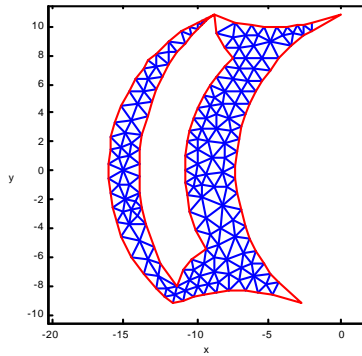


Figura 12 $q = 8^\circ$

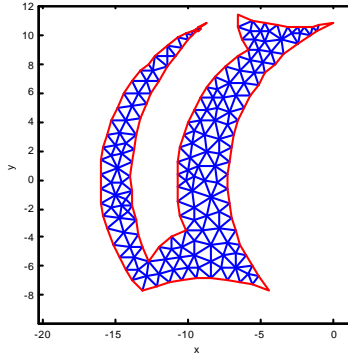


Figura 13 $q = 19^\circ$
Malla "inicial"

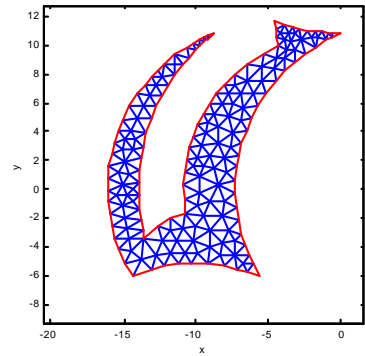


Figura 14 $q = 29^\circ$

- Segunda malla: 330 elementos y 219 nodos.

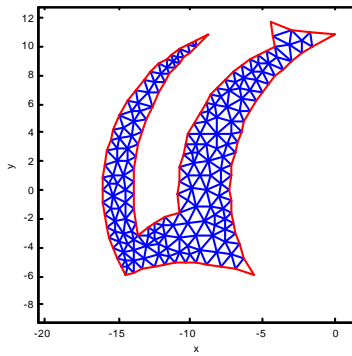


Figura 15 $q = 29.5^\circ$

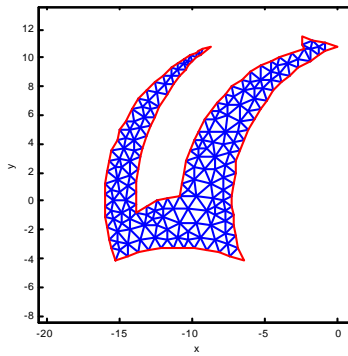


Figura 16 $q = 39.5^\circ$
Malla "inicial"

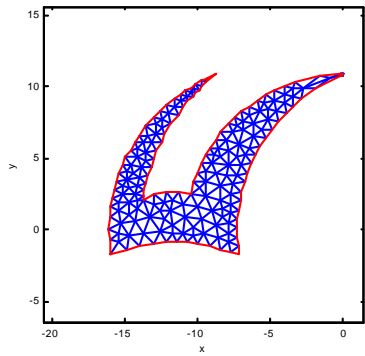


Figura 17 $q = 52^\circ$

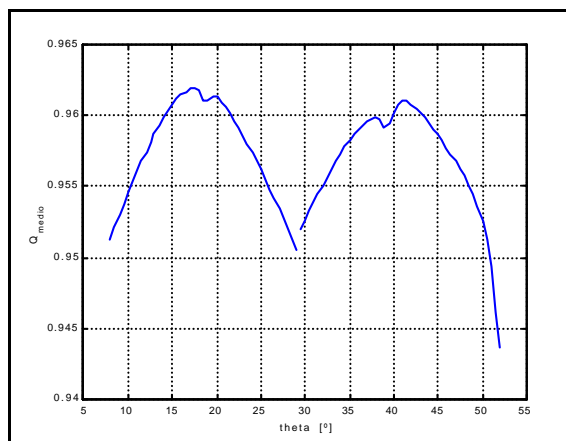


Figura 18

7.2 Modelo de líneas de flujo de calor

En la presente aplicación, la ecuación (18) fue resuelta empleando un esquema en diferencias finitas centrado de segundo orden, imponiendo condiciones de temperatura constante en las superficies inferior y superior del sólido generado.

Las mallas que serán presentadas corresponden a la primer porción del segundo Dq_r . Con la malla inicial propuesta, el modelo no soportó la deformación completa del dominio, detectándose la inversión de uno de los elementos. Por lo tanto, en ese instante o en alguno previo, el dominio debe ser remallado. A tal fin se aceptó la topología dada por la grilla inicial, pero con posiciones nodales ajustadas mediante el MMDE.

Las mallas que se presentan corresponden a los instantes inicial y final de cada intervalo entre remallados sucesivos. También fue evaluada la calidad de las mallas recurriendo al valor medio de la relación geométrica de calidad Q . Las figuras 19 a 23 exponen estos resultados.

- Región 2: malla con 291 elementos y 202 nodos.

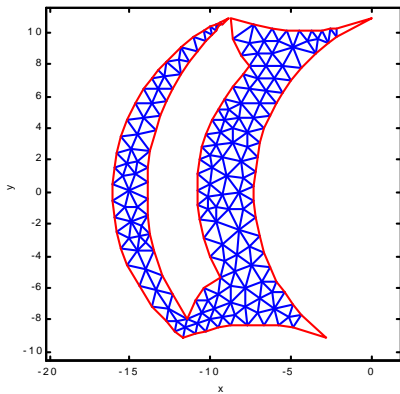


Figura 19 $q = 8.25^\circ$ – Malla inicial

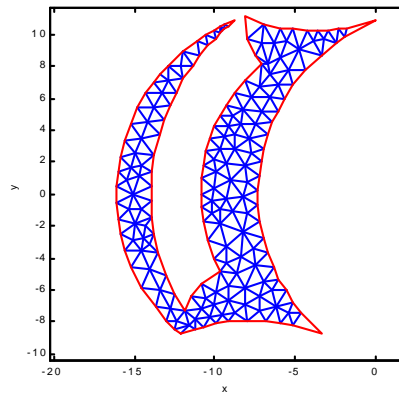


Figura 20 $q = 11.25^\circ$

- Remallado redefiniendo las posiciones nodales mediante el MMDE

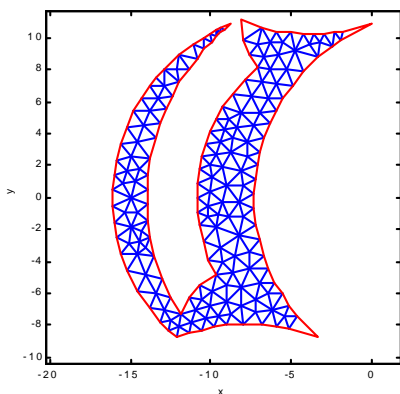


Figura 21 $q = 11.25^\circ$ – Malla inicial

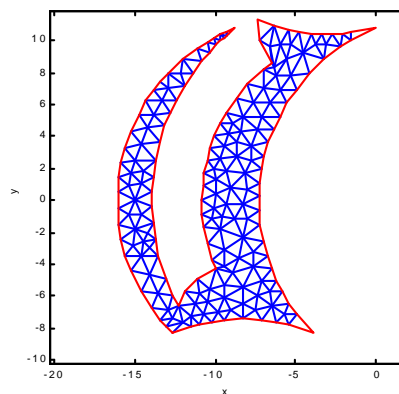


Figura 22 $q = 15^\circ$

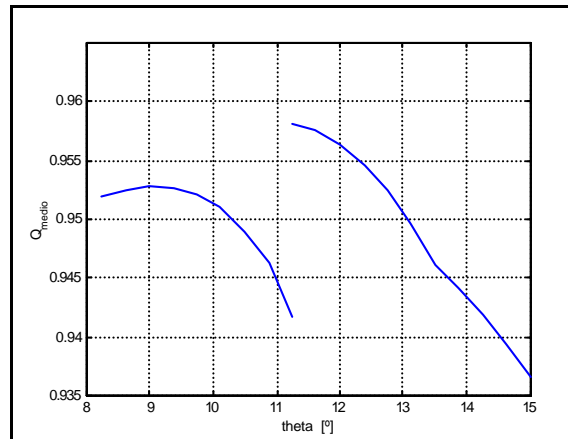


Figura 23

7.3 Comparación de resultados

En esta sección se comparan los resultados obtenidos del MMDE con los del MLFC. Como únicamente en la primera porción de la segunda región ambos modelos fueron acometidos a partir de idénticas mallas iniciales, la comparación se limita a dicho intervalo angular. No obstante la breve extensión del intervalo de comparación, pueden anticiparse conclusiones aceptablemente válidas para otros instantes. El cotejo entre los resultados quedó así subtendido sobre el lapso $\boldsymbol{q} \in [8.25^\circ, 11.25^\circ]$. La Figura 24 ilustra la evolución de Q_{medio} para ambos modelos; destacándose que, inicialmente, el MLFC mejora la calidad de los elementos (en promedio), pero después ésta declina rápidamente en el decurso de la rotación del árbol motor. En toda la extensión del intervalo de comparación el índice Q promediado para el MMDE superó al correspondiente al otro modelo, lo cual es producto de la propia definición de los mismos.

Las figuras 25 y 26 exhiben el índice de calidad de los elementos para sendos modelos en una posición angular determinada. Los elementos dispuestos en el seno del dominio están comportados de manera similar en ambos modelos. Las mayores discrepancias son halladas sobre elementos cercanos a los ápices de la frontera. Precisamente, estos elementos son causantes de la más acentuada disminución de Q_{medio} acusada por el MLFC.

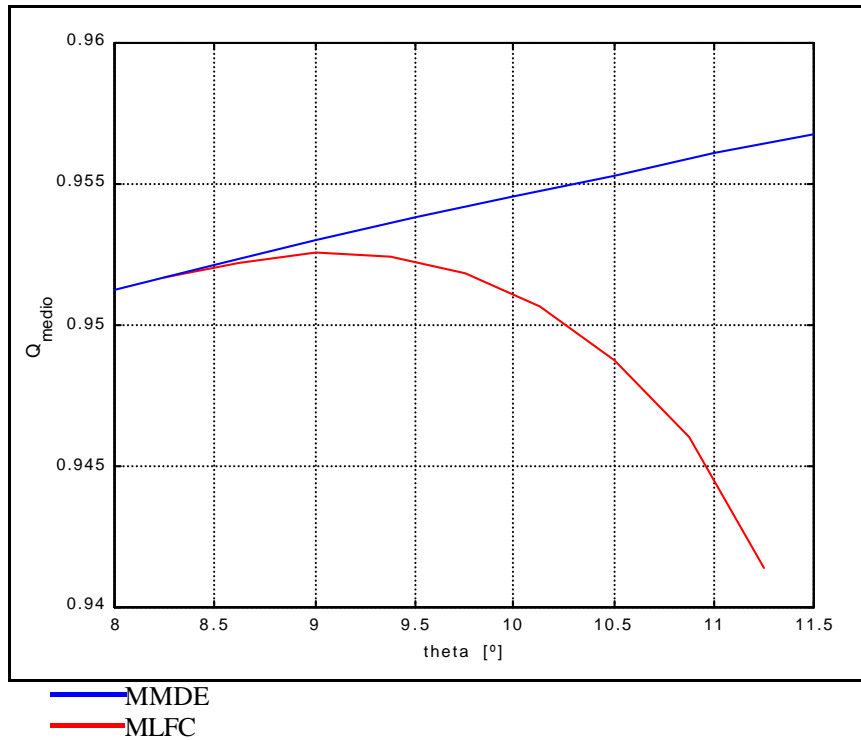


Figura 24

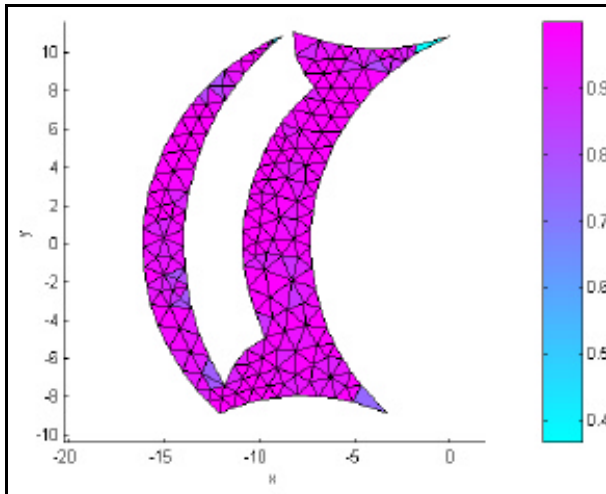


Figura 25 Calidad de la malla, MMDE, $q = 11^\circ$

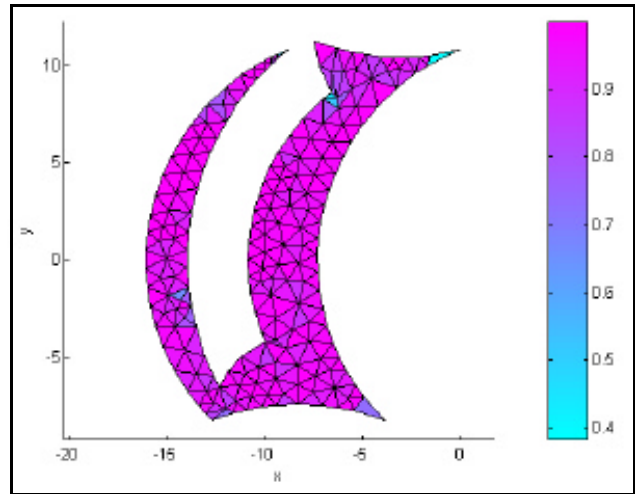


Figura 26 Calidad de la malla, MLFC, $q = 11.25^\circ$

8 CONCLUSIONES

Este trabajo propuso el fundamento matemático y numérico de cuatro estrategias computacionales aptas para gobernar la cinemática de mallas ajustables a dominios bidimensionales con fronteras móviles. En la primera propuesta, la grilla inicial y cada una de las sucesivas configuraciones del contorno definen la respectiva malla instantánea mediante una estrategia que minimiza la distorsión de sus elementos respecto del ideal de comparación.

Coherente con el concepto de la relación geométrica de calidad adoptada y en razón de que la distorsión de los elementos fue la mínima, la técnica propuesta aseguró la mejor definición global de los elementos impidiendo también su inversión. Como la formulación del modelo expuesto es válida cualquiera sea el número de las dimensiones espaciales, es admisible extenderla al caso tridimensional.

La segunda propuesta consistió en imponer la equiseparación de las líneas de flujo sobre cada isoterma al ser éstas asimiladas como dos familias mutuamente ortogonales que definen una malla de cuadrángulos, obteniéndose la ecuación elíptica que gobierna un flujo de calor para el caso de una fuente y conductividad no isótropa. Con esta formulación del problema, si son adoptadas condiciones de frontera determinadas sólo por la geometría del contorno, la solución correspondiente arroja isotermas y líneas de flujo arregladas a la restricción de equiseparación planteada. En la tercer propuesta, se buscó una solución alternativa para obtener la equiseparación de las líneas de flujo modulando la distribución de conductividad mediante el campo de temperatura establecido a través de un transiente que tiende a uniformar la intensidad del flujo de calor sobre las superficies isotermas. En la última propuesta, cada dominio instantáneo, incluido en un plano paralelo al xy , fue equiparado a la sección de un sólido al nivel $z = f(t)$. A lo largo del intervalo temporal $0 < t \leq t_f$, las trayectorias de los nodos se identificaron con las líneas de flujo correspondientes al permanente asociado a un problema térmico ficticio; cuya solución la determinan un salto térmico también artificial y apropiadas condiciones de contorno.

Dos de las estrategias fueron aplicadas al mallado de las cámaras de un compresor original, arribándose a resultados satisfactorios que infieren una disminución de las instancias de remallado necesarias para el abordaje de problemas similares apelando a otras técnicas conocidas. Finalmente, dentro de un rango de comparación válido, fueron cotejados los resultados obtenidos.

9 REFERENCIAS

- [1] S. Unverdi and G. Tryggvason, *A front tracking method for viscous, incompressible, multifluid flows*. Journal of computational Physics, pp. 100-125, (1992)
- [2] T. Tezduyar, M. Behr and J. Liou, *New strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces. The deforming-spatial-domain/space-time procedure. I. The concept and the preliminary numerical tests.*, Comp. Meth. Applied Mech. and Engineering, Vol. 94, pp. 339-351, (1992)
- [3] T. Tezduyar, M. Behr, S. Mittal and J. Liou, *New strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces. The deforming-spatial-domain/space-time procedure. II. Computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders.*, Comp. Meth. Applied Mech. and Engineering, Vol. 94, pp. 353-371, (1992)
- [4] A. Huerta and W. Liu, *Viscous flow with large free-surface motion*, Comp. Meth. Applied Mech. and Engineering, Vol. 69, pp. 277-324, (1988)
- [5] C. Hirt and B. Nichols, *Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries*, Journal of computational Physics, Vol. 39, pp. 201, (1981)
- [6] J. Sethian, *Level set methods and fast marching methods*. Cambridge Press, 1999.

- [7] M. Sussman, P. Smereka and S. Osher, *A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flows*. Journal of computational Physics, pp. 114-146, (1994)
- [8] I. Demirdzic, M. Peric, *Finite volume method for prediction of fluid flow in arbitrarily shaped domains with moving boundaries*, Int. Journal for Num. Meth. in Fluids, Vol. 10, pp. 771-790 (1990).
- [9] J. Trepanier, M. Reggio, M. Paraschivoiu and R. Camarero, *Unsteady Euler solutions for arbitrarily moving bodies and boundaries*, AIAA Journal, Vol. 31, N. 10, pp. 1869-1874, (1993)
- [10] J. Trepanier, M. Reggio, H. Zhang and R. Camarero, *A finite volume method for solving the Euler equations on arbitrary Lagrangian-Eulerian grid*, Computer and Fluids, Vol. 20, N 4, pp. 399-409, (1991)
- [11] C. Farhat, M. Lesoinne and P. Stern, *High performance solution of three-dimensional nonlinear aeroelastic problems via parallel partitioned algorithms: methodology and preliminary results*, Advances in Engineering Software, Vol. 28, pp. 43-61, (1997)
- [12] I. Lomtev, R. Kirby, G. Karniadakis, *A discontinuous Galerkin ALE method for compressible viscous flows in moving boundaries*, Journal of Comp. Physics", Vol. 155, pp. 128-159, (1999)
- [13] J. Donea, S. Giuliani, J. Halleux, *An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions*, Comp. Meth. Applied Mech. and Engineering, Vol. 33, pp. 689-723, (1982)
- [14] T. Nomura, T. Hughes, *An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body*, Comp. Meth. Applied Mech. and Engineering, Vol. 95, pp. 115-138, (1992)
- [15] W. Tworzydło, C. Huang, J. Oden, *Adaptive implicit/explicit finite element methods*, Comp. Meth. Applied Mech. and Engineering, Vol. 97, pp. 245-288, (1992)
- [16] R. Lohner, C. Yang, *Improved ALE mesh velocities for moving bodies*, Communications in Num. Meth. in Engineering, Vol. 12, pp. 599-608, (1996)
- [17] J. Toth, J. Di Nezio, C. Staniscia y E. López, *Ventajas mecánicas y termodinámicas de un nuevo motor rotativo*, 9º Congreso Chileno de Ingeniería Mecánica, 2000.
- [18] S. S. Rao, *Engineering optimization, theory and practice*, Third Edition, John Wiley & Sons, 1995.