

## **DESARROLLO DE UNA ESTIMADOR DEL ERROR EN EL MÉTODO SIN MALLA DE PUNTOS FINITOS**

**F. Perazzo<sup>†</sup>, J. Miquel<sup>\*</sup> y E. Oñate<sup>\*</sup>**

<sup>†</sup>Departamento de Mecánica, Universidad Técnica Federico Santa María  
Avenida España 1680, Valparaíso- Chile  
e-mail: franco.perazzo@usm.cl

<sup>\*</sup> Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Universidad Politécnica de Cataluña  
Edificio C1, Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España  
e-mail : cimne@cimne.upc.es, web <http://www.cimne.upc.es>

**Palabras claves:** Métodos sin malla, Método de Puntos Finitos, Estimación del error.

**Resumen.** *Desde sus comienzos, el método de puntos finitos (MPF) ha demostrado ser una técnica totalmente libre de malla para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. En el presente trabajo se analiza la formulación e implementación del método, con el propósito de estimar el error cometido en la aproximación numérica. Se analizará la dependencia existente entre la técnica de interpolación, el esquema de discretización utilizado y el error cometido en la aproximación. Se analizará como posible medida de estimación del error el funcional de la interpolación por mínimos cuadrados ponderados utilizado en el cálculo de la función de forma. Finalmente se desarrollarán algunos ejemplos para demostrar la aplicación del estimador del error propuesto cuando se implementa un proceso de solución adaptable.*

## 1 INTRODUCCIÓN

El desarrollo de métodos numéricos sin malla o libres de malla, permite plantear una forma alternativa de solución en algunos problemas de mecánica computacional, que tradicionalmente pueden ser resueltos mediante técnicas numéricas como el Método de Elementos Finitos (MEF) o el de Volúmenes Finitos. La ausencia total en éstos métodos de una malla de elementos o de elementos, disminuye el tiempo invertido en la preparación de la información necesaria para el cálculo y tiene ventajas, sobre todo en problemas donde se hace necesario contar con un generador de malla eficiente y robusto. La manera de realizar la interpolación local de la función aproximada y la forma de obtener el sistema de ecuaciones diferenciales discretas que gobiernan el problema, a dado lugar a distintas familias de métodos numéricos sin malla<sup>1,2,3</sup>.

En el MPF<sup>4,5,6,7</sup> la aproximación local se obtiene mediante la técnica estándar de mínimos cuadrados ponderados, utilizándose colocación puntual para obtener el sistema de ecuaciones discretas. La consistencia y convergencia del método ha sido analizada con anterioridad por los autores, demostrándose el correcto comportamiento del método para problemas de la estática y la dinámica lineal elástica de sólidos<sup>8,9,10</sup>. En el presente trabajo se analiza si el funcional de la interpolación por mínimos cuadrados ponderados puede ser utilizado como un posible estimador del error.

## 2 CONCEPTOS BÁSICOS EN EL MÉTODO DE PUNTOS FINITOS

Sea un problema escalar gobernado por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$A(u) = b \quad \text{en } \Omega \quad (1)$$

con sus correspondientes condiciones de contorno

$$B(u) = t \quad \text{en } \Gamma_t$$

$$u - u_p = 0 \quad \text{en } \Gamma_u \quad (2)$$

que deben ser satisfechas en el dominio  $\Omega$  de contorno  $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$ . En las anteriores ecuaciones  $A$  y  $B$  son operadores diferenciales apropiados,  $u$  es la función incógnita del problema y  $b$ ,  $t$ , representan las fuerzas de cuerpo y las fuerzas externas actuando sobre el dominio  $\Omega$  y sobre el contorno  $\Gamma_t$  respectivamente. Por último  $u_p$  representa el valor prescrito de la función incógnita  $u$  sobre el contorno  $\Gamma_u$ . En problemas de mecánica de sólidos la función  $u$  representará los desplazamientos y  $A$ ,  $B$ , las ecuaciones de equilibrio que deben ser satisfechas en el dominio  $\Omega$  y en el contorno  $\Gamma_t$  donde se prescriben las tracciones.

Un procedimiento general para resolver numéricamente el anterior sistema de ecuaciones diferenciales parciales, es el método de los residuos ponderados. Utilizando este procedimiento, la función incógnita  $u$  se aproxima mediante funciones de prueba  $\hat{u}$  y las ecuaciones (1),(2) son reemplazadas por<sup>11</sup>:

$$\int_{\Omega} W_i [A(\hat{u}) - b] d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{W}_i [B(\hat{u}) - t] d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \overline{\bar{W}}_i [\hat{u} - u_p] d\Gamma = 0 \quad (3)$$

donde las funciones de ponderación  $W_i$ ,  $\bar{W}_i$ , y  $\overline{\bar{W}}_i$  se eligen de diferentes maneras. En particular, si  $W_i = \bar{W}_i = \overline{\bar{W}}_i = \delta_i$  donde  $\delta_i$  es el delta de Dirac, se obtiene el método de colocación puntual utilizado en este trabajo.

### 2.1 Interpolación mediante mínimos cuadrados ponderados

Sea  $\Omega_i$ , el dominio de interpolación de una función  $u(x)$ , usualmente llamado nube en los métodos sin malla, y  $s_j$  con  $j = 1, 2, \dots, n$  una colección de  $n$  puntos con coordenadas  $x_j \in \Omega_i$ . La función incógnita  $u(x)$  puede ser aproximada en el interior de  $\Omega_i$  por :

$$u(x) \cong \hat{u}(x) = \sum_{l=1}^m p_l(x) \alpha_l = \mathbf{p}(x)^T \underset{\sim}{\alpha} \quad (4)$$

donde  $\underset{\sim}{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]^T$  y el vector  $\mathbf{p}(x)$ , llamado “base de interpolación”, contiene típicamente monomios que aseguran en el espacio de coordenadas una base completa. Como ejemplo para un problema en 2D, tomando un polinomio cuadrático se tiene:

$$\mathbf{p}(x) = [1, x, y, x^2, xy, y^2]^T \quad \text{con} \quad m = 6$$

La función incógnita  $u(x)$  puede ser evaluada en los  $n$  puntos del dominio  $\Omega_i$ , obteniendo :

$$\mathbf{u}^h = \begin{Bmatrix} u_j^h \\ u_2^h \\ \vdots \\ u_n^h \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \end{Bmatrix} \underset{\sim}{\alpha} = \mathbf{C} \underset{\sim}{\alpha} \quad (5)$$

donde  $u_j^h = u(x_j)$  son las incógnitas, pero los valores buscados de la función  $u$  en el punto  $j$ ,  $\hat{u}_j = \hat{u}(x_j)$  son valores aproximados, y  $\mathbf{p}_j = \mathbf{p}(x_j)$ .

En una aproximación mediante elementos finitos, el número de puntos se escoge de forma que  $m = n$ . En este caso  $\mathbf{C}$  es una matriz cuadrada y el procedimiento conduce a las funciones de forma estándar del método de elementos finitos<sup>11</sup>.

Si  $n > m$ , la matriz  $\mathbf{C}$  no es cuadrada y la aproximación no puede adaptarse a todos los valores de  $u_j^h$ . El problema puede ser resuelto, determinando los valores de  $\hat{u}$  que minimicen la suma de la distancia al cuadrado del error en cada punto, ponderado por una función  $\varphi(x)$ , es decir:

$$J = \sum_{j=1}^n \varphi(x_j) (u_j^h - \hat{u}(x_j))^2 \quad \text{Mínimo} \quad (6)$$

De la minimización estándar del funcional  $J$  respecto de  $\alpha$ , se obtiene :

$$\alpha \approx \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{u}^h, \quad \bar{\mathbf{C}}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (7)$$

donde

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^n \varphi(x_j) \mathbf{p}(x_j) \mathbf{p}^T(x_j)$$

$$\mathbf{B} = [\varphi(x_1) \mathbf{p}(x_1), \varphi(x_2) \mathbf{p}(x_2), \dots, \varphi(x_n) \mathbf{p}(x_n)] \quad (8)$$

Nótese que si  $\varphi(x)=1$ , se obtiene el método estándar de mínimos cuadrados. Substituyendo  $\alpha$  de la ecuación (7) en (4), la aproximación final adopta la siguiente forma :

$$\hat{u}(x) = \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{u}^h = \mathbf{N}^T \mathbf{u}^h = \sum_{j=1}^n N_j^i u_j^h \quad (9)$$

con las funciones de forma

$$N_j^i(x) = \sum_{l=1}^m p_l(x) \bar{C}_{lj}^{-1} = \mathbf{p}^T(x) \bar{\mathbf{C}}^{-1} \quad (10)$$

Se debe notar que de acuerdo al carácter de mínimos cuadrados de la aproximación

$$u(x_j) \cong \hat{u}(x_j) \neq u_j^h \quad (11)$$

es decir los valores locales de la función aproximada, no coinciden con los valores nodales de la función incógnita (Figura 1). De todas formas  $\hat{u}$  es una aproximación válida que cumple la ecuación diferencial y sus condiciones de contorno, siendo  $u_j^h$  simplemente parámetros desconocidos.

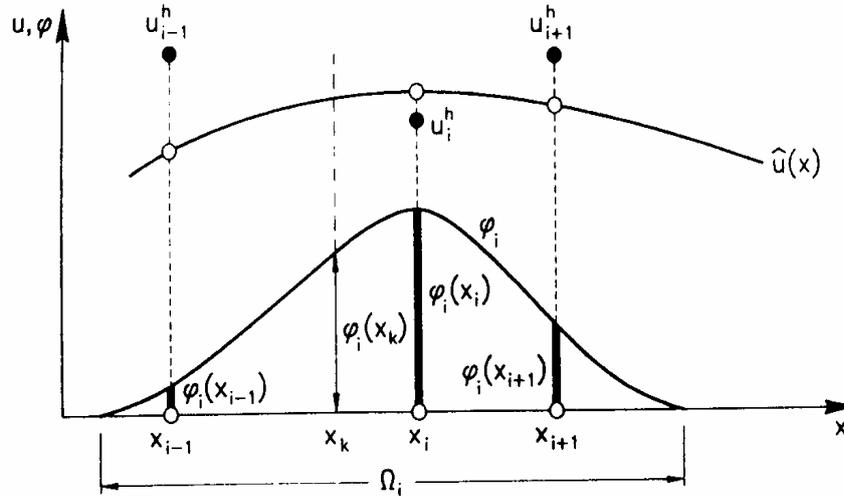


Figura 1. Interpolación de mínimos cuadrados ponderados. Función de ponderación fija

La aproximación mediante mínimos cuadrados ponderada descrita anteriormente, depende en gran medida de la forma y manera de aplicar la función de ponderación  $\varphi(x)$ . Esta usualmente se construye de forma que adopte valores unitarios en la vecindad del punto “ $i$ ” donde la función o su derivada se deben calcular, típicamente llamado “nodo estrella”, y se anule fuera de la “nube” o dominio de interpolación  $\Omega_i$ . La forma más simple consiste en definirla como una función fija para cada dominio  $\Omega_i$ , cumpliéndose :

$$\varphi_i(x_i) = 1; \quad \varphi_i(x) \neq 0, x \in \Omega_i; \quad \varphi_i(x) = 0, x \notin \Omega_i \quad (12)$$

Una elección común para  $\varphi(x)$  es utilizar la función de Gauss normalizada<sup>1,3</sup>, que será precisamente la utilizada para el caso de los ejemplos mostrados en el presente artículo. Se debe notar, de acuerdo con (4), que la función aproximada  $\hat{u}(x)$  está definida para cada dominio de interpolación  $\Omega_i$ , por lo que diferentes dominios de interpolación suelen dar diferentes funciones de forma  $N_j^i$ .

Como consecuencia de esto, un punto perteneciente a dos o más sub-dominios de interpolación tendrá diferentes valores para la función de forma, es decir  $N_j^i \neq N_j^k$ . La interpolación tiene entonces más de un valor dentro del dominio  $\Omega_i$ , por lo que es necesario tomar una decisión que permita limitar la elección a un único valor. Por ejemplo utilizando colocación puntual, se puede limitar la validez de la interpolación a un sólo punto  $x_i$ <sup>3,4</sup>.

## 2.2 Discretización del sistema de ecuaciones

La selección de diferentes funciones de ponderación en la ecuación (3) permite obtener distintos conjuntos de ecuaciones discretas. Para conservar el carácter sin malla del método estas deben quedar definidas, al igual que sus derivadas, solamente por la posición de los puntos localizados dentro del dominio de análisis. Por tanto, cualquier volumen o superficie de integración debe ser independiente del procedimiento de interpolación utilizado.

Lo anterior implica que en métodos de aproximación del tipo integral<sup>12,13,14,15</sup> (Galerkin, colocación por sub-dominios, etc.) sea necesario recurrir a diversos procedimientos para realizar la integración, como utilizar mallas auxiliares o de fondo.

En el MPF no hace falta realizar integración alguna, puesto que se utiliza un esquema de colocación puntual. Con este procedimiento se pueden aprovechar completamente las ventajas de usar un método sin malla. El procedimiento de colocación puntual con una interpolación de mínimos cuadrados ha sido utilizado por Batina<sup>16</sup>, para desarrollar algoritmos sin malla en la solución de problemas de flujos de Euler y Navier-Stokes. Utilizando este tipo de aproximación, el sistema de ecuaciones discretas a resolver es:

$$[A(\hat{u})]_i - b_i = 0 \quad \text{en } \Omega \quad i = 1, N_a \quad (13)$$

$$[B(\hat{u})]_j - t_j = 0 \quad \text{en } \Gamma_t \quad j = 1, N_t \quad (14)$$

$$(\hat{u} - u_p)_k = 0 \quad \text{en } \Gamma_u \quad k = 1, N_u \quad (15)$$

donde  $N_a$  es el número de puntos en el interior del dominio y  $N_t$ ,  $N_u$  es el número de puntos en los contornos  $\Gamma_t$  y  $\Gamma_u$ , respectivamente. Aplicando la función de forma definida en (10) para aproximar  $\hat{u}$ , se obtiene un sistema de ecuaciones en forma matricial compacta como:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}^h = \mathbf{f} \quad (16)$$

El vector  $\mathbf{u}^h$  contiene los valores buscados de los parámetros  $u_i^h$ , en tanto el vector  $\mathbf{f}$  contiene la contribución de las fuerzas  $b$ ,  $t$  y de los valores prescritos  $u_p$ . Desafortunadamente, el anterior sistema de ecuaciones presenta algunos problemas debido al mal condicionamiento de la matriz  $\mathbf{K}$  por el tipo de aproximación numérica utilizada. Diferentes técnicas han sido propuestas en el pasado para estabilizar la solución numérica<sup>17</sup>. Para el MPF, a continuación se presenta una forma alternativa de realizar esta estabilización.

### 2.3 Estabilización del sistema de ecuaciones

Uno de los aspectos fundamentales para la correcta utilización del MPF es la estabilización de las ecuaciones en su forma discreta. La forma estabilizada de la ecuación diferencial (13) en el dominio  $\Omega$ , se puede obtener a partir de la técnica de cálculo finitesimal<sup>18,19</sup>. Siguiendo este procedimiento, la ecuación estabilizada en el dominio para un problema escalar es :

$$r - \frac{1}{2} h \frac{\partial r}{\partial x} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (17)$$

donde, en general

$$r = [A(\hat{u}) - b] \quad (18)$$

siendo  $h$ , la longitud característica del dominio "finito" donde son impuestas las ecuaciones de balance. Una importante diferencia y seguramente una de las principales dificultades en la implementación de los métodos sin malla, es la forma de prescribir las condiciones de contorno. Tal como se ha puntualizado anteriormente, la aproximación no es capaz de capturar los valores nodales de la función incógnita, en consecuencia, para imponer la condición de contorno de Neumann (ecuación 14), y la condición de contorno de Dirichlet

(ecuación 15), se debe utilizar alguna técnica especial. Diferentes autores han propuesto para solventar este problema técnicas como métodos de penalización, aproximación mediante multiplicadores de Lagrange, principios variacionales o acoplar en el contorno una franja de elementos finitos<sup>1,2,13</sup>.

A través de diversos ejemplos resueltos se ha comprobado que la imposición de la condición de contorno de Neumann mediante la ecuación (14), conduce a valores inestables de la solución cuando se implementa en el MPF. Para superar este inconveniente se ha utilizado la misma técnica del cálculo finitesimal que permite obtener (17), pero esta vez aplicando las ecuaciones de balance sobre un dominio finito en el contorno de longitud  $h/2$ . De esta forma la ecuación estabilizada en el contorno de Neumann es<sup>18</sup>:

$$[B(\hat{u}) - t] - \frac{1}{2} h r = 0 \quad \text{en } \Gamma_t \quad (19)$$

donde  $r$  y  $h$ , corresponden a los términos definidos anteriormente.

La forma de imponer la condición de contorno de Dirichlet se realiza por colocación puntual utilizando la ecuación (15). Es importante señalar que en este caso la condición de contorno de Dirichlet se satisface en el sentido de los mínimos cuadrados.

Las ecuaciones estabilizadas (17) y (19), también han sido utilizadas en la aplicación del MPF en mecánica de fluidos<sup>6,7,19,20,21</sup>. Se debe notar que si en las anteriores ecuaciones  $h$  tiende a cero, es decir cuando la longitud característica del dominio de balance es infinitesimal, se recuperan en su forma original las ecuaciones de gobierno del problema escalar (13) y (14). En los ejemplos que se analizan a continuación se ha calculado la longitud característica  $h$ , como una proporción de un parámetro típico de la nube, de la siguiente forma:

$$h = [h_x \ h_y]^T = d^{\min} \quad (20)$$

donde las componentes del vector  $h$  son las distancias en la nube, entre el “nodo estrella” y el nodo más cercano a este (Figura 2).

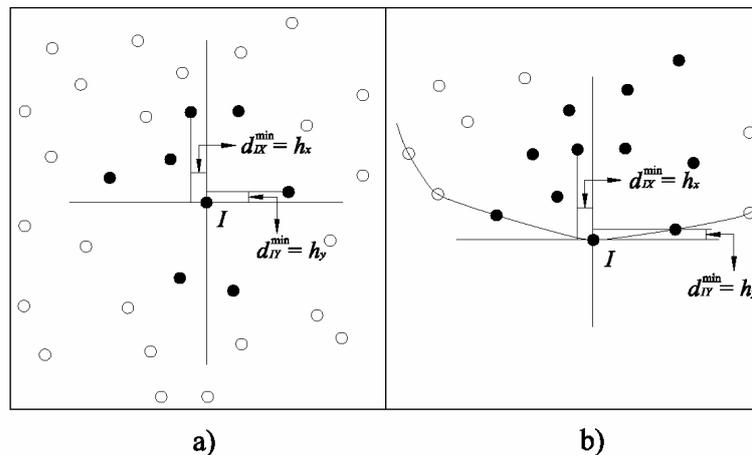


Figura 2. Término  $h$  para a) una nube en el interior del dominio y b) para una nube del contorno

### 3 ESTIMACIÓN DEL ERROR MEDIANTE EL FUNCIONAL J

Un test para comprobar la convergencia de un método sin malla, ampliamente difundido en la literatura “meshless”<sup>2,14</sup>, consiste en resolver una ecuación cuya solución analítica permita generar un gradiente de magnitud controlada en un punto concreto del dominio de análisis. En particular se propone resolver la ecuación de Poisson 1D

$$\frac{d^2u}{dx^2} = b(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (21)$$

cuyo término independiente y condiciones de contorno se ajustan a lo siguiente

$$b(x) = 2 \frac{\delta}{1 + \delta^2(x - x_0)^2} + 2(1 - x)(x - x_0) \frac{\delta^3}{(1 + \delta^2(x - x_0)^2)^2}$$

$$u(x)_{x=0} = u(x)_{x=1} = 0$$

siendo  $\delta = 60$  y  $x_0 = 0.5$  los parámetros que controlan la magnitud del gradiente y el punto del dominio en donde este se genera, respectivamente. Utilizando distribuciones regulares de 11, 21, 41 y 81 puntos, con nubes de  $n = 5$  puntos y un polinomio cuadrático de interpolación, las Figuras 3 y 4 muestran la correcta convergencia del MPF para este test.

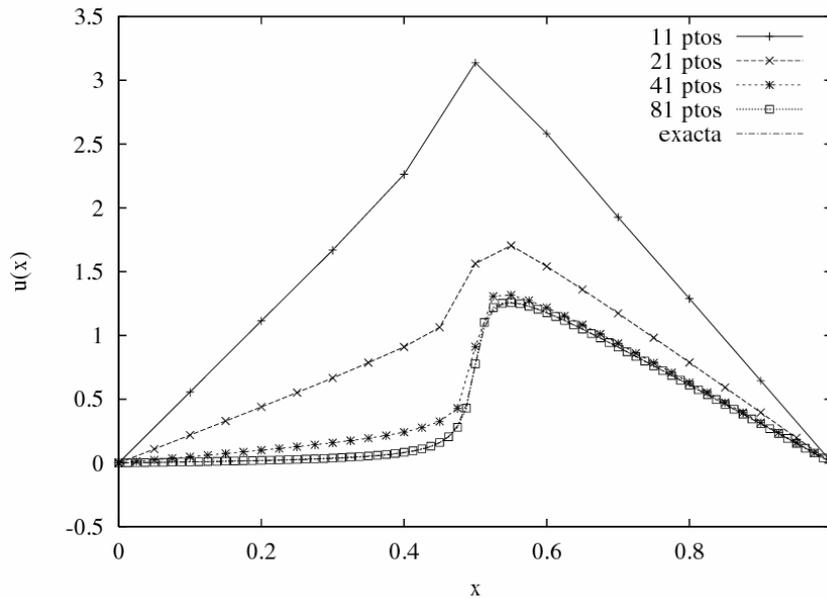


Figura 3. Convergencia de la solución. Test 1D con gradiente

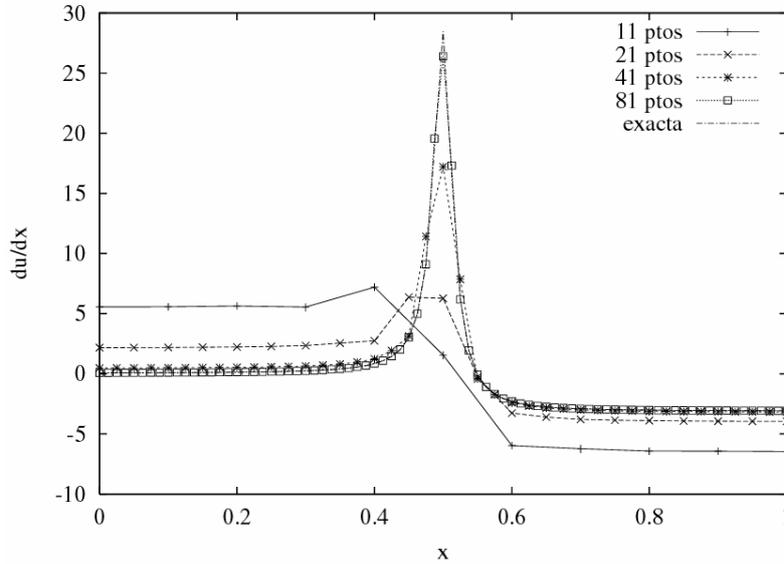


Figura 4. Convergencia de la derivada de la solución. Test 1D con gradiente

Como se puede ver de las figuras anteriores, existe una marcada tendencia del error relativo que se comete en los distintos puntos, esto debido a que los errores máximos en la solución se encuentran en la primera mitad del dominio, mientras que los errores en la derivada se concentran alrededor del gradiente. Como se sabe cuales son las zonas donde se concentra el error, es razonable suponer que adaptando la discretización de puntos en estas zonas, el error global de la solución disminuya. Para comprobar esto se analiza la distribución del error, pero esta vez se realiza una discretización de 51 puntos equiespaciados por tramos según el siguiente criterio

$$\begin{aligned}
 0 \leq x \leq 0.3 & & h^* &= 0.02 \\
 0.3 < x \leq 0.5 & & h^* &= 0.01 \\
 0.5 < x \leq 0.75 & & h^* &= 0.025 \\
 0.75 < x \leq 1 & & h^* &= 0.05
 \end{aligned}$$

( $h^*$  es la distancia entre puntos)

La tabla 1 demuestra la disminución del error que se consigue, en la solución y su derivada, utilizando este criterio de adaptatividad. Se han utilizado para el cálculo las normas globales del error en desplazamientos  $L_2$  y en energía  $H_1$  para un caso 1D.

	$L_2$	$H_1$	Desplazamiento máximo	Deformación máxima
N=51 uniforme	0.018	0.14	0.66	1.12
N=51 adaptativo	0.0078	0.011	0.16	0.29
Disminución relativa	43%	8.1%	25%	26%

Tabla 1. Comparación del error para una discretización de puntos uniformes y una discretización adaptable

Para saber si es posible utilizar el funcional  $J$  (recordar ecuación 6) como posible estimador del error, se ha resuelto el ejemplo de una barra empotrada sometida a una carga axial  $P$  en un extremo, cuyo comportamiento queda definido mediante la ecuación diferencial

$$-\frac{d}{dx} \left[ EA(x) \frac{du}{dx} \right] = p(x) \quad 0 < x < l$$

con sus condiciones de contorno

$$u(0) = 0 \quad , \quad EA(l) \frac{du}{dx} \Big|_l = P$$

y las propiedades mecánicas, geométricas y de carga siguientes:  $E=210 [GPa]$ ,  $A=0.5[m^2]$ ,  $l=5[m]$ ,  $p(x)=200[kN/m]$  y  $P=3000[kN]$ .

Se ha estudiado el comportamiento del error relativo y del funcional  $J$  para un aumento de la base de interpolación ( $m=3,4,5,6$ ), manteniendo fijo el número  $n$  de puntos por nube. En lo sucesivo cada problema se indicará con la nomenclatura  $Pmn$  para identificar el número de términos  $m$  de la base de interpolación utilizado y el número  $n$  de puntos de la nubes, respectivamente. En primer lugar la Figura 5 muestra la variación del error en desplazamientos para los casos  $P36$ ,  $P46$ ,  $P56$  y  $P66$ . A continuación se indica en la Figura 6 el valor del funcional  $J$  para los mismos casos. Ambas figuras indican una disminución del error en la medida que aumenta el número de términos de la base de interpolación.

Se ha analizado la convergencia del error para el ejemplo, manteniendo el número de términos de la base de interpolación en un valor fijo ( $m=4$ ), mientras se varía el número de puntos en los subdominios de interpolación o nubes. Al respecto, la Figura 7 muestra la distribución del error relativo en desplazamientos y en deformaciones para los casos  $P44$ ,  $P45$ ,  $P46$  y  $P47$ . Se puede apreciar que para una base de interpolación cúbica, se consigue una mejor precisión con  $n=7$  que con  $n=6$ , lo que pone de manifiesto que existe una cierta sensibilidad a la simetría de las nubes.

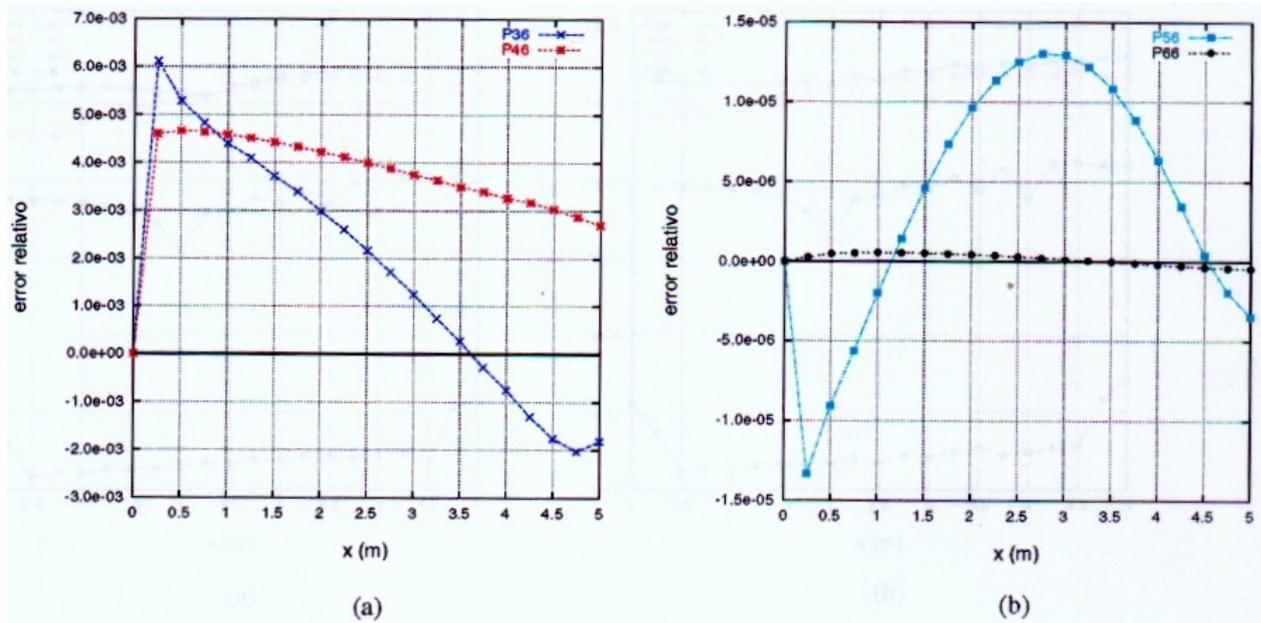


Figura 5. Distribución del error relativo en desplazamientos

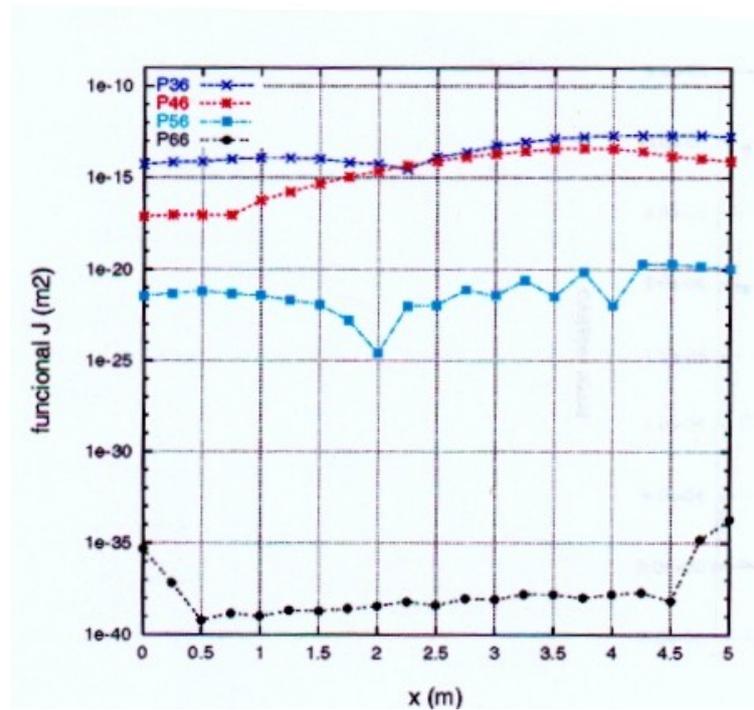


Figura 6. Distribución del funcional J

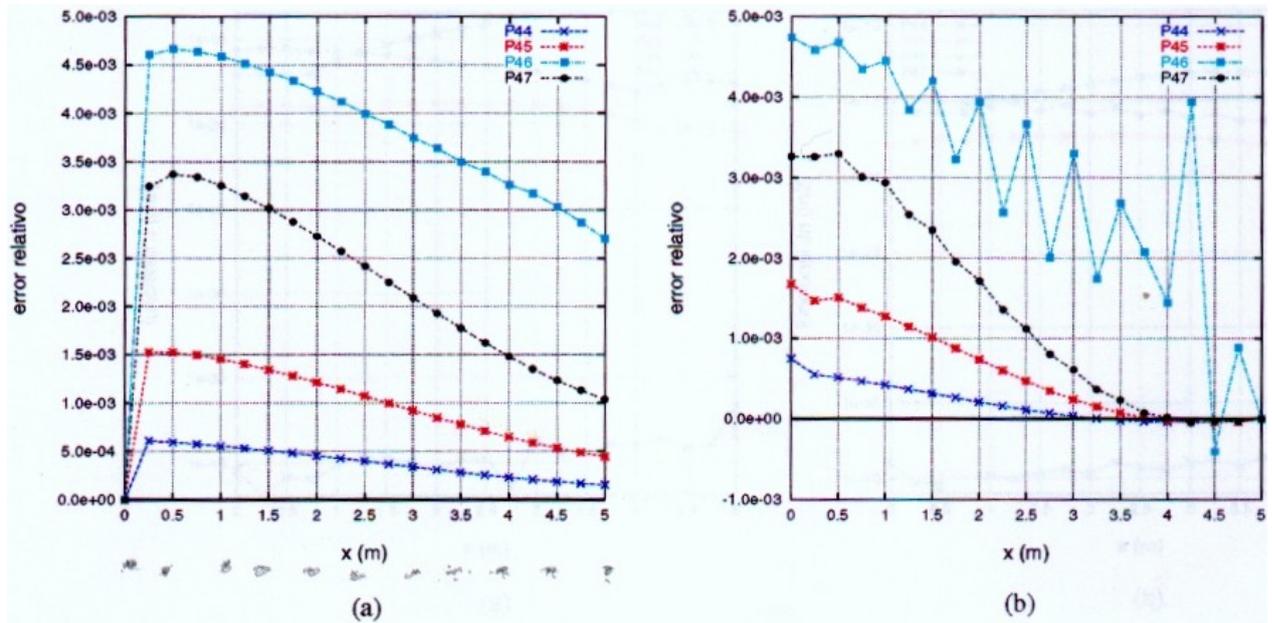


Figura 7. Distribución del error relativo en (a) desplazamientos y (b) deformaciones

Este comportamiento también se puede apreciar en la gráfica del funcional  $J$  para estos casos. Al respecto, la Figura 8 muestra la utilidad del funcional para apuntar parámetros generales del comportamiento de la solución numérica, puesto que su valor aumenta en la medida que crece la diferencia  $n-m$ .

#### 4 CONCLUSIONES

Se han presentado las tendencias del funcional de mínimos cuadrados ponderados del MPF para problemas 1D con distintas bases de interpolación y número de puntos por nubes. A la vista de los resultados que se obtienen se puede concluir que el funcional efectivamente entrega indicios del error de interpolación numérico. Por otro lado, no se ha constatado una diferencia sustancial en el uso de la versión ponderada del funcional, respecto de la versión estándar, a efectos de estimación del error.

Considerando que el error de interpolación es sólo una parte del error de discretización, se puede asumir que valores bajos del funcional  $J$  son deseables para la convergencia de la solución en el MPF.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el soporte entregado en la realización del presente trabajo a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica del gobierno de Chile, mediante el Proyecto FONDECYT 1040371.

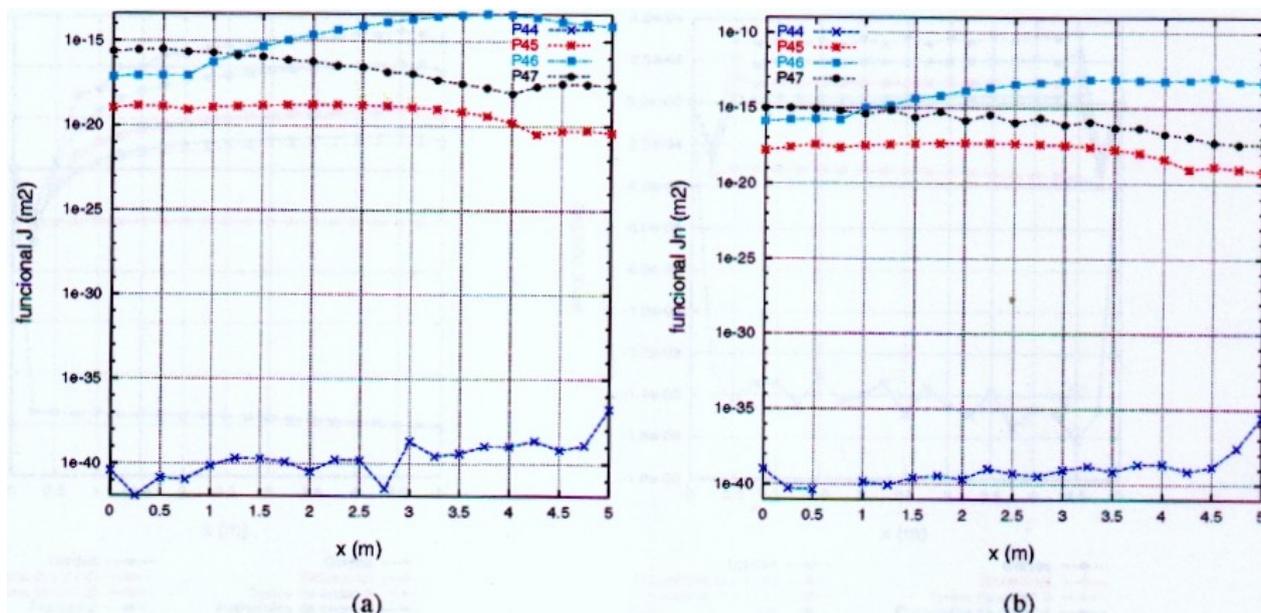


Figura 8. Distribución del funcional J en su versión (a) ponderada y (b) no ponderada

## 5 REFERENCIAS

- [1] T. Belytschko, Krongauz Y., Organ D., Fleming M. Krysl P, Meshless Method: An overview and recent developments, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol 139,3-48 (1996b).
- [2] A. Duarte C., A review of some Meshless Method to solve Partial Differential Equations, University of Texas, TICAM Report 95-06 (1995).
- [3] E. Oñate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz, *Finite point method in computational mechanics*, Research Report N°67, CIMNE, Barcelona (1995).
- [4] E. Oñate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz and T. Fisher, *A finite point method for analysis of fluid flow problems*, Proceedings of the 9th Int. Conference on Finite Element Methods in Fluids, Venize, Italy, 15-21 (1995).
- [5] E. Oñate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow*, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 39, 3839-3866 (1996).
- [6] E. Oñate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems*, Comput. Meth. in Appl. Engng., Vol. 139, 1-4, pp. 315-347 (1996).
- [7] E. Oñate and S. Idelsohn, *A mesh free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems*, Computational Mechanics, 21, 283-292 (1998).
- [8] E. Oñate, F. Perazzo and J. Miquel, *Advances in stabilized finite point method for structural mechanics*, Report 164 CIMNE, Barcelona (1999).
- [9] E. Oñate, F. Perazzo and J. Miquel, *A finite point method for elasticity problems*, Computers & Structures, Vol 79, pp. 2151-2163 (2001).
- [10] F. Perazzo, E. Oñate y J. Miquel, *Una metodología numérica sin malla para la*

*resolución de las ecuaciones de elasticidad mediante el método de puntos finitos*, Monografía CIMNE N° 81, Barcelona (2003).

- [11] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *The finite element method*, 4th Edition, Vol. 1, McGraw Hill (1989).
- [12] T. Belytschko, Y.Lu and L.Gu, *Element free Galerkin methods*, Int. J. Num. Meth. Engng., 229-56 (1994).
- [13] J. Dolbow and T. Belytschko, *An introduction to programming the meshless element free Galerkin method*, Archives of Comput. Meth. in Engng., 5 (3), 207-241 (1998).
- [14] W.K. Liu, S. Jun, S. Li, J. Adee and T. Belytschko, *Reproducing Kernel particle methods for structural dynamics*, Int. J. Num. Meth. Engng., 1655-1679 (1995).
- [15] W.K. Liu, Y Chen, S. Jun, J.S. Chen, T. Belytschko, C. Pan, R.A. Uras and C.T. Chang, *Overview and applications of the Reproducing Kernel particle method*, Archives of Comput. Meth. in Engng., Vol. 3(1), 3-80 (1996).
- [16] J. Batina, *A gridless Euler/Navier-Stokes solution algorithm for complex aircraft applications*, AIAA 93-0333, Reno NV, January 11-14 1993.
- [17] S. Beissel and T. Belytschko, *Nodal integration of the element-free Galerkin method*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 139 (1996).
- [18] E. Oñate, *On the stabilization of numerical Solution for advective-diffusive transport and fluid flow problem*, Report CIMNE N°81, October 1996.
- [19] E. Oñate, *Derivation of stabilized equations for advective-diffusive transport and fluid flow problems*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol. 151, 1-2, pp. 233-267 (1998).
- [20] E. Oñate, J. García a and S. Idelsohn, *An Alpha-adaptive approach for stabilized finite element solution of advective-diffusive problems with sharp gradients*, New Adv. in Adaptive Comp. Met. in Mech., P. Ladeveze and J.T. Oden (Eds.), Elsevier (1998).
- [21] E. Oñate, J. García and S. Idelsohn, *Computation of the stabilization parameter for the finite element solution of advective-diffusive problems*, Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 25, pp. 1385-1407 (1997).