

## IMPLEMENTACION EFICIENTE DE UNA ESTRATEGIA DE ELEMENTOS DE BORDE POR PONDERACION DE GALERKIN

Sofía Sarraf<sup>a,b</sup>, Ezequiel López<sup>a,b</sup>, Gustavo Ríos Rodríguez<sup>b</sup>, Laura Battaglia<sup>b,c</sup> y Jorge D'Elía<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Departamento de Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue,  
CONICET, Buenos Aires 1400, Neuquén (Q8300IBX), Argentina  
e-mail: (ssarraff, ezequiel.jose.lopez)@gmail.com

<sup>b</sup> Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC)  
Universidad Nacional del Litoral (UNL) - CONICET  
Predio Conicet-Santa Fe, Colectora Ruta Nac 168 / Paraje El Pozo, Santa Fe (S3000GLN), Argentina  
e-mail: gusadrr@yahoo.com.ar, jdelia@intec.unl.edu.ar, web page: <http://www.cimec.org.ar>

<sup>c</sup> Grupo de Investigación en Métodos Numéricos en Ingeniería (GIMNI)  
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Santa Fe  
Lavaysse 610, Santa Fe (S3000GLN), Argentina  
e-mail: lbattaglia@santafe-conicet.gob.ar

**Palabras Clave:** método de elementos de borde, técnica de colocación, ponderación de Galerkin, flujo reptante, flujo estacionario, flujo tridimensional.

**Resumen.** En trabajos anteriores de estos mismos autores, se ha validado el Método de Elementos de Borde (BEM, por *Boundary Element Method*) aplicado a la resolución del flujo de Stokes alrededor de cuerpos rígidos tridimensionales en régimen estacionario. El problema fue modelado mediante una ecuación integral de borde (BIE, por *Boundary Integral Equation*) en la alternativa CIV (*Completed Indirect Velocity*), la cual es de tipo indirecta y de segunda clase, y cuyo término fuente es función de la velocidad no perturbada. Para resolver la BIE resultante, se habían aplicado tanto la técnica de colocación al centroide de los elementos como el método de ponderación de Galerkin (GBEM, por Galerkin BEM). Desde el punto de vista del costo computacional en cuanto al requerimiento de memoria, la técnica GBEM posee la ventaja de tener un número de grados de libertad menor que la de colocación. Además, sólo en el caso de GBEM la matriz del sistema de ecuaciones resultante es simétrica. Sin embargo, en la extensión empleada en trabajos anteriores del esquema de GBEM propuesto por Taylor (IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 51(7):1630–1637 (2003)) para el cómputo de las integrales cuádruples de interacción con una singularidad débil para cada par de elementos, hasta ahora no se había tenido en cuenta la simetría de la matriz. Aprovechando esta última propiedad, es posible obtener una disminución de los tiempos de ensamblaje de la matriz del sistema. En este trabajo se presentan los resultados obtenidos en la reducción de los tiempos de cómputo alcanzados con una implementación que considera la simetría de la matriz en el caso GBEM. La modificación se valida comparando con el método tradicional en geometrías con soluciones analíticas, semianalíticas, o numéricas de literatura.

## 1. INTRODUCCION

Como es conocido, el método de elementos de borde (BEM, por *Boundary Element Method*), se basa en la formulación de un problema de valores de borde de tipo elíptico, como una ecuación integral de contorno o de borde (BIE, por *Boundary Integral Equation*), e.g. ver [Sauter y Schwab \(2011\)](#). En sus formulaciones más clásicas, los elementos interactúan todos contra todos, lo cual conduce a matrices de influencia llenas (densas), cuyo cómputo involucra un costo computacional  $O(M^2)$ , donde  $M$  es el número de grados de libertad.

En trabajos previos ([D'Elía et al., 2008, 2009](#); [D'Elía et al., 2011](#); [Sarraf et al., 2013b,a](#)) se introdujo una extensión del esquema de [Taylor \(2003a\)](#), (ver también [Taylor \(2003b\)](#)), para el cómputo de las integrales cuádruples de interacción con una singularidad débil por cada par de elementos; extensión que consistía en una cuadratura numérica en las cuatro variables de integración en lugar de un esquema de tres cuadraturas numéricas y una integración analítica empleado por Taylor. De todos modos subsistía el hecho que, hasta ahora, no se había tenido en cuenta la eventual simetría de la matriz del sistema para ahorrar tiempo de cómputo.

El ensamblaje de la matriz del sistema para GBEM se realiza mediante un doble lazo sobre todos los elementos que, en general, no se puede reducir, aunque sí es posible aprovechar la eventual simetría en la matriz elemental, que se obtiene como una doble integral de superficie cuyo integrando es un doble producto matricial. La simetría será posible siempre que el doble producto matricial resulte simétrico. En el presente trabajo se presenta un esquema que aprovecha la eventual simetría de la matriz del sistema obtenido usando GBEM, con el objetivo de reducir el tiempo de cómputo en la etapa de ensamblaje.

Dado que no siempre se tendrá una matriz elemental simétrica, y como una verificación previa del integrador, se repasa primero la técnica GBEM con un caso no-simétrico y a continuación en un caso simétrico. Además, como verificación, se incluye la técnica por colocación como un método numérico independiente. A continuación se expone el esquema propuesto para aprovechar la eventual simetría de la matriz elemental. En los ejemplos numéricos se emplean geometrías con soluciones analíticas, semianalíticas, o numéricas de la literatura.

## 2. FORMULACIONES INTEGRALES

### 2.1. Caso no-simétrico escalar. Formulación integral de Morino

La Formulación Integral (FI) de Morino consiste en una BIE para el problema de Neumann exterior del laplaciano sobre una superficie  $A$  cerrada, rígida y suave a trozos, en  $\mathbb{R}^3$  (e.g. ver [Morino \(1985\)](#)), y que puede escribirse como

$$\int_A dA_{\mathbf{y}} D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [\mu(\mathbf{y}) - \mu(\mathbf{x})] = \int_A dA_{\mathbf{y}} C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma(\mathbf{x}) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in A; \quad (1)$$

donde  $\mu(\mathbf{x})$  es la densidad superficial de doble capa y  $\sigma(\mathbf{x})$  es la densidad de simple capa. El núcleo de doble capa  $D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  está dado por

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{r_k}{r^3} n_k(\mathbf{y}) \quad \text{con } \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}, \text{ y } r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2; \quad (2)$$

donde  $n_k = n_k(\mathbf{y})$  es el versor normal a la superficie en el punto de integración  $\mathbf{y}$ . El elemento diferencial de superficie se denota con  $dA_{\mathbf{y}} = dA(\mathbf{y})$ , mientras que los puntos de integración y campo son  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  y  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , respectivamente. Por otra parte, el núcleo de simple capa está dado por

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r}; \quad (3)$$

Además,  $\sigma(\mathbf{x}) = U_k(\mathbf{x})n_k(\mathbf{x})$  es el valor necesario para obtener una velocidad normal nula en la superficie  $A$ . De este modo, el lado derecho de la Ec. (1) es un dato conocido, por lo que se reduce a una BIE de Fredholm de segunda clase para  $\mu(\mathbf{x})$ .

## 2.2. Caso simétrico vectorial. Formulación integral de Power-Miranda/Hebeker

La FI de Power-Miranda/Hebeker consiste en una BIE sin modos rígidos para el flujo de Stokes exterior a una superficie  $A$  cerrada, rígida y suave a trozos, e.g. ver [Power y Miranda \(1987\)](#), o [Hebeker \(1986\)](#), en  $\mathbb{R}^3$ , y que puede reescribirse como

$$\int_A dA_{\mathbf{y}} [K_{ij}\psi_j(\mathbf{x}) - H_{ij}\psi_j(\mathbf{y})] = u_i(\mathbf{x}) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in A; \quad (4)$$

donde  $\psi_j(\mathbf{x})$  es la densidad superficial de doble capa y  $u_i(\mathbf{x})$  es la velocidad del flujo sin perturbar. El núcleo de doble capa  $K_{ij} = K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  está dado por (e.g. ver [Ladyzhenskaya \(1969\)](#))

$$K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{3}{4\pi\mu} \frac{r_i r_j r_k}{r^5} n_k(\mathbf{y}) \quad \text{con } \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}, \text{ y } r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2; \quad (5)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido. Para superficies suaves, este núcleo verifica la propiedad (e.g. [Kim y Karrila \(1991\)](#))

$$\int_A dA_{\mathbf{y}} K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\mu} \delta_{ij} \quad \text{para } \mathbf{x} \in A; \quad (6)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. Por otra parte, el núcleo  $H_{ij} = H_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  es la diferencia

$$H_{ij} = K_{ij} - S_{ij}; \quad (7)$$

donde  $S_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  es el núcleo de simple capa dado por ([Hebeker, 1986](#))

$$S_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\chi_H}{8\pi\mu} \left[ \frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{r_i r_j}{r^3} \right]; \quad (8)$$

donde  $\chi_H$  es un parámetro positivo arbitrario introducido por Hebeker para acoplar la densidad de capa simple  $\phi$  con la densidad de capa doble  $\psi$  en la forma

$$\phi(\mathbf{x}) = \chi_H \psi(\mathbf{x}) \quad (9)$$

Este acoplamiento permite eliminar los seis modos rígidos que tiene la BIE clásica, tres rotaciones y tres traslaciones, a través de la introducción *ad-hoc* del núcleo  $S_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  y, además, da cuenta de la fuerza y el torque globales sobre la superficie cerrada ([Kim y Karrila, 1991](#); [Power y Wrobel, 1995](#)). Por otra parte, el parámetro  $\chi_H$  también tiene en cuenta el hecho de que las unidades físicas son diferentes, i.e.  $\phi$  representa una densidad superficial de fuerza, con unidades de una presión, mientras que  $\psi$  es una densidad superficial de velocidad, con unidades de velocidad por unidad de área. En el análisis de Hebeker se concluye que  $\chi_H = 1$  es una buena elección, y que será adoptado también en este trabajo. Dado que el lado derecho de la Ec. (4) es dato, este caso también se reduce a una BIE de Fredholm de segunda clase para  $\psi_j(\mathbf{x})$ , y puede reescribirse como

$$g_i(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x})$$

donde

$$g_i(\mathbf{x}) = \int_A dA_{\mathbf{y}} [K_{ij}\psi_j(\mathbf{x}) - H_{ij}\psi_j(\mathbf{y})] \quad (10)$$

para todo  $\mathbf{x} \in A$ .

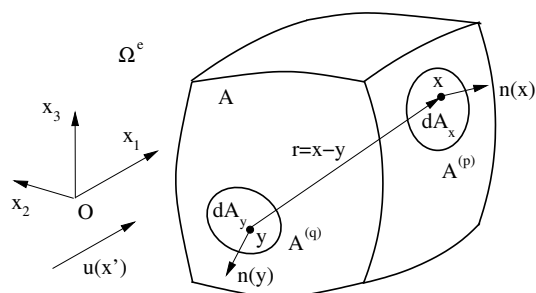


Figura 1: Una superficie cerrada y suave por partes  $A$  con un dominio exterior  $\Omega^e$ : punto de observación  $\mathbf{x}$ , punto fuente  $\mathbf{y}$ , posición relativa  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ , versores  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ , y las áreas diferenciales  $dA_x$ ,  $dA_y$ .

### 3. FORMULACIONES NUMERICAS

Se resumen dos formulaciones numéricas para resolver las Ecs. (1) o (4). Primero, se emplea una técnica de colocación y, a continuación, el método de ponderación de Galerkin. Ambas técnicas usan un doble lazo anidado sobre los elementos  $p, q = 1, 2, \dots, E$ , donde  $E$  es el número de paneles o elementos de la malla BEM, y los puntos  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  están vinculados a los elementos  $p, q$ , respectivamente, ver Fig. 1. Los valores por elemento y nodales son denotados con supra- y sub-índices, respectivamente.

#### 3.1. Colocación usando constantes por elemento

Asumiendo que las densidades de simple y doble capa son constantes en cada elemento, pueden extraerse de las integrales de superficie y, usando una técnica de colocación estándar, en cada caso resulta un Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL), que es regular y bien condicionado (Hackbusch, 1995).

##### 3.1.1. Colocación en la FI de Morino (caso escalar no-simétrico)

Se tiene el SEL dado por

$$\sum_{q=1}^E \int_{A^{(q)}} dA_y D^{(p,q)} \mu^{(p)} = \sum_{q=1}^E \int_{A^{(q)}} dA_y C^{(p,q)} \sigma^{(q)} \quad (11)$$

para  $p = 1, 2, \dots, E$ , donde  $D^{(p,q)} = D(\mathbf{x}^{(p)}, \mathbf{y}^{(q)})$  y  $C^{(p,q)} = C(\mathbf{x}^{(p)}, \mathbf{y}^{(q)})$ , así como  $\mu^{(q)} = \mu(\mathbf{y}^{(q)})$  y  $\sigma^{(q)} = \sigma(\mathbf{y}^{(q)})$ , son evaluados en los centroides de los elementos  $\mathbf{y}^{(q)}$ . Esta ecuación puede reescribirse como

$$\mathbf{F}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} \quad (12)$$

con  $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^{E \times 1}$  y  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{E \times E}$ , donde las matrices globales son  $\mathbf{F} = [\mathbf{F}^{(p,q)}]$  y  $\mathbf{C} = [\mathbf{C}^{(p,q)}]$ , mientras que los vectores globales son  $\boldsymbol{\mu} = [\boldsymbol{\mu}^{(p)}]$  y  $\boldsymbol{\sigma} = [\boldsymbol{\sigma}^{(p)}]$ . Luego de manipular algebraicamente, la matriz  $\mathbf{F}$  puede escribirse como

$$\mathbf{F}^{(p,q)} = \begin{cases} \sum_{e=1, e \neq p}^E D^{(p,e)} & \text{si } q = p \\ D^{(p,q)} & \text{si } q \neq p \end{cases} \quad (13)$$

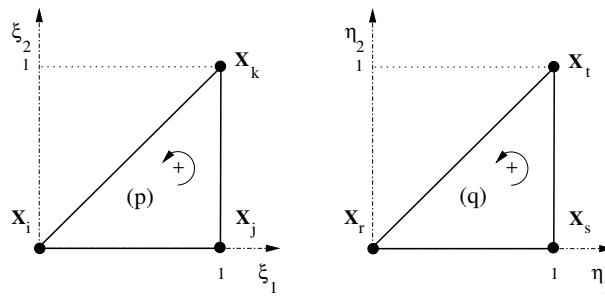


Figura 2: Triángulos *master* *p* y *q* para las coordenadas símplices.

### 3.1.2. Colocación en la FI de Power/Miranda-Hebeker (caso vectorial simétrico)

Se tiene el SEL dado por

$$\sum_{q=1}^E \left[ \int_{A^{(q)}} dA_{\mathbf{y}} \mathbf{K}^{(p,q)} \boldsymbol{\psi}^{(p)} - \int_{A^{(q)}} dA_{\mathbf{y}} \mathbf{H}^{(p,q)} \boldsymbol{\psi}^{(q)} \right] = \mathbf{u}^{(p)}, \quad p = 1, 2, \dots, E \quad (14)$$

donde las matrices elementales  $\mathbf{H}^{(p,q)} = \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(p)}, \mathbf{y}^{(q)})$  y  $\mathbf{K}^{(p,q)} = \mathbf{K}(\mathbf{x}^{(p)}, \mathbf{y}^{(q)})$ , así como los vectores  $\mathbf{u}^{(p)} = \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(p)})$  y  $\boldsymbol{\psi}^{(p)} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}^{(p)})$ , son evaluados en los centroides de los elementos  $\mathbf{x}^{(p)}$ . Reordenando

$$(\mathbf{F} - \mathbf{S})\boldsymbol{\psi} = \mathbf{u} \quad (15)$$

con  $\boldsymbol{\psi}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{3E \times 1}$  y  $\mathbf{F}, \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3E \times 3E}$ , siendo las matrices globales  $\mathbf{F} = [\mathbf{F}^{(p,q)}]$  y  $\mathbf{S} = [\mathbf{S}^{(p,q)}]$ , mientras que los vectores globales son  $\boldsymbol{\psi} = [\boldsymbol{\psi}^{(p)}]$  y  $\mathbf{u} = [\mathbf{u}^{(p)}]$ . Luego de manipular algebraicamente, la matriz  $\mathbf{F}$  puede escribirse como

$$\mathbf{F}^{(p,q)} = \begin{cases} \sum_{e=1, e \neq p}^E \mathbf{K}^{(p,e)} & \text{si } q = p \\ -\mathbf{K}^{(p,q)} & \text{si } q \neq p \end{cases} \quad (16)$$

y  $\mathbf{S}^{(p,q)} = \mathbf{S}(\mathbf{x}^{(p)}, \mathbf{y}^{(q)})$ .

## 3.2. Ponderación de Galerkin usando elementos lineales

La técnica estándar de ponderación de Galerkin utiliza las funciones de forma  $N_l(\mathbf{x})$  para minimizar el error a través de las condiciones de ortogonalidad sobre las BIE dadas por las Ecs. (1) o (10) cuando se las aproxima a nivel discreto. En lo que sigue, la numeración global de los nodos de los triángulos *p* y *q* será denotada con *i, j, k* y *r, s, t*, respectivamente, ver Fig. 2.

### 3.2.1. Galerkin en la FI de Morino (caso escalar no-simétrico)

La técnica estándar de Galerkin aplicada a la Ec. (1) conduce, después de operar algebraicamente, al SEL

$$\sum_{p=1}^E \sum_{q=1}^E \mathcal{L}^{(p,q)} \boldsymbol{\mu}^{(q)} = \sum_{p=1}^E \sum_{q=1}^E \mathcal{Q}^{(p,q)} \boldsymbol{\sigma}^{(q)} \quad (17)$$

en donde se emplea la notación

$$\mathcal{L}^{(p,q)} = \int_{A^{(p)}} dA_{\mathbf{x}} \int_{A^{(q)}} dA_{\mathbf{y}} [\mathbf{N}^{(p)T}(\mathbf{x}) D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{N}^{(q)}(\mathbf{y})] \quad (18)$$

para la matriz elemental del sistema, mientras que la correspondiente a la matriz elemental de la carga está dada por

$$\mathcal{Q}^{(p,q)} = \int_{A^{(p)}} dA_{\mathbf{x}} \int_{A^{(q)}} dA_{\mathbf{y}} [\mathbf{N}^{(p)T}(\mathbf{x}) C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{N}^{(q)}(\mathbf{y})] \quad (19)$$

Los vectores elementales de la solución y del término independiente en la Ec. (17) están dados por

$$\boldsymbol{\mu}^{(q)} = \begin{bmatrix} \mu_r \\ \mu_s \\ \mu_t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\sigma}^{(q)} = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_s \\ \sigma_t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}. \quad (20)$$

### 3.2.2. Galerkin en la FI de Power/Miranda-Hebeker (caso vectorial simétrico)

La técnica estándar de Galerkin aplicada a la Ec. (10) conduce, luego de operar algebraicamente, al SEL

$$\sum_{p=1}^E \sum_{q=1}^E [\mathcal{I}^{(p,q)} \boldsymbol{\psi}^{(p)} - \mathcal{J}^{(p,q)} \boldsymbol{\psi}^{(q)}] = \sum_{p=1}^E \mathcal{M}^{(p)} \mathbf{u}^{(p)} \quad (21)$$

en donde se emplean las notaciones

$$\mathcal{I}^{(p,q)} = \int_{A^{(p)}} dA_{\mathbf{x}} \int_{A^{(q)}} dA_{\mathbf{y}} [\mathbf{N}^{(p)T}(\mathbf{x}) \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{N}^{(p)}(\mathbf{x})] \quad (22)$$

y

$$\mathcal{J}^{(p,q)} = \int_{A^{(p)}} dA_{\mathbf{x}} \int_{A^{(q)}} dA_{\mathbf{y}} [\mathbf{N}^{(p)T}(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{N}^{(q)}(\mathbf{y})] \quad (23)$$

para las matrices elementales, mientras que el vector fuente elemental está dado por

$$\mathcal{M}^{(p)} \mathbf{U}^{(p)} = \int_{A^{(p)}} dA_{\mathbf{x}} [\mathbf{N}^{(p)T}(\mathbf{x}) \mathbf{N}^{(p)}(\mathbf{x})] \mathbf{U}^{(p)} \quad (24)$$

Los vectores elementales del campo solución en la Ec. (4) son

$$\boldsymbol{\psi}^{(p)} = \begin{bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{9 \times 1} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\psi}^{(q)} = \begin{bmatrix} \psi_r \\ \psi_s \\ \psi_t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{9 \times 1} \quad (25)$$

con

$$\boldsymbol{\psi}_m = \begin{bmatrix} \psi_{3m-2} \\ \psi_{3m-1} \\ \psi_{3m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \quad (26)$$

mientras que el vector fuente elemental es

$$\mathbf{U}^{(p)} = \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{9 \times 1} \quad \text{con} \quad \mathbf{U}_m = \begin{bmatrix} U_{3m-2} \\ U_{3m-1} \\ U_{3m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \quad (27)$$

#### 4. USO DE LA SIMETRÍA A NIVEL ELEMENTAL

En principio se puede emplear una evaluación estándar del producto de las tres matrices elementales que aparecen en las Ecs. (22)-(23) que, en general, son de la forma

$$\mathbf{Z}^{(p,q)} = \mathbf{N}^{(p)T}(\mathbf{x}) \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{N}^{(q)}(\mathbf{y}) \quad (28)$$

Empero, dado que son costosas, en especial porque se calculan dentro del doble lazo anidado  $p, q = 1, 2, \dots, E$  sobre todos los elementos  $y$ , a su vez, dentro de otro cuádruple lazo de cuadratura numérica, conviene reducir el número de operaciones. Para tal fin, se empieza observando que las matrices nodales elementales

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_\alpha^{(p)}(\mathbf{x}) & \quad \text{para } \alpha = i, j, k \\ \mathbf{N}_\beta^{(q)}(\mathbf{y}) & \quad \text{para } \beta = r, s, t \end{aligned} \quad (29)$$

son diagonales de  $3 \times 3$ . Teniendo en cuenta esto en el doble producto matricial involucrado en la Ec. (28), se llega a la expresión reducida 1 dada por

$$\mathbf{Z}^{(p,q)} = \mathbf{N}_\alpha^{(p)}(\mathbf{x}) \mathbf{K} \mathbf{N}_\beta^{(q)}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} N_\alpha^{(p)} K_{xx} N_\beta^{(q)} & N_\alpha^{(p)} K_{xy} N_\beta^{(q)} & N_\alpha^{(p)} K_{xz} N_\beta^{(q)} \\ N_\alpha^{(p)} K_{yx} N_\beta^{(q)} & N_\alpha^{(p)} K_{yy} N_\beta^{(q)} & N_\alpha^{(p)} K_{yz} N_\beta^{(q)} \\ N_\alpha^{(p)} K_{zx} N_\beta^{(q)} & N_\alpha^{(p)} K_{zy} N_\beta^{(q)} & N_\alpha^{(p)} K_{zz} N_\beta^{(q)} \end{bmatrix} \quad (30)$$

para  $\alpha = i, j, k$  y  $\beta = r, s, t$ . Si además se tiene simetría en la matriz intermedia  $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ , se llega a la expresión reducida 2 dada por

$$\mathbf{Z}^{(p,q)} = \mathbf{N}_\alpha^{(p)}(\mathbf{x}) \mathbf{K} \mathbf{N}_\beta^{(q)}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} N_\alpha^{(p)} K_{xx} N_\beta^{(q)} & N_\alpha^{(p)} K_{xy} N_\beta^{(q)} & N_\alpha^{(p)} K_{xz} N_\beta^{(q)} \\ \text{simétrica} & N_\alpha^{(p)} K_{yy} N_\beta^{(q)} & N_\alpha^{(p)} K_{yz} N_\beta^{(q)} \\ \text{simétrica} & \text{simétrica} & N_\alpha^{(p)} K_{zz} N_\beta^{(q)} \end{bmatrix} \quad (31)$$

En cuanto al número de operaciones (productos y acumulaciones) en la evaluación de cada una de las Ecs. (28), (30), (31), usando:

- Doble producto matricial elemental estándar:** dado por la Ec. (28), que es el doble producto matricial estándar sin tener en cuenta la naturaleza diagonal de las matrices nodales elementales  $\mathbf{N}_\alpha^{(p)}(\mathbf{x})$  para  $\alpha = i, j, k$ ,  $\mathbf{N}_\beta^{(q)}(\mathbf{y})$  para  $\beta = r, s, t$ ;
- Producto matricial elemental reducido 1:** dado por la Ec. (30), donde ya no se hace el doble producto matricial estándar, sino que es reducido al tener en cuenta la naturaleza diagonal de las matrices, aunque manteniendo la posibilidad de que  $\mathbf{K}$  no sea simétrica;
- Producto matricial elemental reducido 2:** dado por la Ec. (31), es el caso anterior pero ahora con  $\mathbf{K}$  simétrica;

las estimaciones se resumen en la Tabla 1. Como subsiste no obstante el doble lazo anidado  $p, q = 1, 2, \dots, E$  y, a su vez, otro cuádruple lazo de cuadratura numérica, por lo que cabe esperar que esos porcentajes de reducción se degraden un tanto.

#### 5. EJEMPLOS NUMERICOS

En el primer ejemplo numérico se incluirán ambas técnicas, por colocación al centroide y por ponderación de Galerkin, la primera como un método numérico independiente, además de contrastar ambas soluciones numéricas con la solución analítica. En el segundo ejemplo, se concentrará en el esquema que aprovecha la simetría de la matriz elemental en un caso de un operador simétrico.

producto	versión (a) Ec. (28)	versión (b) Ec. (30)	versión (c) Ec. (31)
$\mathbf{X}_\beta^{(q)} = \mathbf{K} \mathbf{N}_\beta^{(q)}$	$9 \cdot 6 = 54$	$9 \cdot 2 = 18$	$6 \cdot 2 = 12$
$\mathbf{X}^{(q)} = \mathbf{K} \mathbf{N}^{(q)}$	$3 \cdot 54 = 162$	no se hace	no se hace
$\mathbf{Z}^{(p,q)} = \mathbf{N}^{(p)} \mathbf{X}^{(q)}$	$162 + 9 \cdot 54 = 648$	$9 \cdot 18 = 162$	$9 \cdot 12 = 108$
% reducc. c/r caso (a)	—	75 %	83 %

Tabla 1: Producto matricial elemental: (a) estándar, (b) reducido 1 y (c) reducido 2, usando las Ecs. (28), (30), (31), respectivamente, donde  $\mathbf{X}^{(q)}$  es un resultado intermedio.

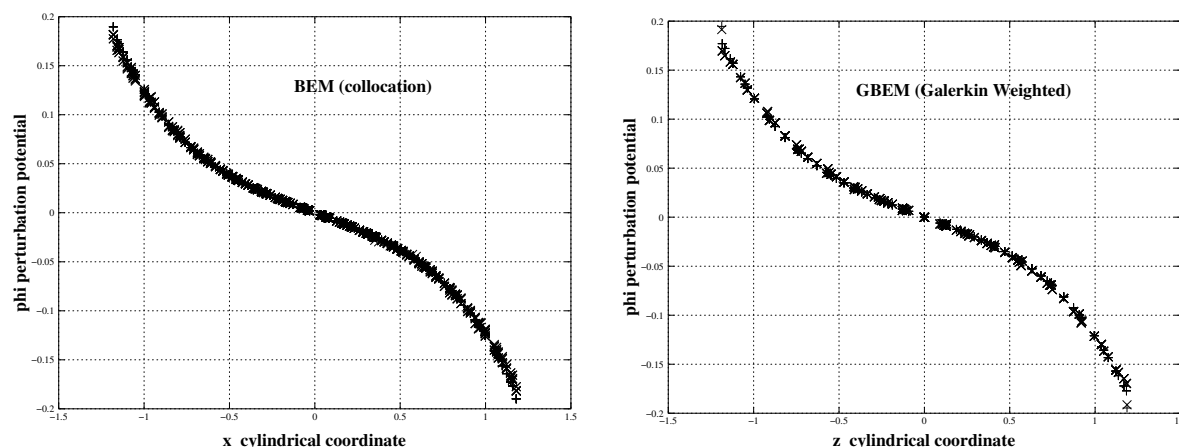


Figura 3: Densidad dipolar  $\mu$  sobre la superficie de un cuerpo de Rankine cerrado (para  $m = 1/2$ ), y alineado según la corriente no perturbada  $\mathbf{U} = (1, 0, 0)$  m/s, obtenidos por: colocación (izq.), y por ponderación de Galerkin (der.), en una malla de 602 nodos y 1200 elementos.

## 5.1. Cuerpo cerrado de Rankine

En la Fig. 3 se muestra la densidad dipolar  $\mu$  sobre la superficie de un cuerpo de Rankine cerrado (para  $m = 1/2$ ), y alineado según la corriente no perturbada  $\mathbf{U} = (1, 0, 0)$  m/s, obtenidos: (i) resolviendo la Ec. (11) asociada a la técnica por colocación (izq.); y (ii) resolviendo la Ec. (17) asociada a la ponderación de Galerkin (der.). En particular, en el segundo caso, la matriz del sistema resulta no-simétrica, por lo que debe realizarse el producto matricial reducido 1 dado por la Ec. (30). Se empleó una malla de 602 nodos y 1200 elementos obtenida por una transformación conforme aplicada sobre una malla de la esfera unitaria. Ambas soluciones numéricas prácticamente coinciden con la solución analítica (Landweber, 1961) dada por

$$\mu = \frac{m}{4\pi} \left( \frac{1}{s_-} - \frac{1}{s_+} \right) \quad (32)$$

$$s_{\pm} = \sqrt{(x \pm a)^2 + r^2};$$

donde  $x$  es la coordenada axisimétrica y  $r$  la radial, con la fuente ubicada en  $(-a, 0, 0)$  y el sumidero en  $(+a, 0, 0)$ .

## 5.2. Flujo de Stokes alrededor de una esfera unitaria

En la Fig. 4 se muestran los tiempos de CPU, en minutos, requeridos para ensamblar la matriz del sistema dado por la Ec. (21), en función del número de grados de libertad  $M = 3N$ , donde  $N$  es el número de nodos de la malla. En este caso se considera el flujo de Stokes alrededor de la esfera unitaria, con velocidad no-perturbada  $\mathbf{U} = (1, 0, 0)$  m/s y donde la viscosidad dinámica



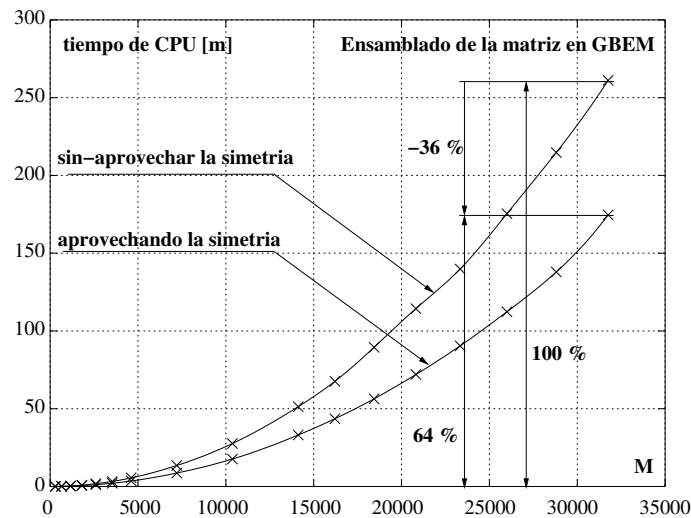


Figura 4: Tiempos de ensamblado, en minutos, de la matriz del sistema obtenido usando ponderación de Galerkin para flujo de Stokes no perturbado  $U = (1, 0, 0)$  m/s alrededor de la esfera unitaria, en función del número de grados de libertad  $M = 3N$ , con y sin consideraciones de simetría a nivel de la matriz elemental.

del fluido es  $\mu = 1 \times 10^{-4}$  Pa·s y su densidad es  $\rho = 1$  kg/m<sup>3</sup>. En la gráfica se compara el doble producto matricial estándar, dado por la Ec. (28), versus la versión reducida 2, dada por la Ec. (31), en donde se observa que el porcentaje de reducción promedio en el tiempo de CPU necesario para el ensamblaje de la matriz del sistema resulta del orden del 36 %.

## 6. CONCLUSIONES

No siempre se puede aprovechar la simetría en la ponderación de Galerkin en BIE, quedando restringida a ecuaciones integrales con núcleos simétricos. En tales casos, la simetría no se da en el doble lazo de integración sobre todas las interacciones posibles entre elementos, sino a nivel de la matriz elemental de interacción, pudiéndose lograr ahorros significativos en el tiempo de CPU necesario para ensamblar la matriz del sistema. En el caso de la esfera unitaria, este ahorro es del orden del 36 % en promedio, comparado con el doble producto matricial elemental estándar.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET, Argentina, proyecto PIP 112 20111 00978), Universidad Nacional del Litoral (UNL, Argentina, proyecto CAI+D 2009–III-4–2), Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANCyT, Argentina, proyecto PICT 2492–10), EU-IRSES (PIRSSES-GA-2009-246977), y ha sido parcialmente realizado con los recursos del *Free Software Foundation/GNU-Project*, tales como GNU–Linux–OS, GNU–GFortran, GNU–Octave, GNU–Git, GNU–Doxygen, y GNU–GIMP, así como otros recursos de código abierto, tales como Xfig y  $\LaTeX$ .

## REFERENCIAS

- D'Elía J., Battaglia L., Cardona A., y Storti M. Full numerical quadrature of weakly singular double surface integrals in Galerkin boundary element methods. *Int. J. for Num. Meth. in Biomedical Engng.*, 27(2):314–334, 2011. Doi:10.1002/cnm.1309.
- D'Elía J., Battaglia L., Storti M., y Cardona A. Galerkin boundary integral equations applied to

- three dimensional Stokes flows. En A. Cardona, M. Storti, y C. Zuppa, editores, *Mecánica Computacional*, vol. XXVII, páginas 2397–2410. San Luis, 2008.
- D'Elía J., Battaglia L., Storti M., y Cardona A. Galerkin boundary integral equations applied to three dimensional Stokes flows. En C. Bauza, P. Lotito, L. Parente, y M. Vénere, editores, *Mecánica Computacional*, vol. XXVIII, páginas 1453–1462. Tandil, 2009.
- Hackbusch W. *Integral equations*. Birkhäuser, 1995.
- Hebeker F.K. Efficient boundary element methods for three-dimensional exterior viscous flow. *Num. Meth. PDE*, 2(4):273–297, 1986.
- Kim S. y Karrila S.J. *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications*. Butterworth-Heinemann, 1991.
- Ladyzhenskaya O.A. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon and Breach Science Publishers, 2 edición, 1969.
- Landweber L. *Handbook of Fluid Dynamics*, capítulo Motion of Immersed and Floating Bodies. McGraw-Hill, 1961.
- Morino L. *Computational Methods in Potential Aerodynamics*. Springer-Verlag, 1985.
- Power H. y Miranda G. Second kind integral equation formulation of Stokes flows past a particle of arbitrary shape. *SIAM J. Appl. Math.*, 47(4):689–698, 1987.
- Power H. y Wrobel L.C. *Boundary Integral Methods in Fluid Mechanics*. Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1995.
- Sarraf S., D'Elía J., Battaglia L., y López E. Método de elementos de borde jerárquico basado en el árbol de Barnes-Hut aplicado a flujo reptante exterior. *Rev. Int. Met. Num. para Cál. Dis. Ing.*, 2013a. In press.
- Sarraf S., López E., Ríos Rodríguez G., y D'Elía J. Validation of a Galerkin technique on a boundary integral equation for creeping flow around a torus. *Comp. Appl. Math.*, 2013b. In press.
- Sauter S.A. y Schwab C. *Boundary element methods*. Springer, 2011.
- Taylor D.J. Accurate and efficient numerical integration of weakly singular integrals in Galerkin EFIE solutions. *IEEE Trans. on Antennas and Propag.*, 51(7):1630–1637, 2003a.
- Taylor D.J. Errata to “Accurate and efficient numerical integration of weakly singular integrals in Galerkin EFIE solutions”. *IEEE Trans. on Antennas and Propag.*, 51(9):2543–2543, 2003b.