

## FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES DE MODO I EN VIGAS DE PAREDES DELGADAS DE MATERIAL COMPUESTO LAMINADO

Franco E. Dotti<sup>a,b</sup>, Víctor H. Cortínez<sup>a,b</sup> y Florencia Reguera<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, [vcortine@frbb.utn.edu.ar](mailto:vcortine@frbb.utn.edu.ar)*

<sup>b</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

**Palabras Clave:** Integral  $G^*$ , Vigas de pared delgada, Materiales compuestos, Factor de intensidad de tensiones.

**Resumen.** Se presenta un enfoque simplificado para determinar el factor de intensidad de tensiones de modo I en vigas de paredes delgadas, construidas con material compuesto laminado del tipo matriz reforzada con fibras. La técnica se basa en el concepto de tasa de liberación de energía asociada al ensanchamiento de la fisura, es decir, medida en dirección perpendicular a la dirección de avance de la dicha grieta. Esta tasa de liberación energética se expresa en términos de la integral  $G^*$  y de la teoría de vigas de paredes delgadas. La solución de la integral  $G^*$  se realiza empleando los campos de tensiones y desplazamientos derivados para materiales con ortotropía general.

En el enfoque, se tiene en cuenta el efecto de alabeo. Esta es una característica común en las vigas de paredes delgadas que no puede dejarse de lado, sobre todo en presencia de cargas que producen efectos flexo-torsionales.

El modelo muestra un buen acuerdo con resultados de elementos finitos. Se muestra que, aunque los enfoques desarrollados para materiales isótropos pueden ser útiles en el tratamiento de problemas ortótropos, los errores que se cometen para algunas secuencias de laminación típicas pueden ser prohibitivos.

## 1 INTRODUCCIÓN

En gran cantidad de sistemas estructurales modernos se emplean componentes esbeltos contruidos con materiales compuestos del tipo plástico reforzado con fibras (FRP, por sus siglas en inglés). Como resultado de ello, el estudio de la mecánica de fracturas en este tipo de componentes se ha convertido en un tópico de reconocida importancia. Asimismo, el factor de intensidad de tensiones (FIT) de modo I es un parámetro significativo de la mecánica de fracturas y por lo tanto juega un papel importante en lo que respecta a la evaluación de la integridad estructural.

En estructuras complejas el FIT usualmente se determina mediante cálculos de elementos finitos. Esta estrategia ha sido probada y su precisión es materia conocida (Courtin et al., 2005), aunque en algunos casos puede resultar costosa debido a la necesidad de emplear grandes modelos, con mallas altamente refinadas. Por su parte, es sabido que en el marco del Monitoreo de la Integridad Estructural los cálculos deben realizarse en tiempo real, por lo que es deseable obtener modelos simplificados y fórmulas analíticas con el objeto de ahorrar tiempo computacional.

La mayoría de los modelos de mecánica de fracturas presentes en la literatura emplean los campos de tensiones y desplazamientos obtenidos para materiales isótropos (Tada et al., 1973; Nobile, 2000; Ricci y Viola, 2006; Xie et al., 1998). Estas técnicas pueden ser aplicadas de manera aproximada únicamente en un rango limitado de problemas ortotrópicos (Sih et al., 1965; Dotti, 2012). Pero si la anisotropía presente es compleja o si se requiere una mayor precisión, debe considerarse el uso de un método desarrollado específicamente para materiales compuestos. Para vigas de sección maciza con laminación ortótropa, la mecánica de fracturas ha sido estudiada por Song et al. (2003), Kisa (2004) y Wang et al. (2005), entre otros. El denominador común entre estas técnicas es el empleo de la expresión de la tasa de liberación de energía propuesta por Nikpur y Dimarogonas (1988), conjuntamente con las fórmulas de los FIT introducidas por Suo et al. (1991) y Bao et al. (1992). Todas las mencionadas técnicas emplean utilizan los campos de desplazamientos y tensiones propuestas por Sih et al. (1965) para materiales compuestos.

Además de la complejidad matemática adicional derivada del empleo de materiales no isótropos, el tratamiento de las vigas de paredes delgadas involucra otras complicaciones generadas por la presencia de acoplamiento flexionales-torsionales y alabeo de la sección transversal (Vlasov, 1961; Gjelsvik, 1981; Cortínez y Piovan, 2002). En varios trabajos científicos se han presentado expresiones para los FIT en vigas isótropas de paredes delgada; entre ellos, cabe mencionar los trabajos de Xie et al. (2004), Xie y Wang (2004), Ricci y Viola (2006), Ghafoori y Motavalli (2011). Por su parte, y a conocimiento de los autores, el efecto de alabeo seccional sólo ha sido abordado por Dotti (2012) y Cortínez y Dotti (2013).

En este trabajo se presenta una fórmula simple para determinar el FIT de modo I en vigas de paredes delgadas contruidas con materiales compuestos del tipo FRP. La fórmula se obtiene a partir del concepto de integral  $G^*$  (Xie et al., 1998), la teoría de vigas de paredes delgadas, la ley de conservación de energía y la teoría de laminación clásica (Barbero, 1998, Cortínez y Piovan, 2002, Kollár y Springer, 2003). La integral  $G^*$  es resuelta empleando los campos de tensiones y desplazamientos derivados por Sih et al. (1965) para materiales compuestos. La influencia del alabeo seccional se tiene en cuenta mediante la consideración del aporte energético del esfuerzo bimomental. Se demuestra mediante resultados numéricos que como regla general dicha contribución no puede ser despreciada.

## 2 CAMPOS DE DESPLAZAMIENTOS Y TENSIONES EN LA ZONA DE LA PUNTA DE UNA FISURA PARA UNA LÁMINA ORTÓTropa

Los materiales compuestos laminados del tipo FRP se conforman mediante el arreglo de láminas ortótropas como la que se presenta en la [Figura 1](#). Cada lámina verifica la existencia de dos planos de simetría constructiva, los cuáles son mutuamente perpendiculares y, simultáneamente, normales a un tercer plano. El ángulo  $\Phi$  indica la orientación de las fibras con respecto al sistema coordenado propio de la lámina.

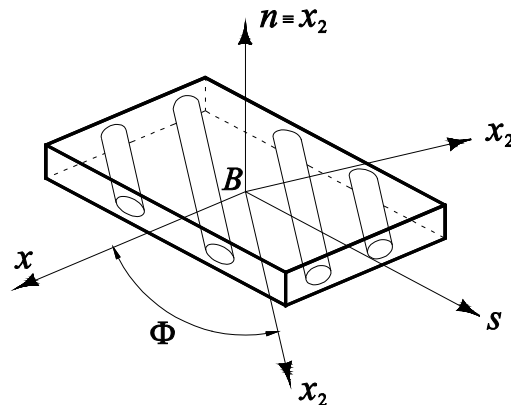


Figura 1: Lámina de material compuesto con ortotropía general. Relación entre el sistema de coordenadas del laminado, ( $B: x, s, n$ ), y el sistema de coordenadas propio de la lámina, ( $B: x_1, x_2, x_3$ ).

Considerando una condición de estado plano de tensiones, la ley constitutiva para dicha lámina ortótropa puede expresarse como

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{ss} \\ \gamma_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{ss} \\ \sigma_{xs} \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

donde  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, 6$ ) son constantes que dependen de las propiedades elásticas del material compuesto y del ángulo de orientación  $\Phi$  de la lámina ([Cortínez y Piován, 2002](#)),  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{ss}$  y  $\gamma_{xs}$  son las deformaciones de la lámina y  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{ss}$  y  $\sigma_{xs}$ , las tensiones de la misma.

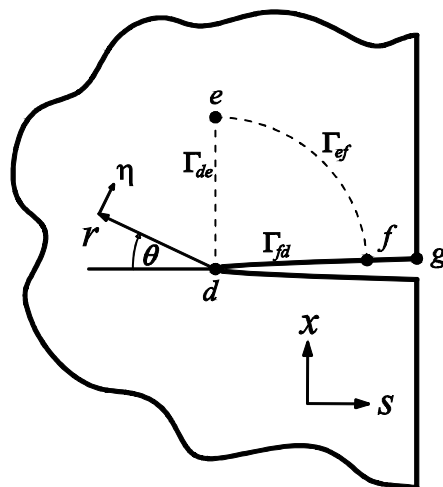


Figura 2: Simplificación bidimensional de una fisura tridimensional.

Para carga de modo I, [Sih et al. \(1965\)](#) propusieron el siguiente campo singular de

tensiones en las cercanías de la punta de una fisura en un cuerpo de material rectilíneamente anisótropo

$$\sigma_{xx} = (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} K_I f_1(\theta), \quad (2)$$

$$\sigma_{ss} = (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} K_I f_2(\theta), \quad (3)$$

$$\sigma_{xs} = (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} K_I f_3(\theta). \quad (4)$$

Este campo tensional se asocia con el siguiente campo de desplazamientos

$$u_x = (2r)^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} K_I g_1(\theta), \quad (5)$$

$$u_s = (2r)^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} K_I g_2(\theta). \quad (6)$$

siendo  $u_x$  y  $u_s$  los desplazamientos en las direcciones  $x$  y  $s$ , respectivamente. En las expresiones anteriores se ha definido el FIT de modo I con su clásica notación  $K_I$ . Estos campos de tensiones y desplazamientos se hallan expresados en un sistema de coordenadas polares, de variables  $r$  y  $\theta$ , cuyo origen se halla sobre la punta de la fisura, como se muestra en la **Figura 2**. Las funciones  $f_i(\theta)$  y  $g_i(\theta)$  contienen las propiedades del material compuesto, y están dadas por

$$f_1(\theta) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right], \quad (7)$$

$$f_2(\theta) = \operatorname{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right], \quad (8)$$

$$f_3(\theta) = \operatorname{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right) \right], \quad (9)$$

$$g_1(\theta) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \mu_1 q_2 \sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta} - \mu_2 q_1 \sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta} \right) \right], \quad (10)$$

$$g_2(\theta) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \mu_1 p_2 \sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta} - \mu_2 p_1 \sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta} \right) \right], \quad (11)$$

donde  $p_j = a_{22}\mu_j^2 + a_{12} - a_{26}\mu_j$  y  $q_j = a_{12}\mu_j + a_{11}/\mu_j - a_{16}$ . Para obtener los números complejos  $\mu_i$ , la ecuación característica

$$a_{22}\mu^4 - 2a_{26}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{16}\mu + a_{11} = 0, \quad (12)$$

debe ser resuelta para cada lámina.

### 3 LA INTEGRAL $G^*$ Y EL FIT DE MODO I PARA UNA LÁMINA ORTÓTropa

Sea la fisura de la **Figura 1** una simplificación bidimensional de una fisura tridimensional en una lámina de material compuesto. A partir de la ley de conservación de energía, la integral  $G^*$  bidimensional puede expresarse por unidad de espesor como (Xie et al., 1998)

$$G^* = \int_{\Gamma} \left( U_0 \eta_x - \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) d\Gamma, \tag{13}$$

donde  $U_0$  es la densidad de energía de deformación,  $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_x, \eta_s\}$  es un versor normal a la trayectoria  $\Gamma$  en cada punto y  $\mathbf{T} = \{T_x, T_s\}$  es el vector de tensión. El vector  $\mathbf{u} = \{u_x, u_s\}$  contiene los desplazamientos definidos en (5) y (6). La integral  $G^*$ , resuelta para la trayectoria  $\Gamma_{dfg}$ , representa la tasa de liberación de energía debida al movimiento del borde  $dfg$  de la fisura en dirección  $x$ . Así, la tasa de liberación de energía se asocia al ensanchamiento de la fisura, es decir, se mide en una dirección perpendicular a la dirección de avance del frente.

Ahora bien, siendo las trayectorias  $\Gamma_{de}$  y  $\Gamma_{ef}$  una línea recta y un cuarto de círculo respectivamente, la expresión (13) puede resolverse para obtener

$$\int_{\Gamma_{de}} \left( U_0 \eta_x - \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) d\Gamma = \tag{14}$$

$$= \frac{K_I^2 \log r}{4\pi} \left[ f_1(\pi/2) + g_1(\pi/2) + f_3(\pi/2) \left( g_2(\pi/2) + 2g_1'(\pi/2) \right) + 2f_2(\pi/2) g_2'(\pi/2) \right] = 0,$$

y

$$\int_{\Gamma_{ef}} \left( U_0 \eta_x - \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) d\Gamma = \frac{K_I^2 C_{\theta}}{4\pi}, \tag{15}$$

donde  $C_{\theta}$  es una constante propia de la lámina dada por

$$C_{\theta} = \int_{\pi/2}^{\pi} \left\{ f_1(\theta) \sin \theta \left( g_1(\theta) \sin \theta + 2g_1'(\theta) \cos \theta \right) + f_2(\theta) \left[ g_2(\theta) \cos \theta \sin \theta \right. \right. \tag{16}$$

$$\left. \left. + g_2'(\theta) (3 + \cos 2\theta) \right] + f_3(\theta) \left[ g_1(\theta) \cos \theta \sin \theta + g_2(\theta) \sin^2 \theta \right. \right.$$

$$\left. \left. + g_1'(\theta) (3 + \cos 2\theta) + g_2'(\theta) \sin 2\theta \right] \right\} d\theta.$$

La integral en (16) puede ser resuelta fácilmente de manera numérica.

Por la ley de conservación de la energía, la integral (13) produce un resultado nulo para cualquier trayectoria cerrada. Por lo tanto resolviendo para  $\Gamma_{defd} = \Gamma_{de} + \Gamma_{ef} - \Gamma_{df}$  se obtiene  $\oint_{\Gamma_{defd}} \left( U_0 \eta_x - \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) d\Gamma = 0$ . Así, empleando (14) y (15), se obtiene

$$\oint_{\Gamma_{defd}} \left( U_0 \eta_x - \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma_{def}} \left( U_0 \eta_x - \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_{df}} \left( U_0 \eta_x - \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) d\Gamma = \tag{17}$$

$$= \frac{K_I^2 C_{\theta}}{4\pi} - \int_{\Gamma_{df}} \left( U_0 \eta_x - \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) d\Gamma = 0.$$

por lo que la integral  $G^*$  resuelta para la trayectoria  $\Gamma_{dfg}$  puede expresarse como

$$G^* = \int_{\Gamma_{dfg}} \left( U_0 \eta_x - \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) d\Gamma = \frac{K_I^2 C_{\theta}}{4\pi} + \int_{\Gamma_{fg}} U_0 d\Gamma. \tag{18}$$

La expresión anterior debe interpretarse como la tasa de liberación de energía debida al movimiento del borde  $dfg$  de la fisura en dirección  $x$ , en una lámina de material compuesto del tipo FRP. Las propiedades del material y la orientación de lámina se consideran en  $C_{\theta}$ , a

través de las funciones  $f_i(\theta)$  y  $g_i(\theta)$ .

#### 4 TASA DE LIBERACIÓN DE ENERGÍA PARA VIGAS DE PAREDES DELGADAS CONSTRUIDAS CON MATERIAL COMPUESTO

##### 4.1 Consideración de la fisura en la viga de paredes delgadas

La Figura 3 muestra una viga de pared delgada de sección abierta general, construida con material compuesto laminado, con presencia de una fisura en uno de sus bordes libres. Los puntos de la viga se refieren a un sistema de coordenadas cartesianas ( $C: x, y, z$ ), cuyo origen  $C$  es coincidente con el centroide de la sección transversal original de la viga sin daño. El sistema intrínseco ( $B: x, y, z$ ) es consistente con el presentado en la Figura 1, ubicándose el punto  $B$  en la línea media de la pared seccional. Las coordenadas de los puntos ubicados en dicha línea media se denotan como  $Y(s)$  y  $Z(s)$ .

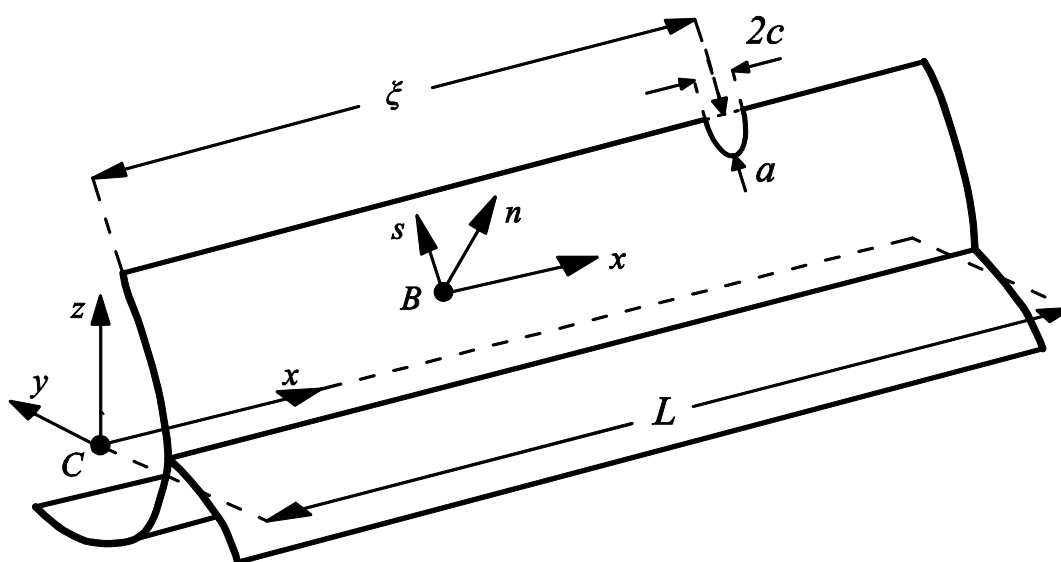


Figura 3: Viga de paredes delgadas genérica con una fisura modelada como un hueco elíptico ( $c \rightarrow 0$ ).

La fisura se ubica en  $x = \xi$  y se propone que su morfología puede aproximarse a un hueco elíptico, con el semieje menor  $c$  de la elipse tendiendo a cero. De esta forma, la profundidad de fisura sigue la siguiente ley de variación con respecto a  $x$

$$\tilde{a}(x) = a \sqrt{1 - \frac{(x - \xi)^2}{c^2}}. \quad (19)$$

##### 4.2 Ley constitutiva

La expresión constitutiva asociada a una viga de paredes delgadas de material compuesto puede escribirse de la siguiente manera

$$\mathbf{Q} = \mathbf{J}\mathbf{\Lambda}, \quad (20)$$

donde  $\mathbf{Q}$  es el vector de esfuerzos generalizados,  $\mathbf{J}$  la matriz constitutiva y  $\mathbf{\Lambda}$  el vector de deformaciones generalizadas (Cortínez y Piovan, 2002). Debido a que únicamente se consideran cargas de modo I, la contribución energética de los esfuerzos de corte y del momento torsor son pequeñas y pueden despreciarse. Así,  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{\Lambda}$  se expresan como

$$\mathbf{Q} = \{N, M_y, M_z, B\}^T, \quad (21)$$

$$\mathbf{\Delta} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial \theta_y}{\partial x}, -\frac{\partial \theta_z}{\partial x}, -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right\}^T, \quad (22)$$

Los siguientes esfuerzos generalizados han sido definidos en (21):  $N$  como el esfuerzo axial,  $M_y$  y  $M_z$  como los momentos flectores y  $B$  como el esfuerzo bimomental. Las deformaciones generalizadas están dadas por las componentes del vector  $\mathbf{\Delta}$  y se definen en términos de los desplazamientos generalizados:  $u$  es el desplazamiento axial,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  son los giros flexionales y  $\theta_x$  es la variable ponderativa del alabeo no uniforme. La matriz constitutiva  $\mathbf{J}$  es simétrica y contiene las propiedades geométricas de la sección transversal y las propiedades del laminado. Las componentes de  $\mathbf{J}$  están dadas por

$$\begin{aligned} J_{11} &= E^* A, & J_{12} &= E^* S_y + \bar{B}_{11} \int_S \frac{dY}{ds} ds, & J_{13} &= E^* S_z - \bar{B}_{11} \int_S \frac{dZ}{ds} ds, \\ J_{14} &= E^* S_\omega - \bar{B}_{11} \int_S l ds, & J_{22} &= E^* I_y + 2\bar{B}_{11} \int_S Z \frac{dY}{ds} ds + \bar{D}_{11} \int_S \left( \frac{dY}{ds} \right)^2 ds, \\ J_{23} &= E^* I_{yz} - \bar{B}_{11} \int_S \left( Z \frac{dZ}{ds} - Y \frac{dY}{ds} \right) ds - \bar{D}_{11} \int_S \frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} ds, \\ J_{24} &= E^* I_{y\omega} + \bar{B}_{11} \int_S \left( \frac{dY}{ds} \omega_p - lZ \right) ds - \bar{D}_{11} \int_S l \frac{dY}{ds} ds, \\ J_{33} &= E^* I_z - 2\bar{B}_{11} \int_S Y \frac{dZ}{ds} ds + \bar{D}_{11} \int_S \left( \frac{dZ}{ds} \right)^2 ds, \\ J_{34} &= E^* I_{z\omega} - \bar{B}_{11} \int_S \left( \frac{dZ}{ds} \omega_p + lY \right) ds + \bar{D}_{11} \int_S l \frac{dZ}{ds} ds, \\ J_{44} &= E^* C_w - 2\bar{B}_{11} \int_S l \omega_p ds + \bar{D}_{11} \int_S l^2 ds, \end{aligned} \quad (23)$$

donde  $l = Y dY/ds + Z dZ/ds$  y

$$\begin{aligned} A &= t \int_S ds, & S_y &= t \int_S Z ds, & S_z &= t \int_S Y ds, & S_\omega &= t \int_S \omega_p ds, \\ I_y &= t \int_S Z^2 ds, & I_z &= t \int_S Y^2 ds, & I_{yz} &= t \int_S YZ ds, \\ I_{y\omega} &= t \int_S Z \omega_p ds, & I_{z\omega} &= t \int_S Y \omega_p ds, & C_w &= t \int_S \omega_p^2 ds. \end{aligned} \quad (24)$$

En (23) y (24),  $S$  representa el perímetro total de la sección transversal;  $S$  adopta el valor constante  $S_0$  si se hace referencia a la sección intacta o  $S_a$ , dependiente de  $x$ , si la sección contiene la fisura elíptica. Además,  $t$  corresponde al espesor total del laminado y  $E^* = \bar{A}_{11}/t$ . Las constantes de rigidez de laminado,  $\bar{A}_{11}$ ,  $\bar{B}_{11}$  y  $\bar{D}_{11}$ , se han definido empleando la notación clásica (Barbero, 1998; Kollár y Springer, 2003). Por su parte, aunque (23) y (24) son válidas en cualquier sección de la viga, se emplea la función de alabeo primario de la sección sin daño,  $\omega_p$ , independientemente de la presencia de la fisura. Esta simplificación no produce diferencias sustanciales en los resultados si la fisura es de tamaño pequeño a moderado.

### 4.3 Tasa de liberación de energía

La energía de deformación asociada a la viga genérica de la Figura 3 puede expresarse como

$$U = \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\xi-c} \mathbf{Q}^T \mathbf{J}_0^{-1} \mathbf{Q} dx + \int_{\xi-c}^{\xi+c} \mathbf{Q}^T \mathbf{J}_{\bar{a}}^{-1} \mathbf{Q} dx + \int_{\xi+c}^L \mathbf{Q}^T \mathbf{J}_0^{-1} \mathbf{Q} dx \right], \quad (25)$$

donde  $\mathbf{J}_{\bar{a}}$  y  $\mathbf{J}_0$  son las matrices constitutivas asociadas a las secciones transversales con y sin fisura, respectivamente.  $\mathbf{J}_{\bar{a}}$  depende de  $x$  a través de la expresión (19).

Ahora bien, despreciando las pequeñas alteraciones generadas en los esfuerzos generalizados debido a la presencia de la fisura, la (25) puede reformularse como

$$U = \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\xi-c} \mathbf{Q}^T \mathbf{J}_0^{-1} \mathbf{Q} dx + c \mathbf{Q}^T \Big|_{x=\xi} \int_{-1}^1 \mathbf{J}_{\lambda}^{-1} d\lambda \mathbf{Q} \Big|_{x=\xi} + \int_{\xi+c}^L \mathbf{Q}^T \mathbf{J}_0^{-1} \mathbf{Q} dx \right], \quad (26)$$

donde se ha definido la variable auxiliar de integración  $\lambda = (x - \xi)/c$ .

Debido al teorema de Clapeyron, el trabajo de las fuerzas externas es  $V = 2U$ . La energía potencial está dada por  $\Pi = U - V$ , por lo tanto  $\Pi = -U$ . Así, la tasa de liberación de energía en dirección del ensanchamiento de la fisura puede expresarse como

$$G^* = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial c} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c} \left( \int_0^{\xi-c} \mathbf{Q}^T \mathbf{J}_0^{-1} \mathbf{Q} dx + \int_{\xi+c}^L \mathbf{Q}^T \mathbf{J}_0^{-1} \mathbf{Q} dx \right) + \mathbf{Q}^T \Big|_{x=\xi} \int_0^1 \mathbf{J}_{\lambda}^{-1} d\lambda \mathbf{Q} \Big|_{x=\xi}. \quad (27)$$

La expresión anterior puede simplificarse aplicando el teorema fundamental del cálculo, para obtener

$$G^* = \mathbf{Q}^T \Big|_{x=\xi} \left( \int_0^1 \mathbf{J}_{\lambda}^{-1} d\lambda - \mathbf{J}_0^{-1} \right) \mathbf{Q} \Big|_{x=\xi}. \quad (28)$$

## 5 FIT DEL MODO I

Aunque las expresiones (18) y (28) han sido obtenidas empleando diferentes teorías, ambas representan la tasa de liberación de energía  $G^*$ . En congruencia con las ideas de Xie et al (1998), Xie y Wang (2004) y Xie et al. (2004), estas expresiones pueden ser igualadas para luego obtener  $K_I$ . Así

$$\frac{K_I^2 C_{\theta}}{4\pi} + \int_{\Gamma_{fs}} U_0 d\Gamma = \frac{1}{t} \left[ \mathbf{Q}^T \Big|_{x=\xi} \left( \int_0^1 \mathbf{J}_{\lambda}^{-1} d\lambda - \mathbf{J}_0^{-1} \right) \mathbf{Q} \Big|_{x=\xi} \right]. \quad (29)$$

Ahora, debido a la acción libre de la superficie de fisura, la integral sobre  $\Gamma_{fs}$  es una cantidad muy pequeña que puede ser despreciada. Teniendo en cuenta lo dicho se puede obtener

$$K_I = \sqrt{\frac{4\pi}{t C_{\theta}} \left[ \mathbf{Q}^T \Big|_{x=\xi} \left( \int_0^1 \mathbf{J}_{\lambda}^{-1} d\lambda - \mathbf{J}_0^{-1} \right) \mathbf{Q} \Big|_{x=\xi} \right]}. \quad (30)$$

La expresión (30) marca la dependencia de  $K_I$  con respecto a la profundidad de fisura  $a$ , los esfuerzos generalizados en la zona de la fisura  $\mathbf{Q} \Big|_{x=\xi}$ , las propiedades del material compuesto, la orientación de la lámina (a través de  $C_{\theta}$ ), el espesor del laminado y las propiedades de las



secciones transversales con y sin fisura, condensadas en  $\mathbf{J}_a$  y  $\mathbf{J}_0$ , respectivamente. La (30) es genérica y puede aplicarse a cada lámina de material compuesto FRP que forme parte de una viga de paredes delgadas de cualquier sección transversal, con cualquier orientación de fibras.

## 6 RESULTADOS NUMÉRICOS

### 6.1 Descripción de los cálculos

Se presentan en esta sección comparaciones entre los resultados obtenidos mediante la expresión (30) y resultados de elementos finitos (FEM) y de otros autores, cuando se hallan disponibles. En los cálculos de FEM, se empleó el programa comercial ABAQUS 6.7, con mallas promediando los 120000 elementos C3D20R. Estos son elementos tetraédricos de 20 nodos con interpolación cuadrática. Con el objeto de mejorar la precisión del cálculo, se asignó singularidad de cuarto de punto a los elementos en las cercanías de la punta de la fisura.

Las formas seccionales bajo estudio son las que se muestran en la Figura 4: un perfil U con una fisura en una de sus alas y un perfil T con una fisura en el alma. Para ambos casos, las dimensiones empleadas fueron  $h = 0.2$  m,  $b = 0.1$  m,  $t = 0.01$  m y  $L = 2$  m, mientras que la ubicación de la fisura fue establecida en  $\xi/L = 0.5$ .

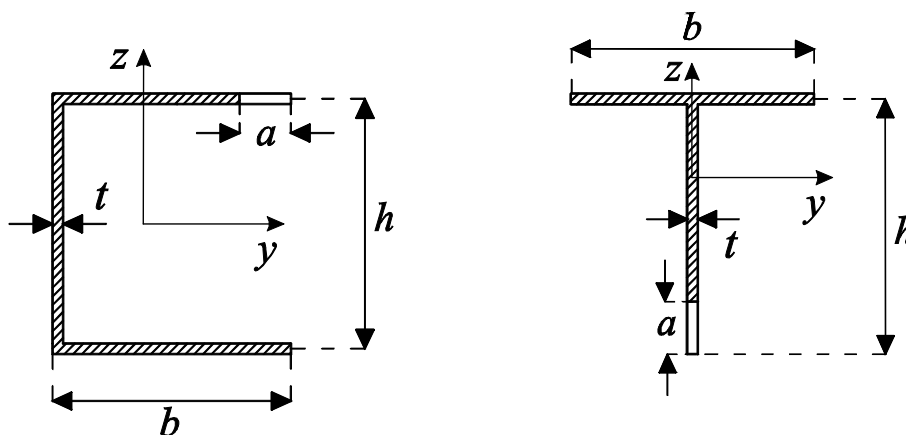


Figura 4: Secciones transversales estudiadas con su correspondiente disposición de fisura.

El material considerado fue grafito-epoxi (AS4/3501), con diferentes esquemas de laminación. Las propiedades del material son:  $E_1 = 1.44$  GPa,  $E_2 = 9.65$  GPa,  $\nu_{12} = 0.3$ ,  $G_{12} = 4.14$  GPa,  $G_{23} = 3.45$  GPa,  $\rho = 1389$  kg/m<sup>3</sup>.

### 6.2 Resultados y discusión

En su artículo pionero en lo que respecta a fractura en compuestos, Sih et al. (1965) indicaron que los enfoques clásicos para materiales isótropos pueden ser directamente aplicados a problemas ortótropos, en ciertos problemas particulares. Un problema ortótropo es el presentado en la Figura 5, correspondiente a un perfil T con laminación a 0°. Se comparan los resultados del presente enfoque con respecto a resultados obtenidos mediante FEM y los enfoques para materiales isótropos de Xie y Wang (2004), Ricci y Viola (2006) y Cortínez y Dotti (2013). Se incluye también la expresión clásica de Tada et al. (1973), la cual se aplica considerando el alma con fisura como una placa independiente con carga estáticamente equivalente. Considerando como referencia los resultados de FEM, el método presentado en este trabajo muestra resultados aceptables para un amplio rango de profundidades de fisura, con diferencias del 15% para fisuras de tamaño moderado. El enfoque de Cortínez y Dotti

(2013), aplicable a vigas isótropas de paredes delgadas, y la fórmula de Xie y Wang (2004) producen también resultados similares. Esto es esperable dado que los tres enfoques derivan del concepto de integral  $G^*$ . La fórmula clásica presenta diferencias del orden del 30% mientras que el método de Ricci y Viola (2006) falla hasta en un 40% para fisuras muy pequeñas. En cualquiera de los últimos dos casos, debe tenerse en cuenta que los enfoques tienen carácter de elemental.

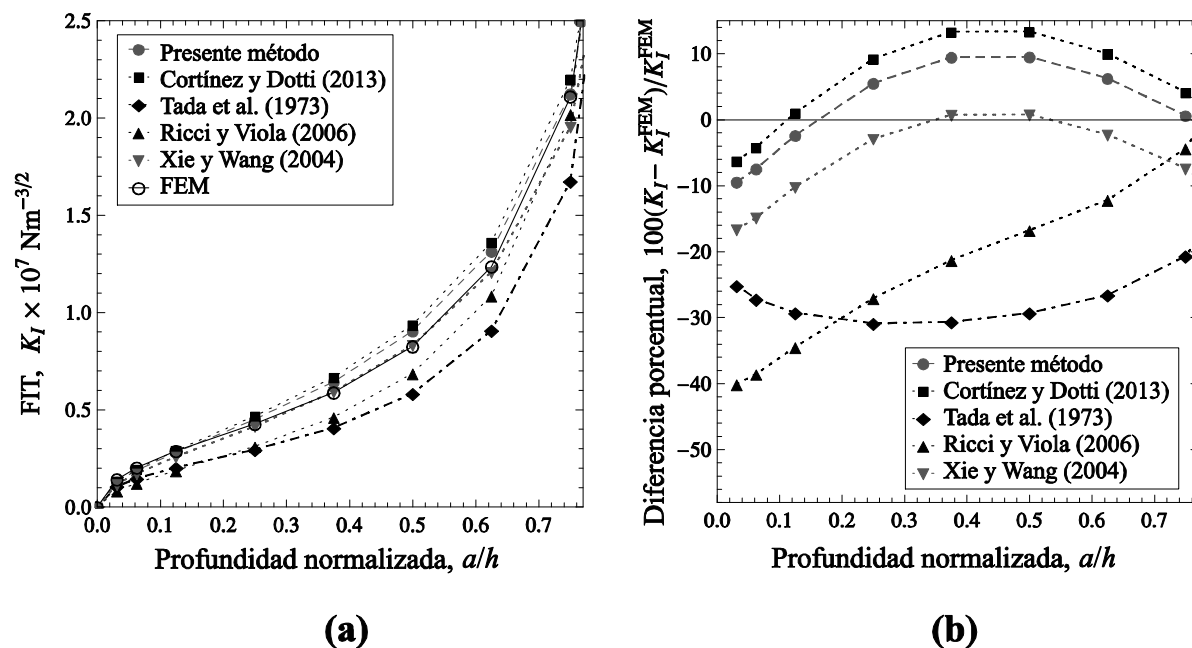


Figura 5: (a) FIT para fisura en perfil T sometido a flexión ( $M_y = 1 \text{ kNm}$ , sin alabeo). Laminado  $\{0\}_4$ . (b) Diferencia porcentual con respecto a los resultados de FEM.

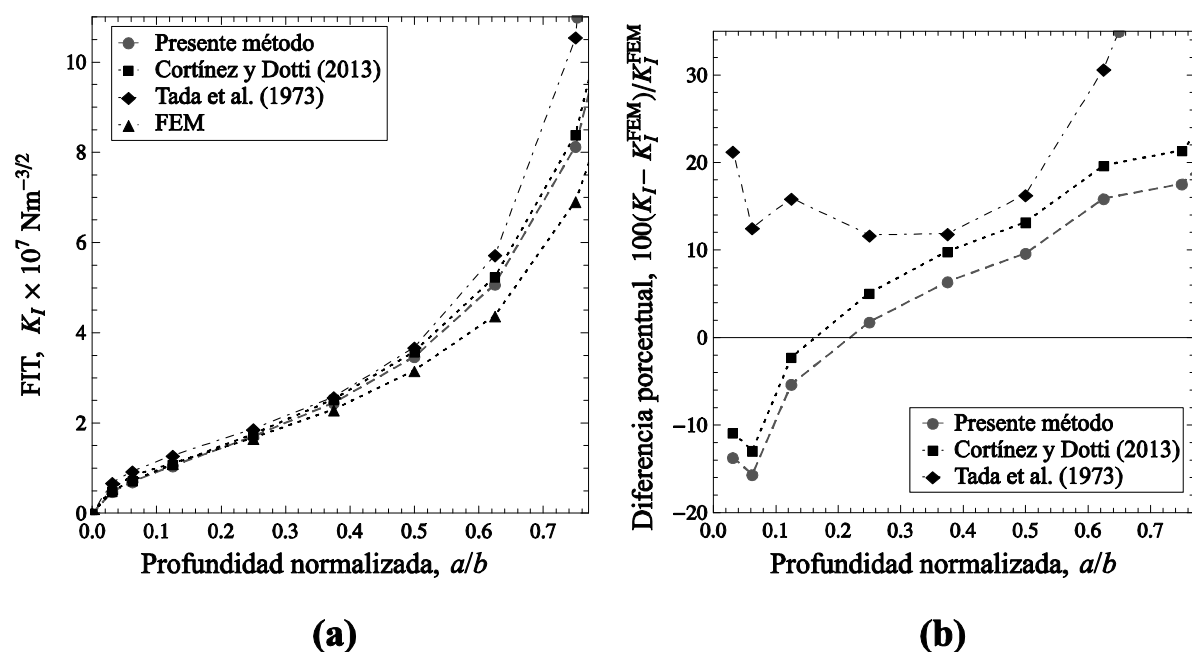


Figura 6: (a) FIT para fisura en perfil U sometido a flexión ( $M_z = 3 \text{ kNm}$ , sin alabeo). Laminado  $\{0\}_4$ . (b) Diferencia porcentual con respecto a los resultados de FEM.

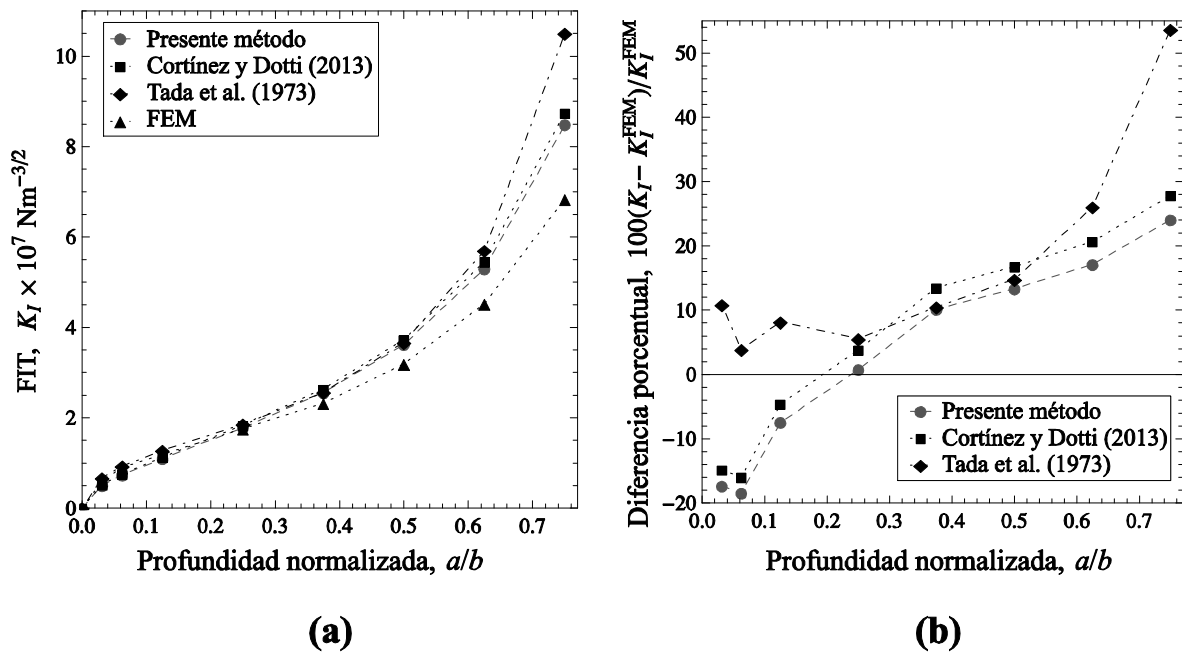


Figura 7: (a) FIT para fisura en perfil U sometido a flexión ( $M_z = 3 \text{ kNm}$ ,  $B = -2.30 \text{ Nm}^2$ ). Laminado  $\{45/-45\}_s$ . (b) Diferencia porcentual con respecto a los resultados de FEM.

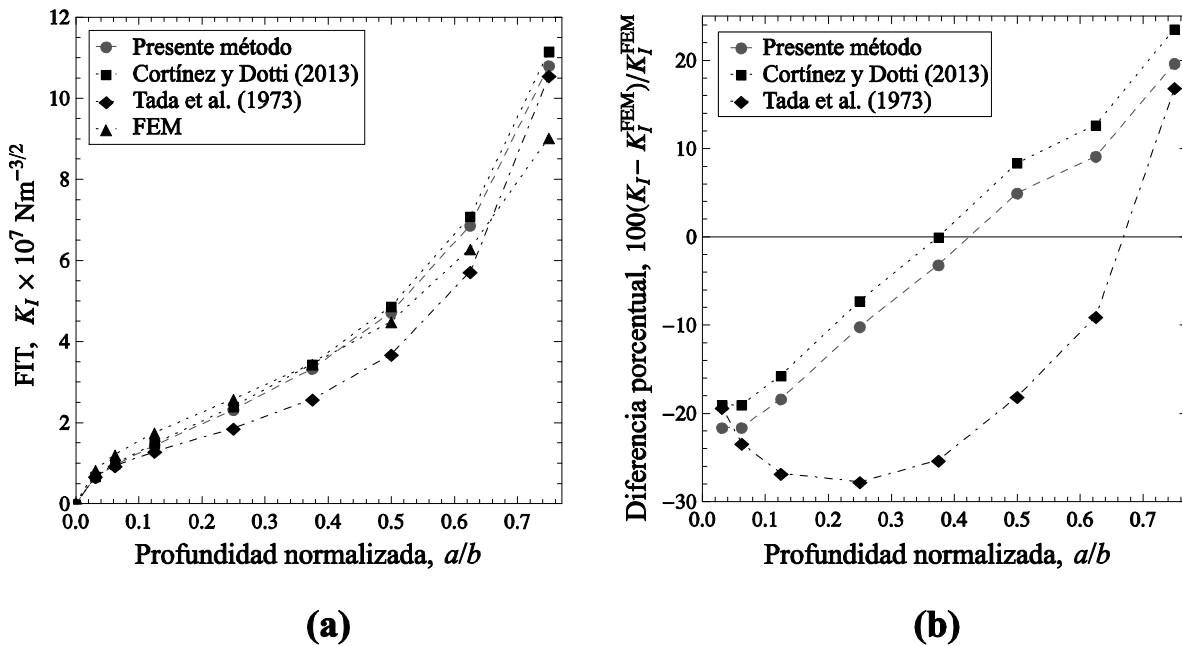


Figura 8: (a) FIT para fisura en perfil U sometido a flexión ( $M_z = 3 \text{ kNm}$ , sin alabeo). Laminado  $\{0/90\}_s$ , curvas correspondientes a las láminas con orientación  $0^\circ$ . (b) Diferencia porcentual con respecto a los resultados de FEM.

Para el caso de perfiles U de material isotrópico, Ricci y Viola (2006) y Xie y Wang (2004) propusieron fórmulas del FIT que consideran la presencia de dos fisuras simétricas en las alas. Con la excepción del enfoque introducido por los autores de este artículo (Cortínez y Dotti, 2013), no existen en la literatura enfoques que consideren la presencia de una única fisura en una de las alas de un perfil U. La predicción del FIT se vuelve más difícil en este caso ya que la fisura introduce una asimetría, la cual se incrementa con la profundidad hasta

desembocar en un marcado comportamiento tridimensional de la viga. Un perfil U ortótropo con una única fisura corresponde al ejemplo analizado en la [Figura 6](#). Se observan resultados aceptables del presente método y también de su análogo para isótropos en lo que respecta al acuerdo con los resultados de FEM. La adaptación de la fórmula clásica de [Tada et al \(1973\)](#) presenta buen comportamiento para fisuras pequeñas a moderadas.

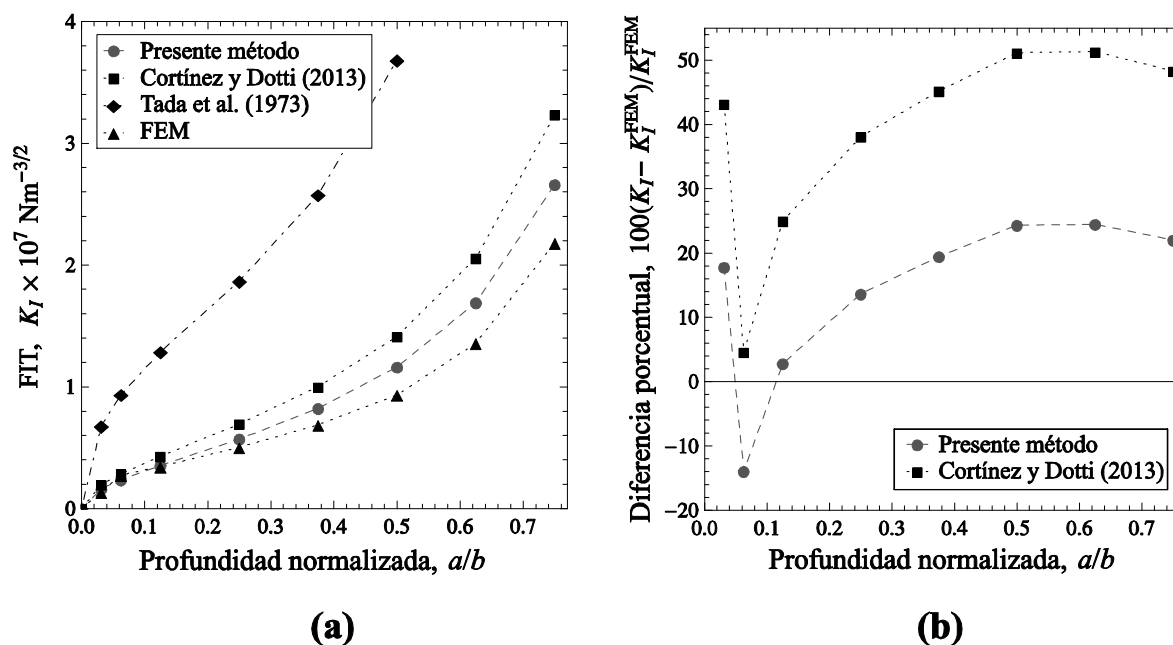


Figura 9: (a) FIT para fisura en perfil U sometido a flexión ( $M_z = 3 \text{ kNm}$ , sin alabeo). Laminado  $\{0/90\}_s$ , curvas correspondientes a las láminas con orientación  $90^\circ$ . (b) Diferencia porcentual con respecto a los resultados de FEM.

Extendiendo lo apuntado por [Sih et al. \(1965\)](#), se muestra en la [Figura 7](#) que, para el caso de un perfil U con laminación simétrica-balanceada, el enfoque para materiales isótropos de [Cortínez y Dotti \(2013\)](#) produce buenos resultados y similares a los del presente enfoque.

Una secuencia de laminación empleada regularmente en materiales compuestos FRP es la cruzada-simétrica. Para láminas de  $0^\circ$  y  $90^\circ$  en una laminación  $\{0/90\}_s$  se presentan los resultados del FIT en las [Figuras 8](#) y [9](#), respectivamente. En este ejemplo, los cálculos muestran que el FIT es altamente dependiente del ángulo de laminación. Para fisuras de severidad moderada, el presente enfoque produce buenos resultados tanto para las láminas de  $0^\circ$  como para las de  $90^\circ$ . Los enfoques apropiados para materiales isótropos funcionan bien para las láminas de  $0^\circ$  pero no así para las de  $90^\circ$ , como puede verse claramente en la [Figura 9](#). Los resultados del enfoque clásico de [Tada et al \(1973\)](#) son idénticos para ambas láminas dado que el mismo no considera la influencia del material. El método de [Cortínez y Dotti \(2013\)](#) da una mejor aproximación, aunque presenta diferencias de hasta 50% con respecto a los resultados de FEM para algunas fisuras de profundidad moderada.

También para laminación cruzada-simétrica corresponden los resultados de las [Figuras 10](#) y [11](#). En este ejemplo, se considera un estado de carga que genera un fuerte acoplamiento flexional-torsional con el objeto de cuantificar la influencia del alabeo en el cálculo del FIT. Así, los resultados del presente método considerando y sin considerar la influencia del esfuerzo bimomental se comparan con los resultados de FEM. Puede verse en las mencionadas figuras que el hecho de despreciar la influencia del alabeo seccional conduce a errores importantes en la predicción del FIT.

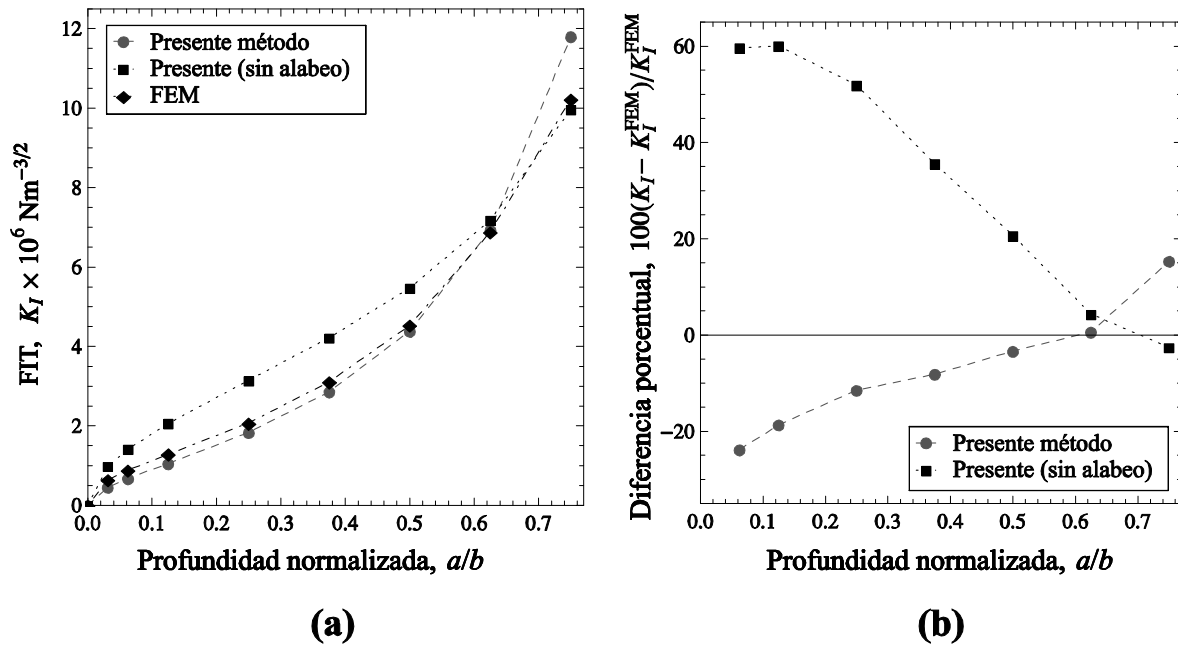


Figura 10: (a) FIT para fisura en perfil U sometido a flexión ( $M_y = 1 \text{ kNm}$ ,  $B = -62.44 \text{ Nm}^2$ ; “sin alabeo” implica considerar  $B = 0$ ). Laminado  $\{0/90\}_s$ , curvas correspondientes a las láminas con orientación  $0^\circ$ . (b) Diferencia porcentual con respecto a los resultados de FEM.

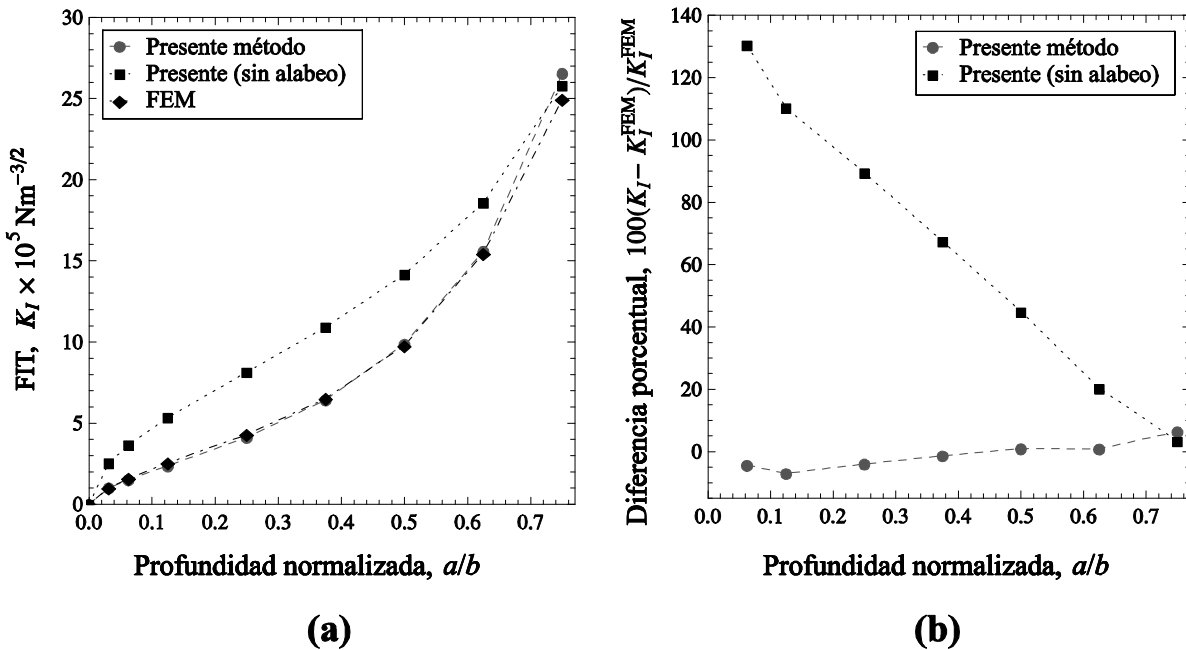


Figura 11: (a) FIT para fisura en perfil U sometido a flexión ( $M_y = 1 \text{ kNm}$ ,  $B = -62.44 \text{ Nm}^2$ ; “sin alabeo” implica considerar  $B = 0$ ). Laminado  $\{0/90\}_s$ , curvas correspondientes a las láminas con orientación  $90^\circ$ . (b) Diferencia porcentual con respecto a los resultados de FEM.

## 7 CONCLUSIONES

Se ha presentado una fórmula para determinar el factor de intensidad de tensiones (FIT) de modo I en vigas de paredes delgadas de material compuesto de tipo matriz reforzada con fibras. La técnica se deriva desde un punto de vista unidimensional, empleando la teoría de

vigas de paredes delgadas y el concepto de tasa de liberación de energía asociada al ensanchamiento de la fisura, la cual se expresa en términos de la integral  $G^*$ . El enfoque representa una extensión del método previamente presentado por Cortínez y Dotti (2013) para materiales isótropos.

La precisión de la fórmula fue testeada mediante comparaciones para distintos ejemplos con resultados de elementos finitos (FEM) y de otros enfoques de isótropos presentes en la literatura, considerándose algunas secuencias comunes de laminación. Teniendo en cuenta como referencia los resultados de FEM, el método presentado en este artículo ha mostrado un buen comportamiento, especialmente para fisuras de severidad moderada: para estos casos, las diferencias con FEM no superan el 15%. Esto es aceptable dado que, para fisuras muy grandes o muy pequeñas, los errores en la estimación del FIT son inevitables para enfoques simplificados derivados desde una teoría unidimensional.

Aunque en términos generales el presente enfoque ha producido mejores resultados para compuestos, se ha mostrado que las técnicas derivadas para materiales isótropos pueden ser empleadas sin mayores problemas en materiales ortótropos. Por su parte, para una secuencia de laminación muy común como lo es la cruzada-simétrica, los enfoques para materiales isótropos pueden arrojar predicciones equivocadas del FIT, requiriéndose el uso de modelos derivados específicamente para compuestos como el presentado en este artículo.

Este enfoque para la obtención del FIT de modo I tiene en cuenta un aspecto muy importante en vigas de paredes delgadas, como lo es el efecto de alabeo seccional. Esto se realiza mediante la consideración de la contribución energética del bimomento. Se ha mostrado que el hecho de despreciar la influencia del alabeo conduce a errores en la predicción del FIT, especialmente en presencia de acoplamientos flexionales-torsionales de importancia.

## 8 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido por parte la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional y del CONICET.

## REFERENCIAS

- Bao, G., Ho, S., Sou, Z., y Fan, B., The role of material orthotropy in fracture specimens for composites. *International Journal of Solids and Structures*, 29:1105–1116, 1992.
- Barbero, E.J., *Introduction to composite material design*, Taylor and Francis Inc., 1999.
- Cortínez, V.H., y Dotti, F.E., Mode I stress intensity factor for cracked thin-walled open beams. *Engineering Fracture Mechanics*. Enviado (en revisión), 2013.
- Cortínez, V.H., y Piovan, M.T., Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4):701–723, 2002.
- Courtin, S., Gardin, C., Bézine, G., y Ben Hadj Hamouda, H., Advantages of the  $J$ -integral approach for calculating stress intensity factors when using the commercial finite element software ABAQUS. *Engineering Fracture Mechanics*, 72:2174–2185, 2005.
- Ghafoori, E., y Motavalli, M., Analytical calculation of stress intensity factor of cracked steel I-beams with experimental analysis and 3D digital image correlation measurements. *Engineering Fracture Mechanics*, 78:3226–3242, 2011.
- Gjelsvik, A., *Theory of thin walled beams*, John Wiley & Sons, New York, 1981.
- Kisa, M., Free vibration analysis of a cantilever composite beam with multiple cracks. *Composites Science and Technology*, 64:1391–1402, 2004.
- Kollár, L.P., y Springer, G.S., *Mechanics of composite structures*. Cambridge University Press, 2003.

- Nikpur, K., y Dimarogonas, A., Local compliance of composite cracked bodies. *Composites Science and Technology*, 32:209–223, 1998.
- Nobile, L., Mixed mode crack initiation and direction in beams with edge crack. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 33:107–116, 2000.
- Ricci, P. y Viola, E., Stress intensity factors for cracked T-sections and dynamic behavior of T-beams. *Engineering Fracture Mechanics*, 73:91–111, 2006.
- Sih, G.C., Paris, P.C., e Irwin, G.R., On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. *International Journal of Fracture Mechanics*, 1:189–203, 1965.
- Song, O., Ha, T.-W., y Librescu, L., Dynamics of anisotropic composite cantilevers weakened by multiple transverse open cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 70:105–123, 2003.
- Suo, Z., Bao, G., Fan, B., y Wang, T.C., Orthotropy rescaling and implications for fracture in composites. *International Journal of Solids and Structures*, 28(2):235–248, 1991.
- Tada, H., Paris, P.C. e Irwin, G.R., *Stress analysis of cracks handbook*. Del Research Corp., 1973.
- Vlasov, V.Z., *Thin Walled Elastic Beams*, Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1961.
- Wang, K., Inman, D.J., y Farrar, C.R., Modeling and analysis of a cracked composite cantilever beam vibrating in coupled bending and torsion. *Journal of Sound and Vibration*, 284:23–49, 2005.
- Xie, Y.J., y Wang, X.H., Application of  $G^*$  integral on cracked structural beams. *Journal of Constructional Steel Research*, 60:1271–1290, 2004.
- Xie, Y.J., Wang, X.H., y Lin, Y.C., Stress intensity factors for cracked rectangular cross-section thin-walled tubes. *Engineering Fracture Mechanics*, 71:1501–1513, 2004.
- Xie, Y.J., Xu, H., y Li, P.N., Crack mouth energy-release rate and its application. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 29(3):195–203, 1998.