

## VIBRACIONES LIBRES DE PLACAS RECTANGULARES CON FISURAS

**Javier L. Raffo, Ignacio G. Cardozo**

*Grupo de Mecánica Computacional, Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Delta, San Martín 1171, 2804 Campana, Argentina, jraffo@frd.utn.edu.ar, <http://www.frd.utn.edu.ar/grupo-de-mecanica-computacional>*

**Palabras clave:** Placas rectangulares, modelo de fisura, vibraciones, resultados experimentales.

**Resumen.** El estudio de problemas de vibraciones de placas con fisuras es de interés en ingeniería para ciertas aplicaciones estructurales. La presencia de una fisura en una placa en general provoca una disminución de la rigidez y una disminución de las frecuencias naturales. En este trabajo se estudia el problema de vibraciones libres de una placa rectangular ante la presencia de una fisura abierta. Se analizan diversos modelos de fisura para la implementación analítica y los resultados se comparan con mediciones experimentales y resultados con programa de elementos finitos.

A partir de la aplicación del principio de Hamilton a una placa rectangular con una línea con restricciones elásticas intermedias y con sus bordes restringidos elásticamente ante rotación y traslación, se obtiene en forma natural las condiciones en la transición y contorno. Se implementa una formulación variacional para la determinación de las frecuencias naturales y de las formas modales de una placa debilitada por la presencia de una línea con rótulas elásticas intermedia. El análisis se lleva a cabo utilizando la teoría clásica de placas y los resultados se obtienen a través de la aplicación del método variacional de Ritz utilizando polinomios simples como funciones de aproximación. Las restricciones adicionales que generan las condiciones de transición en la línea mencionada se incorporan en la formulación mediante el uso de multiplicadores de Lagrange y/o una función de penalidad. La presencia de la línea con rótulas elásticas permite contemplar una variación de la rigidez a la flexión de la placa que simule la presencia de una fisura. Se analiza el comportamiento de diferentes modelos propuestos en la literatura y se realizan comparaciones con resultados experimentales y resultados obtenidos con programas de elementos finitos.

Se presentan comparaciones con resultados obtenidos en trabajos previos y se incluyen nuevos resultados de frecuencias y modos de vibración de placas con fisura que no han sido previamente analizadas en la literatura existente.

## 1 INTRODUCCIÓN

El estudio de problemas de vibraciones de placas con fisuras es de interés en aplicaciones de la ingeniería para analizar los efectos causados por la presencia de la fisura en una estructura. La presencia de una fisura en una placa en general provoca una disminución de la rigidez y una disminución de las frecuencias naturales.

Debido a la combinación de áreas desarrolladas en el presente trabajo, solamente se hará mención de alguno de los trabajos que se encuentran en la literatura al momento y que originaron el presente estudio. Numerosos trabajos trataron el problema de contorno mediante la aplicación del cálculo de variaciones en aplicaciones físicas y matemáticas (Courant y Hilbert, 1953; Guelfand y Fomin, 1963; Kantorovich y Krylov, 1964; Mikhlin, 1964; Sagan, 1969; Bliss, 1971; Weinstock, 1974; Ewing, 1985; Leitmann, 1986; Brechtken-Manderscheid, 1991; Blanchard y Brüning, 1992; Giaquinta y Hildebrandt, 1996; Troutman, 1996). Varios libros tratan el estudio de placas isótropas y anisótropas incluyendo la determinación de problemas estáticos, de pandeo y vibraciones (Dym y Shames, 1973; Szilard, 1974; Timoshenko y Krieger, 1959; Lekhnitskii, 1968; Whitney, 1987; Reddy, 1997; Jones, 1999; Grossi, 2010). Un gran número de trabajos trataron el comportamiento dinámico de placas con problemáticas complejas como: bordes restringidos elásticamente, presencia de masas vinculadas elásticamente o rígidamente, espesores variables, material anisótropo, apoyos puntuales o lineales, presencia de agujeros, etc. Una revisión de la literatura muestra que hay una limitada cantidad de trabajos donde se estudia la vibración de placas con una línea de rótulas. Esta línea puede ser utilizada para facilitar el plegado de compuertas y para simular una fisura a través del espesor de la placa u otras aplicaciones. Wang et al. (2001) analizaron las vibraciones de placas con una línea de rótulas interna aplicando el método de Ritz. Gupta y Reddy (2002) presentaron las cargas de pandeo exactas y las frecuencias de vibraciones de placas rectangulares ortótropas con una línea de rótulas aplicando un método analítico que implementa la solución de Lévy y el método de descomposición del dominio. Xiang y Reddy (2003) realizaron la primer solución basada en la teoría de deformación de primer orden para vibraciones de placas rectangulares con una línea de rótula interna. Se implementó el método de Lévy con un análisis espacio-estado para resolver el problema de vibraciones. Huang et al. (2009) desarrollaron un método discreto para analizar el problema de vibraciones libres de placas rectangulares delgadas y moderadamente gruesas con una línea de rótulas y varias condiciones de contorno clásicas. Quintana y Grossi (2012) analizaron las vibraciones libres de placas rectangulares con una línea de rótulas y bordes elásticamente restringidos. Donde la ecuación de gobierno para obtener los autovalores se resolvió con la combinación del método de Ritz y el método de multiplicadores de Lagrange. Todos estos estudios consideraron placas con una sola línea de rótulas libres. Raffo y Grossi (2012) estudiaron el problema de vibraciones libres de placas anisótropas rectangulares ante la presencia de varias líneas de rótulas elásticas y bordes elásticamente restringidos utilizando el método de Ritz en combinación con el método de los multiplicadores de Lagrange para obtener resultados numéricos de las frecuencias naturales y formas modales. Grossi (2012) presenta un modelo analítico del comportamiento dinámico de placas anisótropas, con la presencia de una línea de rótulas con bordes suaves elásticamente restringidos ante rotación y traslación entre otros efectos complejos. Introduciendo un adecuado cambio de variables, las energías correspondientes a las distintas restricciones elásticas fueron desarrolladas rigurosamente.

En cuanto al estudio de fisuras en placas, King (1983) modeló fisuras en placas con una

línea de resortes simplificado considerando efectos elásticos y plasticidad perfecta para evaluar parámetros fractomecánicos. [Solecki \(1983\)](#) obtuvo las frecuencias naturales de vibración de placas rectangulares simplemente apoyadas con fisuras paralelas a un eje, que atraviesan todo el espesor.

En cuanto a la implementación de modelos de fisura como una discontinuidad elástica a la flexión en de vibraciones libres de vigas fue estudiada en numerosos trabajos. [Dimarogonas \(1996\)](#) realizó un estado del arte en cuanto a vibraciones de estructuras en presencia de fisuras donde describe que desde 1957 varios autores relacionaron el factor de intensidad de tensiones (SIF o K) con una flexibilidad local para varios tipos de geometrías de fisura y componentes estructurales.

Numerosos trabajos analizaron las frecuencias naturales de vigas con fisuras proponiendo modelos de fisura en vigas para fisuras a un solo lado abiertas modeladas con un resorte rotacional cuya rigidez varía en función de la profundidad de la fisura, para simular el efecto de flexibilidad local adicional. [Ostachowicz y Krawezuk \(1991\)](#), con herramientas fractomecánicas propusieron un modelo basado en el factor de intensidad de tensiones y lo utilizaron para modelar fisuras simples y fisura doble para estudiar el efecto de estas en las frecuencias naturales transversales de una viga empotrada que luego [Farghaly \(1994\)](#) profundizó y varios autores lo implementaron más adelante ([Narkis, 1994](#); [Chaudhari y Maiti, 2000](#); [Lin, 2002](#); [Khaji, 2009](#)). [Liebowitz y otros \(1967,1968\)](#) y [Okamura \(1969\)](#) propusieron un modelo de fisura para calcular la flexibilidad rotacional local a partir de resultados previos provenientes de estudios de mecánica de fractura. El modelo propuesto está basado en la hipótesis de tensiones planas y para una fisura abierta a un lado de la viga. Este modelo también fue utilizado por [Shifrin y Ruotolo \(1999\)](#) donde propusieron una técnica de cálculo de las frecuencias naturales de una viga con una cantidad arbitraria y finita de fisuras, [Zheng y Fan \(2001\)](#) obtuvieron las frecuencias naturales de una viga con fisura en presencia de soportes elásticos con el método de Fourier modificado. [Li \(2001 y 2002\)](#) utilizó el mismo modelo incluyendo la presencia de un resorte traslacional y una masa concentrada para una viga con varias fisuras abiertas proponiendo un método para obtener el determinante de segundo orden. [Binici \(2005\)](#) estudió una viga con múltiples fisuras con sollicitación axial. [Risos y otros \(1990\)](#) usaron este modelo para identificar la posición y profundidad de fisuras a partir de mediciones experimentales. [Chondros y otros \(1997\)](#) compararon un modelo de fisura propuesto a partir de considerar una flexibilidad local, con un modelo que tiene en cuenta el campo de tensiones y desplazamientos alrededor de la fisura y a la vez lo compararon con resultados experimentales, que con estos resultados en [Chondros y otros \(1998\)](#) propusieron un modelo de fisura considerando una flexibilidad local que luego fue extendido en [Chondros y otros \(2001\)](#) para fisuras que se abren y cierran en un ensayo de fatiga. Luego [Khiem y Lien \(2001, 2002 y 2004\)](#) aplicaron el modelo al estudio de múltiples fisuras, con vibraciones forzadas, optimizando el tiempo de cálculo y proponiendo un método de detección de múltiples fisuras. [Fernández-Sáez y Navarro \(2002\)](#) implementaron un modelo de fisura representado como una rótula elástica obtenido de [Tada y otros \(1985\)](#) en una viga de Euler-Bernoulli. [Loya y otros \(2006\)](#) utilizaron este modelo en una viga de Timoshenko de sección rectangular, incluyendo un resorte traslacional unido a ambos tramos de la viga que actúa transversalmente, donde propusieron una solución directa y una con funciones aproximadas del giro y desplazamiento relativo. [Hsu \(2005\)](#), para fisura simple, usando la aproximación de [Broek \(1986\)](#) con el factor de intensidad de tensiones propuesto por [Tara y otros \(1985\)](#) aplicó un modelo de fisura en una viga Euler-Bernoulli articulada en los extremos, vinculada elásticamente en la dirección transversal, con una fisura simple, carga axial y una carga excitadora usando el método de cuadratura diferencial. [Lele y Maiti \(2002\)](#),

extendieron el uso de lo propuesto por Ostachowicz y Krawezuk (1991) y Chaudhari y Maiti (2000), modificado para su aplicación en vigas cortas con fisura abierta a un solo lado para detectar fisuras a partir de resultados previos de las primeras frecuencias naturales.

En el presente trabajo, se propone extender en placas el uso de modelos de fisura propuestos en vigas, para obtener las frecuencias naturales y modos de vibrar de placas rectangulares con líneas de fisuras que no atraviesan el espesor de la placa, paralelas a uno de los bordes. Estos resultados se comparan con resultados numéricos obtenidos con el programa Abaqus y con mediciones experimentales.

## 2 FUNCIONAL ENERGÉTICO

Sea una placa anisótropa que en su estado de equilibrio se encuentra en un dominio de dos dimensiones  $G$ , con sus bordes suaves a tramos  $\partial G$  elásticamente restringidos contra rotación y traslación. La placa tiene  $N - 1$  líneas de rótulas intermedias restringidas elásticamente contra rotación y traslación, y se muestra en la Figura 1. Para analizar el desplazamiento transversal del sistema en estudio, se supone que la posición vertical de la línea media de la placa en cualquier instante de tiempo  $t$ , es descrita por la función  $w = w(x, t)$ , donde  $x = (x_1, x_2) \in \bar{G}$ ,  $\bar{G} = G \cup \partial G$  y el dominio  $G$  está dividido por las líneas  $\Gamma^{(c_k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N - 1$ , en  $N$  partes  $G^{(k)}$  de bordes  $\partial G^{(k)}$ , (ver Figura 1).

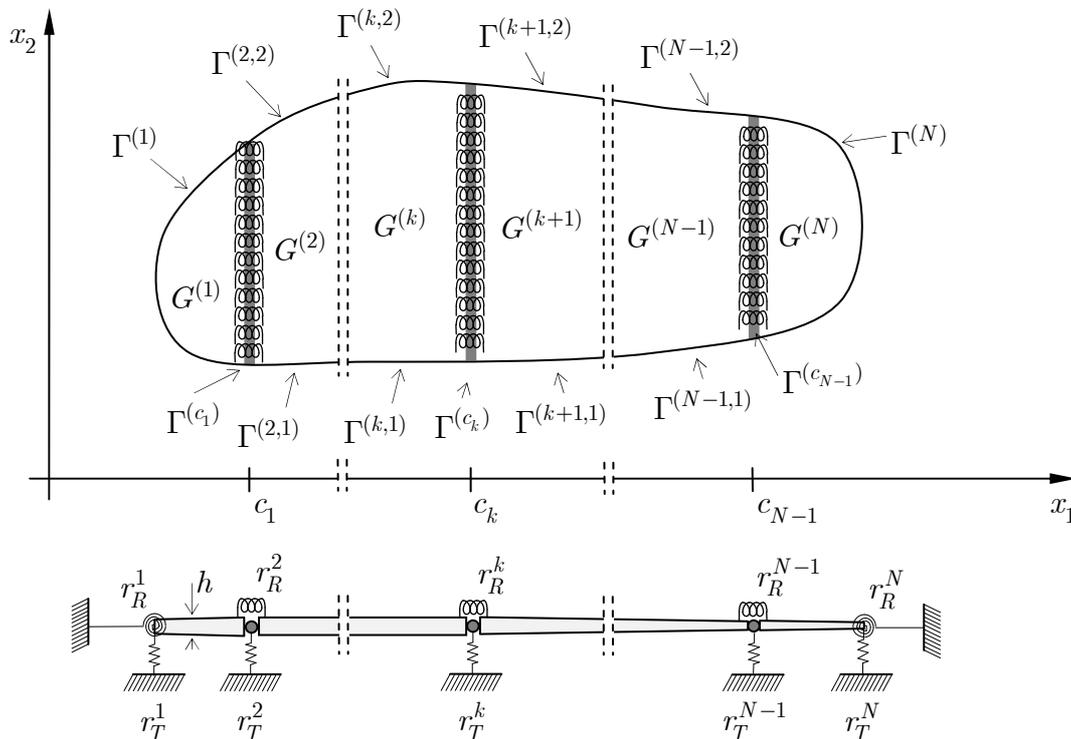


Figure 1: Mechanical system under study.

El principio de Hamilton requiere que entre los tiempos  $t_0$  y  $t_1$ , en los cuales las posiciones del sistema mecánico son conocidas, debe seguir un movimiento que haga

estacionario al funcional  $F(w) = \int_{t_0}^{t_1} (E_c - E_p) dt$ , en el espacio de funciones admisibles (Grossi, 2010). Donde  $E_c$  denota la energía cinética y  $E_p$  denota la energía potencial total del sistema mecánico en estudio. Por lo tanto, el funcional energético es

$$\begin{aligned}
 F(w) = & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{k=1}^N \left[ \int_{G^{(k)}} \left( (\rho h)^{(k)} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - C_{11}^{(k)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 \right. \right. \right. \\
 & - 2C_{12}^{(k)} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - C_{22}^{(k)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \left( C_{16}^{(k)} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + C_{26}^{(k)} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \\
 & \left. \left. \left. - 4C_{66}^{(k)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dx \right. \right. \\
 & - \sum_{m=1}^2 \int_{\Gamma^{(k,m)}} \left( r_T^{(k,m)} w^2 + r_R^{(k,m)} \left( \frac{\partial w}{\partial \vec{n}^{(k,m)}} \right)^2 \right) ds \\
 & \left. \left. - \int_{\Gamma^{(c_k)}} \left( r_T^{(c_k)} w^2 + r_R^{(c_k)} \left( \left[ \partial w / \partial x_1 \right]_{c_k} \right)^2 \right) ds \right\} dt, \tag{1}
 \end{aligned}$$

donde:  $w(x, t)$  es  $w^{(k)}(x, t)$  cuando  $x \in G^{(k)}$ ,  $(\rho h)^{(k)}$  es la densidad de masa y  $C_{ij}^{(k)} = C_{ij}^{(k)}(x)$  son las rigideces del material anisótropo (Lekhnitskii, 1968), que corresponde al subdominio  $G^{(k)}$ ,  $\partial w / \partial \vec{n}^{(k)}$  es la derivada direccional de  $w$  respecto del vector normal unitario saliente  $\vec{n}^{(k,m)}$  de la curva  $\Gamma^{(k,m)}$ , y el símbolo  $\left[ \partial w / \partial x_1 \right]_{c_k}$ , denota la diferencia de las derivadas laterales

$$\left[ \frac{\partial w}{\partial x_1} \right]_{c_k} = \frac{\partial w}{\partial x_1}(c_k^+, x_2, t) - \frac{\partial w}{\partial x_1}(c_k^-, x_2, t). \tag{2}$$

Como el número de líneas es  $N - 1$ , es necesario adoptar  $r_R^{(c_N)} = r_T^{(c_N)} \equiv 0$ ,  $r_R^{(1,2)} = r_R^{(N,2)} = r_T^{(1,2)} = r_T^{(N,2)} \equiv 0$ , en la Ec. (1), por lo tanto

$$\int_{\Gamma^{(1,2)}} (\cdot) ds = \int_{\Gamma^{(N,2)}} (\cdot) ds = \int_{\Gamma^{(c_N)}} (\cdot) ds = 0. \tag{3}$$

La variación de  $F$  en  $w$  en la dirección de  $v$ , está dada por

$$\delta F(w; v) = \left. \frac{dF}{d\varepsilon} (w + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0}, \tag{4}$$

y la condición de funcional estacionario requiere que

$$\delta F(w; v) = 0, \forall v \in D_a, \tag{5}$$

donde  $D_a$  es el espacio de direcciones admisibles en  $w$  con espacio de funciones admisibles  $D$  de este funcional. Para realizar los desarrollos matemáticos requeridos para la aplicación de las técnicas del cálculo de variaciones, se asume que:

$$\begin{aligned} (\rho h)^{(k)} &\in C(\bar{G}^{(k)}), C_{ij}^{(k)} \in C^2(\bar{G}^{(k)}), w(x, \bullet) \in C^2[t_0, t_1], \\ w(\bullet, t) &\in C(\bar{G}), w(\bullet, t)|_{\bar{G}^{(k)}} \in C^4(\bar{G}^{(k)}), \bar{G}^{(k)} = G^{(k)} \cup \partial G^{(k)}, k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (6)$$

Debe notarse que como consecuencia de la presencia de las líneas de rótulas, la derivada  $\partial w / \partial x_1$  y las de orden superior no necesariamente existen en el dominio  $G$ , por lo tanto es necesario imponer las condiciones  $w(\bullet, t)|_{\bar{G}^{(k)}} \in C^4(\bar{G}^{(k)}), k = 1, 2, \dots, N$ .

Debido a estas observaciones y ya que el principio de Hamilton requiere que en el instante de tiempo  $t_0$  y  $t_1$  las posiciones sean conocidas, el espacio  $D$  está dado por

$$\begin{aligned} D = \{w; w(x, \bullet) &\in C^2[t_0, t_1], w(\bullet, t) \in C(\bar{G}), w(\bullet, t)|_{\bar{G}^{(k)}} \in C^4(\bar{G}^{(k)}), \\ k = 1, \dots, N, w(x, t_0), w(x, t_1) &\text{ prescribed}\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Las direcciones admisibles  $v$  en  $w \in D$  son aquellas donde  $w + \varepsilon v \in D$  para todo suficientemente pequeño  $\varepsilon \geq 0$  y donde  $\delta F(w; v)$  exista. Por lo tanto, y debido a Ec. (7),  $v$  es una dirección admisible en  $w$ , si y solo si,  $v \in D_a$  donde:

$$\begin{aligned} D_a = \{v; v(x, \bullet) &\in C^2[t_0, t_1], v(\bullet, t) \in C(\bar{G}), v(\bullet, t)|_{\bar{G}^{(k)}} \in C^4(\bar{G}^{(k)}), \\ i = 1, \dots, 2, v(x, t_0) = v(x, t_1) = 0, \forall x \in \bar{G}\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Realizando desarrollos analíticos adecuados empleando la notación compacta (ver Grossi y Raffo, 2013) se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta F(w; v) &= \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{k=1}^N \left[ \int_{G^{(k)}} \left( (\rho h)^{(k)} (D^{1(3)} w) (D^{1(3)} v) - \sum_{i=1}^3 S_i^{(k)} D^{\alpha(i)} v \right) dx \right. \right. \\ &\quad - \sum_{m=1}^2 \int_{\Gamma^{(k,m)}} \left( r_T^{(k,m)} w v + r_R^{(k,m)} \frac{\partial w}{\partial \vec{n}^{(k,m)}} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}^{(k,m)}} \right) ds \\ &\quad \left. \left. - \int_{\Gamma^{(c_k)}} \left( r_T^{(c_k)} w v + r_R^{(c_k)} \left[ \partial w / \partial x_1 \right]_{c_k} \left[ \partial v / \partial x_1 \right]_{c_k} \right) ds \right] \right\} dt, \end{aligned} \quad (9)$$

donde

$$S_i^{(k)} = \sum_{j=1}^3 A_{ij}^{(k)}(x) D^{\alpha(j)} w(x, t), \quad (10)$$

siendo  $A_{ij}^{(k)}$  los coeficientes de la matriz simétrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(k)} & C_{12}^{(k)} & 2C_{16}^{(k)} \\ C_{12}^{(k)} & C_{22}^{(k)} & 2C_{26}^{(k)} \\ 2C_{16}^{(k)} & 2C_{26}^{(k)} & 4C_{66}^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Es conveniente introducir un cambio de variables para operar con los puntos correspondientes a las curvas  $\Gamma^{(k)}$ . Consideremos las nuevas variables  $(y_1, y_2)$  donde  $y_1$  es una distancia que va desde el contorno y normal a  $\partial G$  y la variable  $y_2$  es la longitud del arco medido desde el punto  $(c_1, b_1)$  del contorno  $\partial G$  (ver Figura 2).

Este cambio de variables transforma  $w = w(x, t)$  en  $\tilde{w} = \tilde{w}(y, t)$  con  $y = (y_1, y_2)$ . También transforma  $v$  en  $\tilde{v}$ . Por lo tanto se obtienen las siguientes relaciones de las derivadas originales  $D^{1^{(i)}}v$  y las nuevas  $D^{1^{(i)}}\tilde{v}$  en notación compacta (ver Grossi y Raffo, 2013):

$$D^{1^{(i)}}v = \left( D^{1^{(1)}}\tilde{v} \right) \tilde{n}_i^{(k)} + (-1)^i \left( D^{1^{(2)}}\tilde{v} \right) \tilde{n}_{3-i}^{(k)}, \quad i = 1, 2, \text{ en } \partial G^{(k)}. \quad (12)$$

### 3 PLACA RECTANGULAR

Sea una placa rectangular anisótropa con:

$$G = \left\{ (x_1, x_2), 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b \right\}, \quad (13)$$

y tres líneas de rótulas elásticas paralelas al eje  $x_2$ . Por lo tanto, los subdominios correspondientes son:

$$G^{(i)} = \left\{ (x_1, x_2), c_{i-1} < x_1 < c_i, 0 < x_2 < b \right\}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (14)$$

donde  $c_0 = 0$  y  $c_4 = a$ . Las curvas  $\Gamma^{(k,m)}$  de la Ec. (1) son

$$\begin{aligned} \Gamma^{(k,1)} &= \left\{ (c_{k-1} + x_1, 0), x_1 \in [0, c_k - c_{k-1}] \right\}, \quad k = 2, 3, \\ \Gamma^{(k,2)} &= \left\{ (c_k - x_1, b), x_1 \in [0, c_k - c_{k-1}] \right\}, \quad k = 2, 3, \\ \Gamma^{(1,1)} &= \left\{ (c_1 - x_1, b), x_1 \in [0, c_1] \right\}, \quad \Gamma^{(1,2)} = \left\{ (0, b - x_2, b), x_2 \in [0, b] \right\}, \\ \Gamma^{(1,3)} &= \left\{ (x_1, 0), x_1 \in [0, c_1] \right\}, \\ \Gamma^{(4,1)} &= \left\{ (c_3 + x_1, 0), x_1 \in [0, a - c_3] \right\}, \quad \Gamma^{(4,2)} = \left\{ (a, x_2), x_2 \in [0, b] \right\}, \\ \Gamma^{(4,3)} &= \left\{ (a - x_1, b), x_1 \in [0, a - c_3] \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

donde se adoptó la notación:

$$\Gamma^{(1)} = \Gamma^{(1,1)} \cup \Gamma^{(1,2)} \cup \Gamma^{(1,3)}, \quad (16)$$

y (ver Figura 2)

$$\Gamma^{(4)} = \Gamma^{(4,1)} \cup \Gamma^{(4,2)} \cup \Gamma^{(4,3)}. \quad (17)$$

En consecuencia, el borde superior de la placa está dado por (ver Figura 2):

$$\Gamma^{(k,j)}, (k, j) \in \{(1,1), (2,2), (3,2), (4,3)\} \quad (18)$$

que corresponde a  $\tilde{n}_1^{(k)} = 0, \tilde{n}_2^{(k)} = 1$ , mientras que al borde inferior de la placa le corresponde:

$$(k, j) \in \{(1,3), (2,1), (3,1), (4,1)\} \quad (19)$$

$$\text{y } \tilde{n}_1^{(k)} = 0, \tilde{n}_2^{(k)} = -1.$$

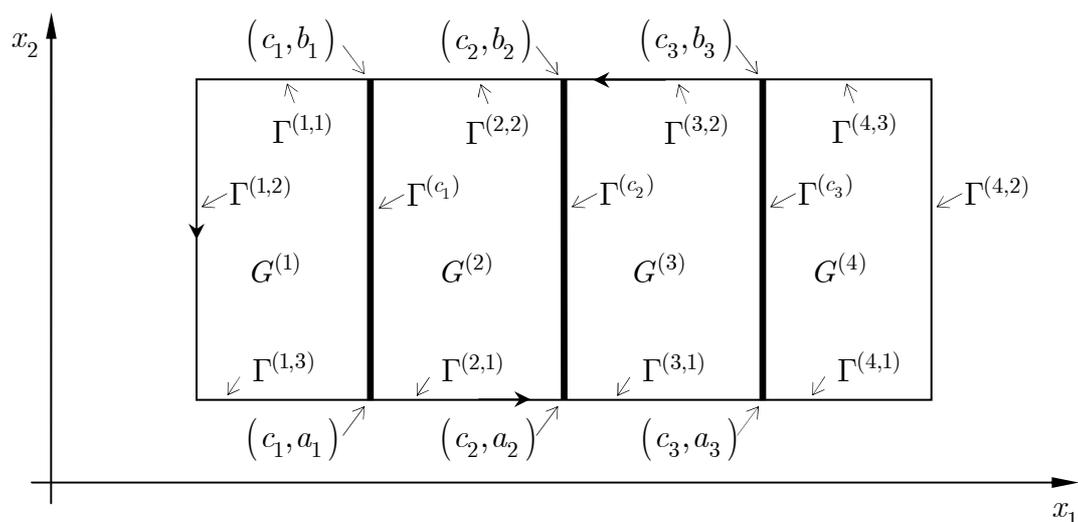


Figure 2: Rectangular plate with three internal lines hinges

Del desarrollo del Cálculo de Variaciones del funcional energético, se obtienen las siguientes relaciones (ver Grossi y Raffo, 2013):

$$\begin{aligned} D^{1(1)} w(x_1, x_2, t) \Big|_{\Gamma^{(k,j)}} &= -D^{1(2)} \tilde{w}(0, y_2, t), \\ D^{1(2)} w(x_1, x_2, t) \Big|_{\Gamma^{(k,j)}} &= D^{1(1)} \tilde{w}(0, y_2, t) \end{aligned} \quad (20)$$

donde  $(k, j) \in \{(1,1), (2,2), (3,2), (4,3)\}$  y

$$\begin{aligned} D^{1(1)} w(x_1, x_2, t) \Big|_{\Gamma^{(k,j)}} &= D^{1(2)} \tilde{w}(0, y_2, t), \\ D^{1(2)} w(x_1, x_2, t) \Big|_{\Gamma^{(k,j)}} &= -D^{1(1)} \tilde{w}(0, y_2, t) \end{aligned} \quad (21)$$

donde  $(k, j) \in \{(1,3), (2,1), (3,1), (4,1)\}$ . Finalmente

$$\begin{aligned}
D^{1(1)} w(x_1, x_2, t) \Big|_{\Gamma(1,2)} &= -D^{1(1)} \tilde{w}(0, y_2, t), \\
D^{1(2)} w(x_1, x_2, t) \Big|_{\Gamma(1,2)} &= -D^{1(2)} \tilde{w}(0, y_2, t), \\
D^{1(1)} w(x_1, x_2, t) \Big|_{\Gamma(4,2)} &= D^{1(1)} \tilde{w}(0, y_2, t), \\
D^{1(2)} w(x_1, x_2, t) \Big|_{\Gamma(4,2)} &= D^{1(2)} \tilde{w}(0, y_2, t).
\end{aligned} \tag{22}$$

Análogamente se obtiene

$$\tilde{r}_R^{(k,j)}(0, y_2) D^{1(1)} \tilde{w}(0, y_2, t) = -\tilde{S}_2^{(k)}(0, y_2, t), \tag{23}$$

cuando  $(k, j) \in \{(1,1), (2,2), (3,2), (4,3)\}$  y

$$\tilde{r}_R^{(k,j)}(0, y_2) D^{1(1)} \tilde{w}(0, y_2, t) = -\tilde{S}_2^{(k)}(0, y_2, t), \tag{24}$$

cuando  $(k, j) \in \{(1,3), (2,1), (3,1), (4,1)\}$ .

Finalmente para los dos lados restantes:

$$\tilde{r}_R^{(1,2)}(0, y_2) D^{1(1)} \tilde{w}(0, y_2, t) = -\tilde{S}_1^{(1)}(0, y_2, t), \tag{25}$$

y

$$\tilde{r}_R^{(4,2)}(0, y_2) D^{1(1)} \tilde{w}(0, y_2, t) = -\tilde{S}_1^{(4)}(0, y_2, t). \tag{26}$$

#### 4 MÉTODO DE RITZ EN COMBINACIÓN CON EL MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Las condiciones de transición (27) aseguran la continuidad del desplazamiento transversal a lo largo de las líneas de rótulas elásticas.

$$\begin{aligned}
w(c_k^-, x_2, t) &= w(c_k^+, x_2, t) = w(c_k, x_2, t), x_2 \in [a_k, b_k], \\
k &= 1, 2, \dots, N-1.
\end{aligned} \tag{27}$$

Para mantener esta condición se emplea el método de Ritz junto con el método de multiplicadores de Lagrange, para así forzar la continuidad del desplazamiento en las líneas de rótulas empleando multiplicadores de Lagrange (Quintana y Grossi, 2012).

En un análisis de vibraciones libres de la placa, el desplazamiento transversal está dado por funciones armónicas del tiempo, por ejemplo:

$$w^{(k)}(x, y, t) = W^{(k)}(x, y) \cos \omega t, k = 1, 2, \dots, N, \tag{28}$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular de la placa. Reemplazando Ec. (28) en la Ec. (1) se obtiene la expresión máxima  $F_{\max}$  y el método de multiplicadores de Lagrange requiere que sea estacionario el funcional

$$L = F_{\max} + F_\lambda, \tag{29}$$

donde

$$F_\lambda = \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\Gamma^{(c_k)}} \lambda^{(k)}(x_2) \left( W(c_k^-, x_2) - W(c_k^+, x_2) \right) dx_2, \quad (30)$$

es la condición que impone el requerimiento de la Ec. (27).

El desplazamiento transversal de la placa se lo considera como

$$W^{(k)}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{m_k} \sum_{j=1}^{n_k} a_{ij}^{(k)} p_i^{(k)}(x_1) q_j^{(k)}(x_2), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (31)$$

$$x_1 = x_1 / a, x_2 = x_2 / b,$$

donde  $a$  y  $b$  son los lados de la placa rectangular,  $p_i^{(k)}, q_i^{(k)}$  son polinomios y para la implementación de los multiplicadores se consideró la función

$$\lambda^{(k)}(x_2) = \sum_{i=1}^{r_k} d_i^{(k)} x_2^{i-1}, \quad (32)$$

donde  $d_i^{(k)}$  son los coeficientes a determinar.

El desarrollo de la implementación del método de Ritz en conjunto con el método de los multiplicadores de Lagrange lleva a la siguiente ecuación de autovalores (Quintana y Grossi, 2012):

$$([K] - \Omega^2 [M]) \{a\} = \{0\}, \quad (33)$$

donde  $\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h / C}$  es el parámetro de frecuencias adimensional. Por simplicidad se adoptó  $C_{11}^{(k)} = C_{11} = C$ ,  $h^{(k)} = h$ , y  $m_k = n_k = r_k = M$ , con  $k = 1, 2, \dots, N$ .

## 5 MODELOS DE FISURA

Para la implementación del modelo de fisura se consideró alguno de los modelos propuestos en la literatura para vigas con sección rectangular. En este trabajo se analiza la extensión de estos modelos a placas con líneas de fisura.

Todos los modelos considerados son para fisuras abiertas a un solo lado de la placa.

### 5.1 Modelo 1

Ostachowicz y Krawezuk (1991) propusieron originalmente, un modelo de fisura formulado con herramientas fractomecánicas, basado en el factor de intensidad de tensiones para fisuras superficiales simples y abiertas (ver Figura 3).

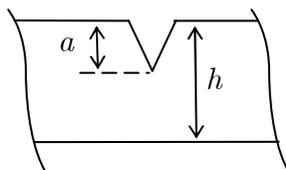


Figura 3: Placa con una fisura superficial abierta a un solo lado.

Este modelo consiste en considerar donde se encuentra la fisura, como una rótula elástica

donde la rigidez del resorte rotacional varía de la siguiente manera para una sección rectangular

$$r_R^{(c_k)} = \frac{Ebh^2}{72\pi\eta^2 f^{(1)}(\eta)}, \quad (34)$$

donde  $E$  es el módulo de Young del material de la placa,  $b$  el ancho de la placa y  $h$  el espesor de la placa,  $\eta = a/h$  es la relación entre la profundidad de la fisura, siendo  $a$  la profundidad de la fisura. La función  $f(\eta)$  es para una fisura abierta a un solo lado:

$$f^{(1)}(\eta) = 0.6384 - 1.035\eta + 3.7201\eta^2 - 5.1773\eta^3 + 7.553\eta^4 - 7.332\eta^5 + 2.4909\eta^6, \quad (35)$$

## 5.2 Modelo 2

Shifrin y Ruotolo (1999), para las mismas propiedades descritas en el Modelo 1, propusieron a la rigidez rotacional como

$$r_R^{(c_k)} = \frac{Ebh^2}{64.152f^{(2)}(\eta)}, \quad (36)$$

siendo

$$f^{(2)}(\eta) = 1.8624\eta^2 - 3.95\eta^3 + 16.375\eta^4 - 37.226\eta^5 + 76.81\eta^6 - 126.9\eta^7 + 172\eta^8 - 143.97\eta^9 + 66.56\eta^{10}. \quad (37)$$

## 5.3 Modelo 3

Chondros y otros (1998), para las mismas propiedades descritas en los modelos anteriores, propusieron a la rigidez rotacional como

$$r_R^{(c_k)} = \frac{Ebh^2}{72\pi(1-\mu^2)f^{(3)}(\eta)}, \quad (38)$$

siendo

$$f^{(3)}(\eta) = 0.6272\eta^2 - 1.04533\eta^3 + 4.5948\eta^4 - 9.9736\eta^5 + 20.2948\eta^6 - 33.0351\eta^7 + 47.1063\eta^8 - 40.7556\eta^9 + 19.6\eta^{10}. \quad (39)$$

## 5.4 Modelo 4

Fernández-Sáez y Navarro (2002), para las mismas propiedades descritas en los modelos anteriores, usando técnicas de la mecánica de fractura y empleando Tada y otros (1985), propusieron a la rigidez rotacional como

$$r_R^{(c_k)} = \frac{Ebh^2}{24f^{(4)}(\eta)}, \quad (40)$$

siendo

$$f^{(4)}(\eta) = \left( \frac{\eta}{1-\eta} \right)^2 (5.93 - 19.69\eta + 37.14\eta^2 - 35.84\eta^3 + 13.12\eta^4). \quad (41)$$

### 5.5 Modelo 5

Hsu (2005), para las mismas propiedades descriptas en los modelos anteriores, usando la aproximación de Broek (1986) y con el factor de intensidad de tensiones propuesto en Tada y otros (1985), propuso a la rigidez rotacional como

$$r_R^{(c_k)} = \frac{Ebh^2}{72\pi(1-\mu^2)f^{(5)}(\eta)}, \quad (42)$$

siendo

$$f^{(5)}(\eta) = \int_0^\eta \eta (g^{(5)}(\eta))^2 d\eta, \quad (43)$$

$$g^{(5)}(\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\eta} \tan\left(\frac{\pi\eta}{2}\right)} \frac{0.923 + 0.199 \left[1 - \sin\left(\frac{\pi\eta}{2}\right)\right]^4}{\cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right)}. \quad (44)$$

### 5.6 Modelo 6

Lele y Maiti (2002), para las mismas propiedades descriptas en los modelos anteriores, extendieron el uso de lo propuesto por Ostachowicz y Krawezuk (1991) y Chaudhari y Maiti (2000), y propusieron:

$$r_R^{(c_k)} = \frac{Ebh^5}{72\pi f^{(6)}(a)}, \quad (45)$$

siendo

$$f^{(6)}(a) = \int_0^a \bar{a}^2 g^{(6)}(\bar{\eta}) d\bar{a}, \quad \text{con } \bar{\eta} = \bar{a}/h, \quad (46)$$

$$g^{(6)}(\eta) = 1.2769 - 3.105\eta + 14.878\eta^2 - 25.8\eta^3 + 45.32\eta^4 - 51.33\eta^5 + 64.39\eta^6 - 62.96\eta^7 + 200.9\eta^8 - 243.2\eta^9 + 83.16\eta^{10} + 225.6\eta^{12}. \quad (47)$$

## 6 RESULTADOS

Se analiza con el método propuesto en el presente trabajo, con resultados numéricos obtenidos con el programa Abaqus de elementos finitos y con mediciones experimentales de los valores del coeficiente de frecuencia  $\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho h} / C$ , para placas rectangulares isótropas con  $E = 20.5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,  $\mu = 0.3$ , rígidamente empotradas en el borde  $x_1 = 0$ , y libres en los otros bordes para distintas dimensiones, con una y dos líneas con fisuras. La isotropía está

caracterizada por

$$C_{11} = C_{22} = C, C_{16} = C_{26} = 0, C_{12} = \mu C, C_{66} = 0.5(1 - \mu)C, \quad (48)$$

donde  $C$  denota la rigidez a la flexión de la placa isótropa. La rigidez rotacional en las líneas de rótulas se consideran con el coeficiente adimensional de rigidez rotacional

$$R_R^{(c_k)} = r_R^{(c_k)} a / C, k = 1, 2, 3. \quad (49)$$

Para obtener los resultados con el método propuesto se considera  $m_k = n_k = r_k = 8$ .

En la [Tabla 1](#) se presentan las propiedades de las placas con y sin fisuras analizadas, siendo  $\bar{c}_i = c_i / a$ . La cantidad de valores de  $\bar{c}_i$  indicados representa la cantidad de fisuras de la placa analizada.

Placa	$b / a$	$h$ [mm]	$\bar{c}_i$	$\eta$
1	0.9091	3.20	-	-
2	0.4318	3.19	-	-
3	0.9091	3.20	$\bar{c}_1 = 0.4545$	0.4684
4	0.4318	3.19	$\bar{c}_1 = 0.4545$	0.4702
5	0.9091	3.22	$\bar{c}_1 = 0.8227$	0.4657
6	0.4318	3.19	$\bar{c}_1 = 0.8182$	0.4696
7	0.9136	3.21	$\bar{c}_1 = 0.4498$	0.9346
			$\bar{c}_2 = 0.7316$	
8	0.9136	3.16	$\bar{c}_1 = 0.2814$	0.8544
			$\bar{c}_2 = 0.5407$	
			$\bar{c}_3 = 0.7225$	

Tabla 1: Propiedades de las placas analizadas.

Para la modelización con el programa Abaqus se utilizó el elemento hexaédrico, lineal de 8 nodos C3D8, realizando un análisis previo de convergencia para definir la distribución de la malla.

En la [Figura 4](#) se observa el esquema de medición empleado para obtener experimentalmente las frecuencias naturales de las placas analizadas. Para realizar las mediciones, se emplearon acelerómetros tipo 4374 y amplificador NEXUS tipo 2692-012 de la firma B&K, y una placa adquisidora PCI-6132 de la firma National Instruments y para procesar la señal se utilizó un programa de la misma firma. Se utilizó además un mecanismo de excitación de ondas mecánicas controladas para la determinación de las distintas frecuencias naturales de vibración.

En la [Tabla 2](#) se presentan los primeros seis valores de  $\Omega$  para las Placas 1 y 2 cuyas propiedades se indican en la [Tabla 1](#).

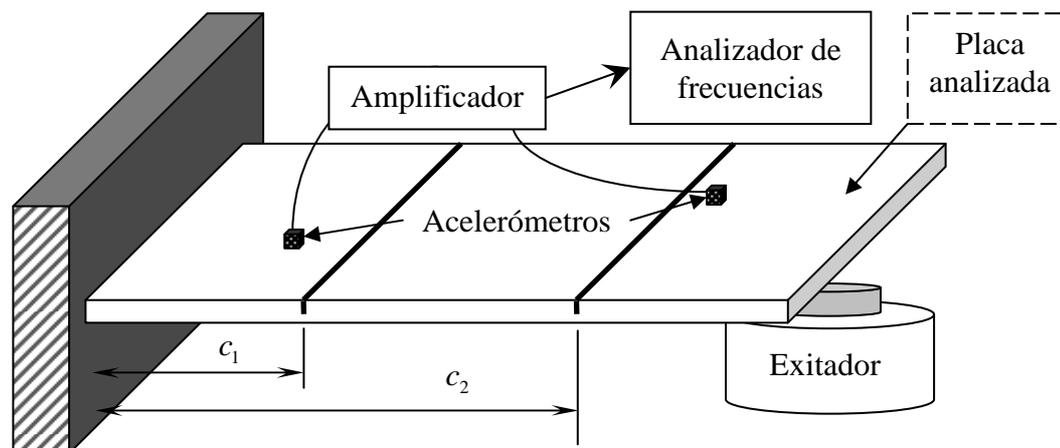


Figura 4: Esquema del sistema de medición de frecuencias naturales con dos acelerómetros.

Placa		Secuencia modal					
		1	2	3	4	5	6
1	Trabajo actual	2.8658	7.5541	17.6956	26.1428	26.9125	48.8665
	Abaqus	2.8639	7.5140	17.6599	26.0485	26.7464	48.4886
	Experimental	2.7933	7.3134	16.7092	25.6478	27.0191	47.3342
2	Trabajo actual	0.6400	3.1321	3.9925	10.0460	11.2173	18.8151
	Abaqus	0.6393	3.0974	3.9849	9.9303	11.1755	16.5078
	Experimental	0.5977	2.8737	3.6784	9.9546	10.6788	15.6906

Tabla 2. Primeros seis valores de  $\Omega$  para las Placas 1 y 2 indicadas en la [Tabla 1](#).

Placa 3	Secuencia modal					
	1	2	3	4	5	6
Modelo 1	2.8285	7.5533	17.1114	26.0436	26.4073	48.5263
Modelo 2	2.8358	7.5535	17.2206	26.0611	26.4989	48.5861
Modelo 3	2.8302	7.5534	17.1368	26.0476	26.4285	48.5401
Modelo 4	2.8277	7.5533	17.0991	26.0417	26.3970	48.5196
Modelo 5	2.7742	7.5524	16.3577	25.8070	25.9348	48.1545
Modelo 6	2.8522	7.5538	17.4757	26.1037	26.7179	48.7326
Abaqus	2.8157	7.4585	16.5794	25.8085	25.9714	48.0295
Experimental	2.6389	7.2062	15.6812	24.8666	24.9681	46.4853

Tabla 3: Primeros seis valores de  $\Omega$  para la Placa 3 indicada en la [Tabla 1](#).

En la [Tabla 3](#) a [Tabla 7](#) se presentan los primeros seis valores de  $\Omega$  para las placas 3 a 7 respectivamente, donde en la [Tabla 1](#) se presentan sus propiedades.

Placa 4	Secuencia modal					
	1	2	3	4	5	6
Modelo 1	0.6318	3.1310	3.8558	9.9723	11.1671	18.8146
Modelo 2	0.6333	3.1312	3.8811	9.9848	11.1763	18.8146
Modelo 3	0.6321	3.1311	3.8615	9.9751	11.1692	18.8146
Modelo 4	0.6316	3.1310	3.8527	9.9708	11.1660	18.8146
Modelo 5	0.6199	3.1299	3.6831	9.8969	11.1051	18.8144
Modelo 6	0.6369	3.1316	3.9405	10.0161	11.1980	18.8147
Abaqus	0.6239	3.0634	3.7521	9.8223	11.0928	16.2485
Experimental	0.5851	2.8913	3.5223	9.2934	10.6587	15.8332

Tabla 4: Primeros seis valores de  $\Omega$  para la Placa 4 indicada en la [Tabla 1](#).

Placa 5	Secuencia modal					
	1	2	3	4	5	6
Modelo 1	2.8651	7.5442	17.6073	26.1056	26.9124	48.3764
Modelo 2	2.8653	7.5461	17.6249	26.1123	26.9124	48.4971
Modelo 3	2.8652	7.5446	17.6116	26.1072	26.9124	48.4067
Modelo 4	2.8651	7.5440	17.6056	26.1050	26.9124	48.3635
Modelo 5	2.8642	7.5311	17.4700	26.0626	26.9123	47.0994
Modelo 6	2.8655	7.5504	17.6641	26.1284	26.9125	48.7234
Abaqus	2.8804	7.5100	17.5559	25.9877	26.5801	47.4303
Experimental	2.6742	7.3162	16.5498	21.4945	25.7329	45.5119

Tabla 5: Primeros seis valores de  $\Omega$  para la Placa 5 indicada en la [Tabla 1](#).

Placa 6	Secuencia modal					
	1	2	3	4	5	6
Modelo 1	0.6398	3.1298	3.9702	10.0352	10.9452	18.7868
Modelo 2	0.6398	3.1302	3.9746	10.0371	10.9984	18.7918
Modelo 3	0.6398	3.1299	3.9712	10.0357	10.9575	18.7879
Modelo 4	0.6398	3.1297	3.9697	10.0350	10.9388	18.7862
Modelo 5	0.6396	3.1273	3.9362	10.0236	10.5477	18.7545
Modelo 6	0.6399	3.1312	3.9845	10.0418	11.1183	18.8042
Abaqus	0.6435	3.1020	3.9547	9.8253	10.6959	16.5629
Experimental	0.6199	2.8931	3.6738	9.4025	10.0110	16.0727

Tabla 6: Primeros seis valores de  $\Omega$  para la Placa 6 indicada en la [Tabla 1](#).

Placa 7	Secuencia modal					
	1	2	3	4	5	6
Modelo 1	2.6887	7.5511	14.6136	25.1262	25.7309	39.9173
Modelo 2	2.2052	7.4931	11.0877	23.4109	25.1915	26.1759
Modelo 3	2.1489	7.4888	10.8262	23.3027	24.5836	25.7033
Modelo 4	1.3839	7.4525	7.9651	15.2620	22.4584	25.4035
Modelo 5	1.4050	7.4531	8.0469	15.4345	22.4722	25.4052
Modelo 6	1.7738	7.4670	9.3696	19.1700	22.7811	25.4487
Abaqus	1.7601	7.3494	9.5228	19.7737	22.4794	25.4274
Experimental	1.4245	7.0716	7.9365	14.1941	21.3165	24.6743

Tabla 7: Primeros seis valores de  $\Omega$  para la Placa 7 indicada en la [Tabla 1](#).

En la [Tabla 8](#) se presentan los primeros cinco valores de  $\Omega$  para la placa 8, donde en la [Tabla 1](#) se presentan sus propiedades. Las formas modales mostradas corresponden a los resultados obtenidos con el método propuesto para el Modelo 5 y a los resultados obtenidos con el programa Abaqus.

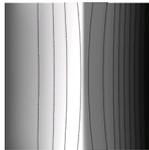
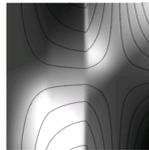
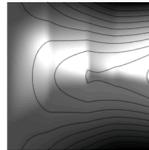
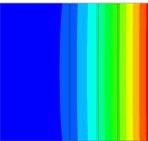
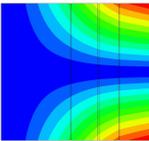
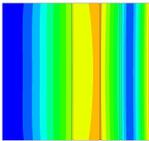
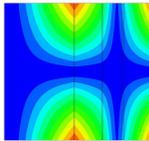
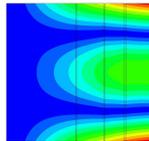
Placa 8	Secuencia modal				
	1	2	3	4	5
Modelo 1	2.4774	7.5010	14.5314	25.2233	25.7291
Modelo 2	2.0635	7.4171	11.9401	24.1511	25.5365
Modelo 3	1.9912	7.4039	11.5207	24.0076	25.5130
Modelo 4	1.7420	7.3620	10.1060	23.5801	25.4390
Modelo 5	1.7408	7.3618	10.0990	23.5782	25.4386
					
Modelo 6	1.8225	7.3750	10.5590	23.7079	25.4631
Abaqus	1.9810	7.3374	9.0968	22.2107	25.5243
					
Experimental	1.7054	7.2352	9.2507	21.7572	25.2714

Tabla 8: Primeros seis valores de  $\Omega$  para la Placa 8 indicada en la [Tabla 1](#). Las formas modales mostradas corresponden al Modelo 5 propuesto y a los resultados obtenidos con el programa Abaqus.

Realizando una comparación entre los valores experimentales y los obtenidos con los

distintos modelos de fisura, se observa que el modelo que mejor representa el comportamiento de la fisura es el Modelo 5 que corresponde a Hsu (2005).

## 7 CONCLUSIONES

Se utilizaron las ecuaciones del problema de contorno y transición provenientes de la aplicación de las técnicas del cálculo de variaciones, y se obtuvo aplicando el método de Ritz en combinación con el método de los multiplicadores de Lagrange el comportamiento de placas rectangulares con líneas de fisuras.

Se implementaron modelos de fisura abierta representadas con un modelo de rótula elástica, el cual en función de las propiedades de la fisura varía la rigidez a la flexión. Con estos modelos, se obtuvieron los valores de las primeras frecuencias naturales de vibrar de placas rectangulares con fisuras. Se compararon los resultados con resultados numéricos obtenidos con el programa Abaqus y con mediciones experimentales.

Se observa una muy buena concordancia entre los valores obtenidos con el método propuesto, con las mediciones experimentales y con los obtenidos con el programa Abaqus.

## REFERENCIAS

- Binici, B., Vibration of beams with multiple open cracks subjected to axial force. *Journal of Sound and Vibration*, 287:277–295, 2005.
- Blanchard, P., and Brüning, E., *Variational Methods in Mathematical Physics*. Springer-Verlag, 1992.
- Bliss, G., *Calculus of Variations*. The Mathematical Association of América, The Open Court Publ. Co., 1971.
- Brehtken-Manderscheid, U., *Introduction to the Calculus of Variations*. Chapman and Hall London, 1991.
- Broek, D., *Elementary engineering fracture mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers, 1986.
- Chaudhari, T. D. y Maiti, S. K., A study of vibration of geometrically segmented beams with and without cracks. *International Journal of Solids and Structures*, 37:761-779, 2000.
- Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D. y Yao, J., A consistent cracked bar vibration theory. *Journal of Sound and Vibration*, 200:303-313, 1997.
- Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D. y Yao, J., A continuous cracked beam vibration theory. *Journal of Sound and Vibration*, 215:17-34, 1998.
- Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D. y Yao, J., Vibration of a beam with a breathing crack. *Journal of Sound and Vibration*, 239:57-67, 2001.
- Courant, R., y Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics*. Interscience Publ., 1953.
- Dimarogonas A. D., Vibration of cracked structures: a state of the art review. *Engineering Fracture Mechanics*, 55:831-857, 1996.
- Dym, C. y Shames, I., *Solid Mechanics: A Variational Approach*. Mc Graw Hill Book Co., 1973.
- Ewing, G. M., *Calculus of Variations with Applications*. Dover Publications, 1985.
- Farghaly, S. H., Comments and further results on “Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam”. *Journal of Sound and Vibration*, 169:704-708, 1994.
- Fernández-Sáez, J. y Navarro, C., Fundamental frequency of cracked beams in bending vibrations: an analytical approach. *Journal of Sound and Vibration*, 256:17-31, 2002.
- Giaquinta M. y Hildebrandt, S., *Calculus of Variations I*. Springer-Verlag, 1996.
- Grossi, R. O., Boundary value problems for anisotropic plates with internal line hinges. *Acta*

- Mechanica*, 223:125-144, 2012.
- Grossi, R. O., *Cálculo de Variaciones. Teoría y aplicaciones*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE) Editorial Dsignum, 2010.
- Grossi, R. O. y Raffo, J. L., Natural vibrations of anisotropic plates with several internal line hinges. *Acta Mechanica*, Publicado online a la fecha, 2013.
- Guelfand I. y Fomin, S., *Calculus of Variations*. Prentice Hall, 1963.
- Gupta, P. R. y Reddy, J.N., Buckling and vibrations of orthotropic plates with an internal line hinge. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2:457-486, 2002.
- Hsu, M. H., Vibration analysis of edge-cracked beam on elastic foundation with axial loading using the differential quadrature method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:1-17, 2005.
- Huang, M., Ma, X. Q., Sakiyama, T., Matsuda, H., y Morita, C., Natural vibration study on rectangular plates with a line hinge and various boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 322:227-240, 2009.
- Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*. Taylor and Francis, 1999.
- Kantorovich, L. y Krylov, V., *Approximate Methods of Higher Analysis*. Interscience Publishers, 1964.
- Khaji, N., Shafiei, M., y Jalalpour, M., Closed-form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 51:667-681, 2009.
- Khiem, N. T. y Lien, T. V., A simplified method for natural frequency analysis of a multiple cracked beam. *Journal of Sound and Vibration*, 245:737-751, 2001.
- Khiem, N. T. y Lien, T. V., Multi-crack detection for beam by the natural frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 273:175-184, 2004.
- Khiem, N. T. y Lien, T. V., The dynamic stiffness matrix method in forced vibration analysis of multiple-cracked beam. *Journal of Sound and Vibration*, 254:541-555, 2002.
- King, R. B., Elastic-plastic analysis of surface flaws using a simplified line-spring model. *Engineering Fracture Mechanics*. 18:217-231, 1983.
- Leitmann, G., *The Calculus of Variations and Optimal Control*. Plenum Press, 1986.
- Lekhnitskii, S.G., *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach Science Publishers, 1968.
- Lele, S. P. y Maiti, S. K., Modelling of transverse vibration of short beams for crack detection and measurement of crack extension. *Journal of Sound and Vibration*, 257:559-583, 2002.
- Li, Q. S., Free vibration analysis of non-uniform beams with an arbitrary number of cracks and concentrated masses. *Journal of Sound and Vibration*, 252:509-525, 2002.
- Li, Q. S., Vibratory characteristics of multi-step beams with an arbitrary number of cracks and concentrated masses. *Applied Acoustics*, 62:691-706, 2001.
- Liebowitz, H. y Claus, W. D., Failure of notched columns. *Engineering Fracture Mechanics*, 1:379-383, 1968.
- Liebowitz, H., Vanderveldt, H. y Harris, D. W., Carrying capacity of notched column. *International Journal of Solids and Structures*, 3:489-500, 1967.
- Lin, H. P., Chang, S. C. y Wu, J. D., Beam vibrations with an arbitrary number of cracks. *Journal of Sound and Vibration*, 258:987-999, 2002.
- Loya, J.A., Rubio, L. y Fernandez-Saez, J., Natural frequencies for bending vibrations of Timoshenko cracked beams. *Journal of Sound and Vibration* 290:640-653, 2006.
- Mikhlin S., *Variational Methods of Mathematical Physics*. Mac Millan, 1964.
- Narkis, Y., Identification of crack location in vibrating simply supported beams. *Journal of Sound and Vibration*, 172:549-558, 1994.
- Okamura, H., Liu, H. W., Chu, C. S. y Liebowitz, H., A cracked column under compression.

- Engineering Fracture Mechanics*, 1:547-564, 1969.
- Ostachowicz, W. M. y Krawczuk, M., Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, 150:191-201, 1991.
- Quintana, M. V. y Grossi, R. O., Free vibrations of a generally restrained rectangular plate with an internal line hinge, *Applied Acoustics*, 73: 356-365, 2012.
- Raffo, J. L. y Grossi, R. O., Boundary and eigenvalue problems for anisotropic plates with several internal line hinges. *Mecánica Computacional*, 16:2575-2591, 2012.
- Reddy, J. N., *Mechanics of Laminated Anisotropic Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, 1997.
- Rizos, P. F., Aspragathos, N. y Dimarogonas, A. D., Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes. *Journal of Sound and Vibration*. 138:381-388, 1990.
- Sagan H., *Introduction to the Calculus of Variations*. Mc Graw Hill Book Co., 1969.
- Shifrin, E. I. y Ruotolo, R., Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks. *Journal of Sound and Vibration*. 222:409-423, 1999.
- Solecki R., Bending vibration of a simply supported rectangular plate with a crack parallel to one edge. *Engineering Fracture Mechanics*, 18:1111-1118, 1983.
- Szilar, R., *Theory and Analysis of Plates*. Prentice Hall, 1974.
- Tada H., Paris P. y Irwin G., *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. St Louis: Paris Productions Inc., 1985.
- Timoshenko, S. y Krieger, W., *Theory of Plates and Shells*. Mc Graw Hill, 1959.
- Troutman, J. L., *Variational Calculus and Optimal Control*. Springer-Verlag, 1996.
- Wang, C. M., Xiang, Y., C. y Wang, Y., Buckling and vibration of plates with an internal line hinge via the Ritz method. *Proceedings of First Asian-Pacific Congress on Computational Mechanics, Sydney*, 1663-1672, 2001.
- Weinstock, R., *Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering*. Dover Publications, 1974.
- Whitney, J. M., *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*. Technomic Publishing Co. Inc., 1987.
- Xiang, Y., y Reddy, J. N., Natural vibration of rectangular plates with an internal line hinge using the first order shear deformation plate theory. *Journal of Sound and Vibration*, 263:285-297, 2003.
- Zheng, D. Y. y Fan, S. C., Natural frequencies of a non-uniform beam with multiple cracks via modified Fourier series. *Journal of Sound and Vibration*. 242:701-717, 2001.