

## IDENTIFICACIÓN DE CAVIDADES MEDIANTE LA TOMOGRAFÍA DE IMPEDANCIA ELÉCTRICA: OBSERVACIONES ACERCA DE LA IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO VARIACIONAL USANDO LA TEORÍA DE DISCONTINUIDADES LIBRES

Exequiel M. A. Santucho<sup>a</sup>, Antonio Orlando<sup>b</sup> y Mariela Luege<sup>a</sup>

<sup>a</sup>CONICET, Instituto de Estructuras “Arturo M. Guzmán”, FACET, UNT, Av. Independencia 1800, 4000 S.M. de Tucumán, Argentina, [esantucho@facet.unt.edu.ar](mailto:esantucho@facet.unt.edu.ar), [mluege@herrera.unt.edu.ar](mailto:mluege@herrera.unt.edu.ar), <http://www.herrera.unt.edu.ar/iest>

<sup>b</sup>Instituto de Estructuras “Arturo M. Guzmán”, FACET, UNT; Departamento de Mecánica, FACET, UNT, [aorlando@herrera.unt.edu.ar](mailto:aorlando@herrera.unt.edu.ar)

**Palabras Clave:** Problema inverso, cavidades, discontinuidades libres, phase-field, penalización de perímetro.

**Resumen.** La tomografía de impedancia eléctrica (TIE) es una técnica de ensayo no destructivo que estima la distribución espacial de la conductividad eléctrica en el interior de un objeto, a partir de mediciones electrostáticas tomadas en su contorno. Esta técnica puede ser usada también para reconstruir defectos en el interior del objeto, identificando tales defectos como discontinuidades en el campo de conductividad.

Dada una medida de voltaje y corriente en el contorno, la reconstrucción del campo de conductividad es un problema mal condicionado, debido a la falta de continuidad en el mapeo inverso Dirichlet-a-Neumann. Este mapeo es el que, dado un campo de conductividad con cualquier patrón posible de corriente que pasa a través del contorno, asocia la correspondiente solución de potencial del problema electrostático. La discontinuidad de este operador plantea importantes desafíos en el diseño de algoritmos estables de reconstrucción numérica. Por tanto, se introducen métodos de regularización que restringen el rango del mapeo inverso, de manera de poder computar soluciones aproximadas estables.

En este trabajo abordamos el problema de encontrar cavidades aisladas en un dominio plano, homogéneo y conductor, usando solamente una medición sobre el contorno. Presentamos y discutimos experimentos numéricos de un modelo variacional de reconstrucción de cavidades, el cual es una ligera variación de uno propuesto en (L. Rondi, *J. Diff. Eq.*, 251:150-175 (2011)). El modelo usa, como término de regularización, el perímetro de los defectos a determinar. Para su tratamiento numérico, el funcional de perímetro es reemplazado por funcionales elípticos que lo aproximan en el sentido de la  $\Gamma$ -convergencia, según resultados dados en (L. Modica and S. Mortola, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 14:526-259 (1977); L. Modica, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 98:123-142 (1987)). Para la minimización del funcional regularizado, que presenta el potencial eléctrico sujeto a una ecuación de estado que describe la difusión eléctrica, usamos un algoritmo de minimización de tipo gradiente como el introducido en (W. Ring and L. Rondi, *Interf. and Free Bound.*, 13:353-371 (2011)). Los experimentos numéricos son llevados a cabo usando datos sintéticos para las mediciones de contorno, y son comparados con aquellos que se obtienen mediante la aplicación de un método clásico de reconstrucción, basado en la regularización de Tikhonov.

## 1. INTRODUCCIÓN

La tomografía de impedancia eléctrica (TIE) es un método que estima la distribución espacial de la conductividad eléctrica en el interior de un objeto conductor, mediante mediciones de voltaje (tensión, diferencia de potencial, o potencial eléctrico) en la superficie exterior. Este voltaje es generado mediante flujos de corriente eléctrica inyectados a través del objeto. Ya que los materiales poseen diferentes propiedades eléctricas, la determinación del campo de conductividad puede ser usada para revelar información sobre la estructura interna del objeto sondeado, y las discontinuidades en el campo de la conductividad pueden ser consideradas como defectos en el interior del objeto. Mientras el uso de corrientes de baja intensidad y de radiación no ionizante hacen la TIE muy atractiva, como en geofísica, en monitoreos y control de procesos industriales, en ensayos no destructivos y en diagnóstico médico (Lionheart et al., 2004), la ineficiencia de los métodos actuales para la reconstrucción del campo de conductividad, dado el conocimiento parcial de las mediciones de contorno, representa aún el principal obstáculo para su amplio uso como técnica de reconstrucción de imágenes (Lionheart, 2004). La determinación del campo de conductividad junto con sus correspondientes características, representa un problema inverso no lineal. La no linealidad surge de la dependencia del flujo de corriente y las superficies electrostáticas equipotenciales con la conductividad, mientras que el mal condicionamiento surge principalmente por la falta de estabilidad, dado que la unicidad del campo de conductividad ha sido satisfactoriamente establecida para algunos casos, considerando el conocimiento completo o parcial de las mediciones de contorno. (Alessandrini, 1988; Borcea, 2002).

Para una aplicación exitosa de la TIE, es, por lo tanto, fundamental el diseño de algoritmos de reconstrucción eficientes y estables. Un gran número de métodos numéricos han sido propuestos en la literatura (Yorkey et al., 1987; Santosa y Vogelius, 1991; Rondi y Santosa, 2001; Lionheart, 2004; Chung et al., 2005; Lechleiter y Rieder, 2006). Aquí, mencionamos brevemente aquellos que son de tipo variacional, es decir, los que están basados en la minimización de un cierto funcional, típicamente el cuadrado de la norma  $L^2$  de la diferencia entre los datos de potencial eléctrico simulados asumiendo una conductividad, y el potencial medido. Debido al mal condicionamiento, se debe introducir luego algún tipo de regularización para lidiar con la implementación numérica. Esto consiste en aumentar al funcional de cuadrados mínimos, un término que introduce información sobre la conductividad desconocida. En la regularización estándar de Tikhonov, el término de regularización agregado está dado por la norma  $L^2$  de la conductividad desconocida  $\sigma$  (Engl et al., 1996), lo cual implica buscar una  $\sigma$  suave, mientras que en la regularización por Variación Total se emplea la  $BV$ -seminorma de  $\sigma$  (Acar y Vogel, 1994; Ambrosio et al., 2000), lo que permitiría discontinuidades en  $\sigma$ .

En este trabajo abordamos el problema de encontrar cavidades aisladas en un dominio plano homogéneo y conductor, usando solamente una medición electrostática en el contorno. Este problema modelo puede ser considerado como un caso especial de TIE, donde la conductividad  $\sigma(x)$  es aquí asumida para tomar sólo dos valores: 1 y 0, para  $x$  en el interior y exterior del subdominio desconocido  $K$  de  $\Omega$ , respectivamente; es decir,  $\sigma$  juega el mismo rol que la función característica  $\chi_K$  de dominio desconocido  $K$ . Tomando como término de regularización la  $BV$ -seminorma de  $\sigma$ , es decir  $|D\chi_K|_{BV}$ , usamos en realidad como término de penalización el perímetro de la cavidad desconocida,  $\text{Per}(K, \Omega)$ , dado que para  $\sigma = \chi_K$ ,  $|D\chi_K|_{BV} = \text{Per}(K, \Omega)$  (Ambrosio et al., 2000; Giusti, 1984). El modelo introducido aquí es una pequeña variación de uno propuesto en (Rondi, 2011), el cual tiene incorporado un término adicional relacionado con el Laplaciano del potencial electrostático desconocido. El funcional de perímetro se aproxima con funcionales elípticos usando un resultado de Modica (1987). Tales funcionales, expresados

en términos de una variable continua phase-field que aproxima la función característica incógnita, aproximan el funcional de perímetro en el sentido de la  $\Gamma$ -convergencia (Braides, 2002) y permiten un tratamiento numérico más sencillo.

Después de esta breve introducción, en la siguiente sección se describen los problemas directo e inverso de la TIE, mientras que en la sección 3 se describen dos formas de regularización del problema mal condicionado: la regularización clásica de Tikhonov y la regularización que usa el funcional de perímetro del defecto incógnita. En la sección 4 se mencionan aspectos de la implementación numérica de ambos métodos, y en la sección 5 se muestra su aplicación en la resolución de un ejemplo numérico. Finalmente, se concluye el trabajo con algunas observaciones.

## 2. PROBLEMA DIRECTO E INVERSO

En el problema de la TIE se intenta reconstruir la conductividad eléctrica  $\sigma = \sigma(x)$ , y para ello se emplean mediciones simultáneas de voltaje y corriente en el contorno accesible del cuerpo. En el problema inverso de cavidad en un cuerpo homogéneo, la conductividad es conocida en el sentido que es igual a uno en la parte sólida e igual a cero en la cavidad, que es la incógnita del problema. A continuación se definen el problema directo y el problema inverso de la TIE. Indicamos con  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto y acotado simplemente conexo con contorno suave  $\partial\Omega$ , y denotamos con  $n$  a la normal unitaria exterior a  $\partial\Omega$ . Con  $K$  se denota un subconjunto compacto de  $\Omega$  con medida de Lebesgue no cero.

### 2.1. Modelo matemático del problema directo

El punto de partida para la consideración de la TIE deberían ser las ecuaciones de Maxwell. Pero por simplicidad se asume una corriente de frecuencia suficientemente pequeña, tal que el campo magnético pueda ser despreciado. A partir del potencial eléctrico  $u$ , se puede calcular el campo eléctrico  $E = -\nabla u$ . En base a la versión continua de la ley de Ohm, se puede escribir la densidad de corriente como  $J = -\sigma \nabla u$ . En ausencia de fuentes interiores de corriente, se tiene la ley de Kirchoff en versión continua

$$\nabla \cdot (\sigma(x) \nabla u(x)) = 0 \quad (1)$$

A esta ecuación se asocian condiciones de contorno que pueden ser de tipo Dirichlet, Neumann o de tipo Mixto, de acuerdo a la forma en que se especifican los valores de dichas condiciones. En el problema directo,  $\sigma$  es conocido y lo que se trata de determinar es el potencial  $u$ . Se tiene un problema de valores de contorno Dirichlet cuando toma la forma

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma(x) \nabla u(x)) = 0 & \text{en } \Omega \\ u(x) = U_M(x) & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

donde  $U_M(x)$  es el valor del potencial electrostático aplicado sobre el contorno. Si en lugar de especificar  $u|_{\partial\Omega}$ , se especifican valores de la derivada normal de la función incógnita en el contorno, se obtiene un problema de contorno Neumann

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma(x) \nabla u(x)) = 0 & \text{en } \Omega \\ \sigma(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} = F(x) & \text{sobre } \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} u(x) ds = 0 \end{cases} \quad (3)$$

donde  $F(x)$  representa físicamente la densidad de corriente que ingresa al interior del cuerpo a través del contorno. Tal corriente debe cumplir la ley de la conservación de la carga eléctrica, que establece  $\int_{\partial\Omega} F(x)ds = 0$ . La última ecuación en (3) se introduce para determinar el potencial  $u$  de manera unívoca y corresponde a la elección de un potencial de referencia o tierra. La elección del potencial de referencia puede hacerse también de manera más sencilla, considerando, por ejemplo,  $u(x_0) = u_D$  con  $x_0 \in \Omega$ . Asumiendo que  $\sigma$  sea uniformemente acotada fuera de cero, ambos problemas (2) y (3) determinan unívocamente el potencial electrostático  $u$  en un espacio apropiado de funciones.

## 2.2. Definición del problema inverso

El problema inverso de la identificación de la cavidad en un cuerpo plano conductor con conductividad eléctrica constante, consiste en identificar el dominio desconocido  $K$  conociendo una densidad de corriente  $F$  (dato Neumann) aplicado en el contorno  $\partial\Omega$ , y el potencial electrostático resultante  $U_M$  (dato Dirichlet) medido sobre  $\partial\Omega$ . Si consideramos el caso donde aplicamos un único patrón de corriente y hacemos una única medición, el problema modelo puede ser formulado como sigue. Dados  $F$  y  $U_M$  pertenecientes a algún espacio apropiado, y  $K \subset \Omega$ , encontrar  $(u, K)$  tal que satisface

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{en } \Omega \setminus K \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= F && \text{sobre } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{sobre } \partial K \\ u &= U_M && \text{sobre } \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} F(x)ds &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Ahora, para un dominio dado  $K \subset \Omega$ , (4) es la ecuación Laplaciana en  $\Omega \setminus K$  con datos Cauchy, que es mal condicionado de acuerdo a Hadamard (1923). Si restringimos la búsqueda de  $K$  desconocido a la clase de dominios convexos contenidos en  $\Omega$ , Barceló et al. (1994) muestran la unicidad de la solución con una única medición de contorno.

Introduciendo la función característica  $\chi_K$  de  $K$  para representar configuraciones arbitrarias de  $K$ , el problema (4) puede ser expresado de forma equivalente como:

Encontrar  $(u, \chi_K)$  tal que:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot ((1 - \chi_K)\nabla u) &= 0 && \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= F && \text{sobre } \partial\Omega \\ u &= U_M && \text{sobre } \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} F(x)ds &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Este problema puede escribirse en forma variacional, lo cual resulta muy útil para el tratamiento numérico. Esto se obtiene reformulando (5) como un problema de optimización con

ecuaciones diferenciales parciales como restricciones, como sigue:

Encontrar  $(u, \chi_K)$  tal que:

$$\begin{aligned} & \text{minimiza} && \int_{\partial\Omega} |u - U_M|^2 ds \\ & \text{sujeto a} && \nabla \cdot ((1 - \chi_K) \nabla u) = 0 \quad \text{en } \Omega \\ & && \frac{\partial u}{\partial n} = F \quad \text{sobre } \partial\Omega \\ & && \int_{\partial\Omega} F(x) ds = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Se nota que el problema (6) se parece mucho al problema de optimización topológica (Bendsoe y Sigmund, 2003) y diseño óptimo (Ambrosio y Buttazzo, 1993), con aspectos derivados de la inestabilidad del modelo que resultan similares. Nuestras siguientes consideraciones se refieren a esta representación (6) del problema inverso.

### 3. REGULARIZACIÓN DEL PROBLEMA INVERSO

El problema (6) es mal condicionado debido a la falta de estabilidad. Para computar soluciones aproximadas estables de (6), necesitamos aplicar un método de regularización (Engl et al., 1996). Esto significa que buscaremos la minimización de un funcional del tipo

$$\int_{\partial\Omega} |u - U_M|^2 ds + \varepsilon \text{Reg}(\sigma), \quad (7)$$

que expresamos aquí como función de la conductividad  $\sigma$ . La elección del término adicional de regularización  $\text{Reg}(\sigma)$ , debe ser hecha de manera tal que el problema resultante tenga una solución estable para cualquier  $\varepsilon > 0$ , y que garantice que  $(u_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$ , o eventualmente una subsección, converja en algún sentido hacia la solución  $(u, \chi_K)$  de (6). El tipo de elección de  $\text{Reg}(\sigma)$  impone una restricción sobre el espacio donde estamos buscando la solución (Engl et al., 1996). En esta sección introducimos brevemente dos tipos de regularización: la regularización de Tikhonov y la regularización con la variación total de la conductividad.

#### 3.1. Regularización de Tikhonov

La regularización de Tikhonov generalizada se obtiene tomando

$$\text{Reg}(\sigma) = \| \mathcal{A}(\sigma) \|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (8)$$

donde  $\mathcal{A}(\sigma)$  es un operador de convolución, que conecta diferentes valores de conductividad. Si usamos la identidad como operador de convolución se obtiene el método clásico de Tikhonov, donde se busca la solución con menor valor de norma. Sin embargo, se pueden elegir también otros tipos de operadores que tengan un umbral de filtro e impongan suavidad adicional a la

solución buscada. El problema regularizado de Tikhonov se formula como:

Encontrar  $(u, \sigma)$  tal que:

$$\begin{aligned} & \text{minimiza} \quad \int_{\partial\Omega} |u - U_M|^2 ds + \varepsilon \| \mathcal{A}(\sigma) \|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \text{sujeto a} \quad \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{en } \Omega \\ & \quad \quad \quad \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = F \quad \text{sobre } \partial\Omega \\ & \quad \quad \quad \int_{\partial\Omega} F(x) ds = 0, \\ & \quad \quad \quad \sigma \geq 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Este método es todavía muy sensible a la elección del parámetro de regularización  $\varepsilon$ , y el buen condicionamiento de (6) requiere que  $\sigma$  sea suave. Para la elección del parámetro de regularización  $\varepsilon$  existen algunos métodos, como por ejemplo, el método de validación cruzada (Golub et al., 1979) y el método de la curva L (Hansen y O'Leary, 1993).

### 3.2. Regularización usando la penalización de perímetro

La aplicación de un método de regularización hace uso inevitablemente de alguna información *a priori* acerca de la incógnita  $y$ , como resultado, tal información puede introducir características no reales en la  $\sigma$  reconstruida (Borcea, 2002). El enfoque consiste, por lo tanto, en aplicar un método que imponga estabilidad mientras se mantienen ciertas características deseadas de la solución. Un defecto de la regularización de Tikhonov es que la estabilidad se obtiene a costa de imponer una restricción suave en la solución aproximada. Esto significa que con la regularización de Tikhonov no estarían permitidas soluciones discontinuas. Dado que en el problema inverso de cavidad son propios estos tipos de soluciones buscadas, podemos superar el inconveniente de la regularización de Tikhonov, alcanzando igualmente estabilidad, si exigimos que  $\sigma$  sea de variación acotada. Imponemos este requerimiento eligiendo

$$\text{Reg}(\sigma) = |D\sigma|_{BV}, \tag{10}$$

donde  $|D\sigma|_{BV}$  denota la seminorma de  $\sigma$  en el espacio  $BV$  de las funciones con variación acotada. Según (Giusti, 1984; Jost y Li-Jost, 2008) para  $f \in BV$

$$|Df|_{BV(\Omega)} = \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} \phi \, dx : \phi \in C_0^\infty(\Omega), |\phi| \leq 1 \right\}, \tag{11}$$

y en el caso  $f = \chi_K$ , con  $K$  un subconjunto Borel de  $\Omega$ ,

$$|D\chi_K|_{BV(\Omega)} = \text{Per}(K, \Omega), \tag{12}$$

donde  $\text{Per}(K, \Omega)$  es el perímetro de  $K$  en  $\Omega$  (Ambrosio et al., 2000). Para  $K \subset \Omega$  con  $\partial K$  de clase  $C^\infty$ , tenemos que  $\text{Per}(K, \Omega) = |\partial K|$ , es decir,  $\text{Per}(K, \Omega)$  coincide con la longitud del contorno de  $K$  (Jost y Li-Jost, 2008).

Esta forma de estabilización ha sido analizada en general, por ejemplo, en (Burger y Osher, 2004; Ramlau y Ring, 2010) y aplicada en (Rondi, 2007, 2008, 2011) para la regularización del problema inverso de cavidad y fractura.

El uso de (12) como término de regularización, mientras garantiza el buen condicionamiento del problema resultante regularizado (Rondi, 2011), introduce algunas nuevas dificultades si

queremos resolver numéricamente el problema regularizado. El marco variacional dónde situar el problema regularizado debería ser, de hecho, el espacio  $SBV$  (Ambrosio et al., 2000), que es el subespacio de  $BV$  con la parte de Cantor de  $Du$  igual a cero. Hasta la fecha, no hay una teoría de aproximación desarrollada para funciones suaves en este espacio. La aproximación de funciones de  $SBV$  sería más complicado que construir un espacio discreto permitiendo saltos a través de curvas conocidas, dado que tales discontinuidades son también desconocidas. Una manera de superar estas dificultades es buscar una aproximación variacional de  $\text{Per}(K, \Omega)$  con funcionales diferenciables definidos en funciones suaves. Esto está disponible para funcionales de perímetro  $K \mapsto \text{Per}(K, \Omega)$  y ha sido obtenido en (Modica y Mortola, 1977; Modica, 1987) donde  $\text{Per}(K, \Omega)$  es aproximado en el sentido de la  $\Gamma$ -convergencia, por el siguiente funcional elíptico cuadrático:

$$M_\varepsilon(v) = \int_\Omega \left( \varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{W(v)}{\varepsilon} \right) dx \quad (13)$$

con  $v \in H^1(\Omega)$  y  $W(v)$  es un potencial de tipo double-well. Eligiendo  $W(v) = v^2(1 - v^2)$  y asumiendo  $\Omega$  acotado con contorno Lipschitz, se muestra que  $M_\varepsilon(v)$   $\Gamma$ -converge en  $L^2(\Omega)$  a  $\text{Per}(K, \Omega)$  si  $v = \chi_K$  para algún  $K \subset \Omega$ . A causa de este resultado, la variable adicional  $v$  puede ser interpretada como una phase-variable y ofrece una aproximación regular de la función característica desconocida  $\chi_K$ .

Usando  $M_\varepsilon(v)$  en lugar de  $\text{Per}(K, \Omega)$  como término de regularización en (10) y teniendo en cuenta (7), proponemos resolver el siguiente problema aproximado regularizado:

Encontrar  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  tal que:

$$\text{minimiza } \frac{a}{\varepsilon^q} \int_{\partial\Omega} |u - U_M|^2 ds + \varepsilon \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{c}{\varepsilon} \int_\Omega W(v) dx \quad (14)$$

sujeto a

$$\nabla \cdot (\psi_\varepsilon(v_\varepsilon) \nabla u) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (15)$$

$$\psi_\varepsilon(v_\varepsilon) \frac{\partial u}{\partial n} = F \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

$$0 \leq v_\varepsilon \leq 1.$$

donde los parámetros positivos  $a$ ,  $c$  y  $q \geq 1$  son parámetros de ajuste del modelo:  $a$  controla la fidelidad de los datos Dirichlet, mientras que  $c$  controla la penalización sobre el perímetro de la cavidad.

La ecuación (15) es una aproximación de (5) obtenida por la aproximación de la función característica con la variable phase-field  $v$ . La función  $\psi_\varepsilon(v)$  que aparece en (15) es tomada igual a una en (Ring y Rondi, 2011) como

$$\psi_\varepsilon(v) = (1 - \varepsilon^2)(3v^2 - 2v^3) + \varepsilon^2$$

e introduce, para pequeños  $\varepsilon$ , una escala en la variación espacial de  $v$ . Con esta elección de  $\psi_\varepsilon(v)$  básicamente imponemos que la variación de  $v$  entre 0 y 1 ocurra dentro de una banda con ancho  $o(\varepsilon)$ .

El problema aproximado regularizado (14) es muy similar a uno propuesto por Rondi (2011), donde en la expresión del funcional regularizado aparece un término adicional dado por

$$\int_\Omega \psi_\varepsilon(v) |\nabla u|^2 dx$$

que impone la suavidad del potencial a reconstruir en  $\Omega \setminus K$ .

## 4. ALGORITMOS NUMÉRICOS

En esta sección describimos brevemente los algoritmos numéricos para resolver los dos problemas regularizados.

### 4.1. Regularización de Tikhonov

En la regularización estándar de Tikhonov, dado que el término regularizado es suave, el funcional regularizado es suave y se pueden usar métodos estándar de optimización con restricciones. Usamos el Método de Elementos Finitos (MEF), en particular empleamos una aproximación continua que es afín a trozos para el potencial eléctrico  $u$  y una aproximación constante a trozos para la conductividad eléctrica  $\sigma$ . Se emplea a la identidad como operador de convolución. La restricción de no negatividad de  $\sigma$  ha sido tenida en cuenta aplicando el método de penalización interior con la introducción de un término de penalización  $-\mu \log \sigma$  en el funcional a minimizar, con  $\mu$  el factor de penalización. Ya que el funcional es diferenciable, podemos usar el método de Newton. La actualización de la conductividad en el paso  $i + 1$  se obtiene con la expresión

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + (\mathbf{J}_i^T \mathbf{J}_i + \varepsilon \mathbf{R}^T \mathbf{R} + \tilde{\mu} \mathbf{D}_i)^{-1} (\mathbf{J}_i^T (U_M - U(\sigma_i)) - \varepsilon \mathbf{R}^T \mathbf{R} \sigma_i + \tilde{\mu} d_i) \quad (16)$$

donde  $\tilde{\mu} = \mu / \ln 10$ , el elemento  $k$ -ésimo del vector  $d_i$  es  $d_i^k = 1/\sigma_i^k$ , y  $\mathbf{D}_i$  es una matriz diagonal donde  $\text{diag}(\mathbf{D}_i) = d_i \cdot d_i$ ;  $\mathbf{J}_i$  es la matriz Jacobiana del problema directo en el paso  $i$  y puede ser calculada, por ejemplo usando el principio de reciprocidad (Brandstätter, 2003), o mediante la diferenciación de la ecuación del MEF, como ha sido usado en este trabajo. La ecuación discreta toma la forma  $\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$ , donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez del sistema y está formada sólo por la contribución de aquellos elementos con  $\sigma > 0$ . El procedimiento seguido puede verse detallado en (Brančik, 2004; Belegundu y Chandrupatla, 2011), siguiendo lo cual podemos escribir

$$\frac{\partial \mathbf{K}\mathbf{U}}{\partial \sigma_r} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \sigma_r} = \mathbf{0} \quad (17)$$

dado que el vector  $\mathbf{F}$  contiene valores de corriente independientes de  $\sigma$ . Desarrollando la ecuación anterior, se tiene

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \sigma_r} \mathbf{U} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \sigma_r} = \mathbf{0} \quad (18)$$

de donde es posible calcular  $\partial \mathbf{U} / \partial \sigma_r$ , la  $r$ -ésima columna de la matriz Jacobiana, con los valores de  $\mathbf{U}$  en los puntos del contorno del objeto donde se tienen los electrodos.

### 4.2. Regularización usando la penalización de perímetro

Ya que para cualquier  $\varepsilon > 0$ ,  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  pertenece a  $H^1(\Omega)$ , usamos una aproximación continua que es afín a trozos tanto como para  $u_\varepsilon$  como para  $v_\varepsilon$ . El funcional regularizado (14) es también en este caso diferenciable, por lo que puede usarse un algoritmo de optimización con restricciones similar al empleado en la minimización del funcional regularizado de Tikhonov. En su lugar, para los experimentos numéricos presentados en este trabajo, hemos adaptado el algoritmo descrito en (Ring y Rondi, 2011), el cual consiste en una aplicación del método del gradiente al funcional (14), al cual se agrega el término adicional que corresponde a la ecuación de restricción (15). Para un completo detalle del algoritmo nos remitimos a (Ring y Rondi, 2011).

## 5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan experimentos numéricos, a fin de ilustrar el desempeño de ambos enfoques de reconstrucción de conductividad tratados en este trabajo. Para ello se plantea el problema de reconstruir la conductividad en un cuerpo, que posee una distribución original de conductividad mostrada en la Figura 1. El cuerpo tiene dimensiones 10 x 10, con un valor de conductividad unitario en la parte sólida. La cavidad tiene dimensión 2,5 x 2,5 y se ubica en la zona inferior izquierda del cuerpo, con un valor de conductividad asumido de 0,01.

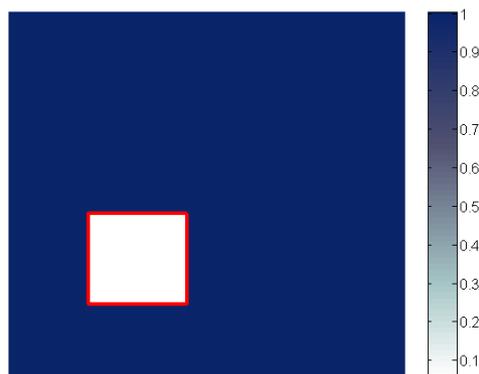


Figura 1: Distribución original de conductividad.

Para la generación de los datos de entrada al problema inverso (valores de corriente y potencial eléctrico en el contorno), se resuelve el problema directo (3) con el defecto de cavidad prescrito, a fin de determinar la distribución de potencial eléctrico en todo el dominio, de los cuales sólo se toman los valores en el contorno. Los flujos de corriente aplicados sobre el contorno, obedecen a la siguiente expresión

$$F_l^m = \begin{cases} \text{sen}(m\zeta_l) & l = 1, \dots, n_e \quad m = 1, \dots, n_e/2 \\ \text{cos}((m - n_e/2)\zeta_l) & l = 1, \dots, n_e \quad m = n_e/2 + 1, \dots, n_e \end{cases} \quad (19)$$

donde  $n_e$  es la cantidad de electrodos o, como en este caso, puntos de medición de la corriente inyectada. De esta manera se tienen tantos patrones de corriente independientes como número de electrodos o puntos de medición se posean. Para la reconstrucción según Tikhonov se consideró la Ec. (19) con  $n_e = 80$ , mientras que para el método de reconstrucción que emplea la penalización de perímetro sólo se consideró el patrón correspondiente a  $m = 1$ . Esta diferencia surge de la necesidad del cálculo de la matriz Jacobiana en el método de Tikhonov. Los datos de corriente así obtenidos, fueron contaminados con ruido Gaussiano blanco aditivo del orden del 1 % del rango de datos sin ruido.

A fin de poder comparar el desempeño de ambos métodos, se define una medida de error entre la distribución original de conductividad en el cuerpo y la distribución obtenida mediante el método de reconstrucción correspondiente. Si se define  $\sigma_e$  al valor exacto u original de la conductividad, y  $\sigma_r$  al valor de conductividad reconstruido numéricamente, se toma como medida de error entre estas soluciones a

$$E = \|\sigma_e - \sigma_r\|_{L^2(\Omega)} \quad (20)$$

Para la resolución del problema con el método de Tikhonov, se ingresa al proceso iterativo del método con una estimación inicial de conductividad igual a 0,5 en todos los elementos

de la malla de elementos finitos. La matriz de regularización se consideró igual a la matriz identidad de orden  $N$ , donde  $N$  es el número de incógnitas de conductividad. Para el parámetro de regularización se tomó el valor  $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$ , y para el factor de penalización de barrera se tomó  $\mu = 0,01$ . El resultado obtenido con este método puede verse en la Figura 2 (a), para lo cual fueron necesarias 6 iteraciones, con un valor de error  $E = 5,68 \times 10^{-1}$ .

Para resolver el problema mediante el método variacional, se ingresa con una estimación inicial de la variable phase-field de 0,5 en todos los nodos interiores de la malla de elementos finitos, mientras que en los nodos del contorno se tomó el valor 1. Los parámetros de ajuste del modelo usados en este trabajo son los siguientes:  $a = 3 \times 10^5$ ,  $c = 0,1$ ,  $q = 4,5 \times 10^{-2}$ ,  $\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$ . El resultado obtenido puede verse en la Figura 2 (b), para lo cual se fijaron 50 iteraciones, y el error que se obtuvo fue de  $E = 6,96 \times 10^{-1}$ .

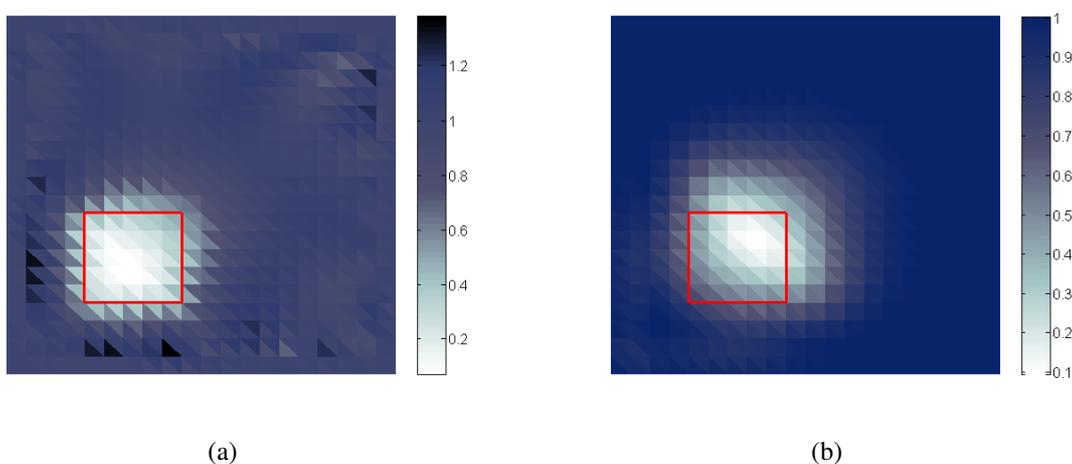


Figura 2: (a) Reconstrucción con el método de Tikhonov y (b) método variacional, con 1 % de ruido en los datos de entrada.

La Figura 2 muestra el resultado obtenido mediante ambos métodos de reconstrucción. Se observa que en el método de reconstrucción de Tikhonov la ubicación de la cavidad se ajusta mejor a la ubicación original. Sin embargo, el tiempo computacional de procesamiento obtenido con este método fue 15 veces mayor al obtenido con el método variacional.

Para observar la convergencia de la solución aproximada del método variacional, se resuelve el problema con dos refinamientos sucesivos (de tipo “Red”) en la malla original (ver Figura 3). Se determina el error correspondiente según la Ec. (20), y su comportamiento, con respecto a la cantidad de elementos de la malla de elementos finitos, puede verse en la Figura 4.

## 6. CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha presentado el problema inverso de reconstrucción de defectos en el interior de un cuerpo mediante la técnica de la Tomografía de Impedancia Eléctrica (TIE). Se describieron dos métodos de reconstrucción: un método clásico en base a la regularización de Tikhonov y otro mediante un modelo variacional, que es una variación de aquel propuesto por Rondi (2011), en el marco de la teoría de las discontinuidades libres. Se aplicaron ambos métodos en un ejemplo numérico a fin de comparar su desempeño. Se observó que el método de Tikhonov aproxima mejor la ubicación de la cavidad en una malla gruesa, pero a costas de un mayor tiempo computacional que en el método variacional que usa como regularización el per-

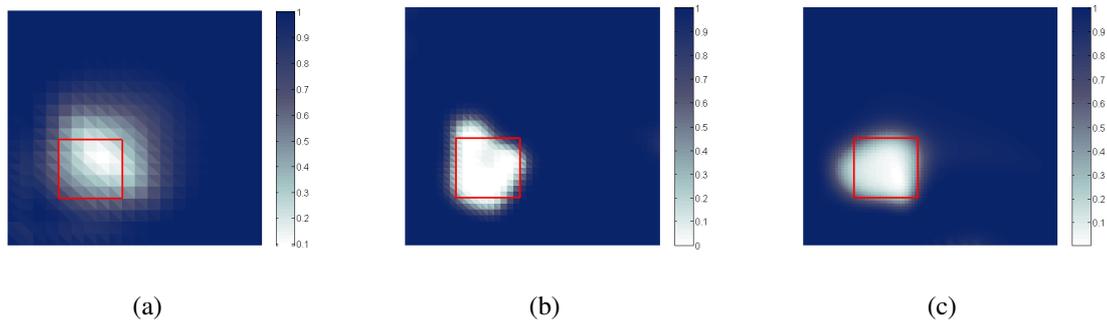


Figura 3: Reconstrucción con el método variacional con distintos tamaños de malla y con 1 % de ruido en los datos de entrada; (a) 800 elementos, (b) 3200 elementos, (c) 12800 elementos.

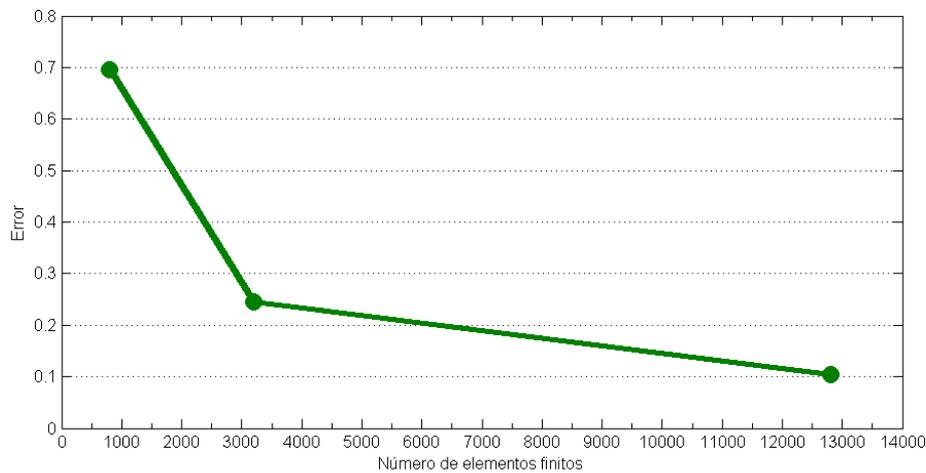


Figura 4: Norma  $L^2$  del error de la solución aproximada calculada con el método variacional en mallas con 800, 3200 y 12800 elementos finitos.

metro de la cavidad incógnita. Se monitoreó también la convergencia de la solución aproximada de este último, mediante la evaluación del error con respecto a la solución exacta, considerando refinamientos sucesivos en la malla de elementos finitos mostrando un buen desempeño.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el soporte financiero del CONICET, Proyecto Préstamo BID PICT PRH 30 N° 94 y Proyecto CIUNT 26E/427.

## REFERENCIAS

- Acar R. y Vogel C. Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems. *Inverse Problems*, 10:1217–1229, 1994.
- Alessandrini G. Stable determination of conductivity by boundary measurements. *Applicable Analysis*, 27:153–72, 1988.
- Ambrosio L. y Buttazzo G. An optimal design problem with perimeter penalization. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 1:55–69, 1993.
- Ambrosio L., Fusco N., y Pallara D. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford University Press, 2000.

- Barceló B., Fabes E., y Seo J. The inverse conductivity problem with one measurement: Uniqueness for convex polyhedra. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 122:183–189, 1994.
- Belegundu A.D. y Chandrupatla T.R. *Optimization Concepts and Applications in Engineering*. Cambridge University Press, New York, USA, ii edición, 2011.
- Bendsoe M. y Sigmund O. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer Verlag, Berlin, Germany, 2003.
- Borcea L. Electrical Impedance Tomography. *Inverse Problems*, 18:99–136, 2002.
- Braides A.  $\Gamma$ -convergence for Beginners. Oxford University Press, 2002.
- Brandstätter B. Jacobian calculation for electrical impedance tomography based on the reciprocity principle. *IEEE Transaction on Magnetics*, 39:1309–1312, 2003.
- Brančik L. Comparative study of Jacobian calculation techniques in Electrical Impedance Tomography. En *International Workshop “Computational Problems of Electrical Engineering”*. Zakopane, Poland, 2004.
- Burger M. y Osher S. Convergence rates of convex variational regularization. *Inverse Problems*, 2004.
- Chung E., Chan T., y Tai X.C. Electrical Impedance Tomography using level set representation and total variational regularization. *J. Comput. Phys.*, 205:357–372, 2005.
- Engl H., Hanke M., y Neubauer A. *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer, 1996.
- Giusti E. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variations*. Birkhäuser, 1984.
- Golub G.H., Heath M., y Wahba G. Generalized cross validation as a method for choosing a good parameter. *Technometrics*, 21:215–223, 1979.
- Hadamard J. *Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press, New Haven, USA, 1923.
- Hansen P.C. y O’Leary D.P. The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 14:1487–1503, 1993.
- Jost J. y Li-Jost X. *Calculus of Variations*. Cambridge University Press, 2008.
- Lechleiter A. y Rieder A. Newton regularizations for impedance tomography: a numerical study. *Inverse Problems*, 22:1967–1987, 2006.
- Lionheart W. EIT reconstruction algorithms: pitfalls, challenges and recent developments. *Physiological Measurement*, 25:125–142, 2004.
- Lionheart W., Polydorides N., y Borsic A. The reconstruction problem. En H. D., editor, *Electrical Impedance Tomography: Methods, History and Applications*, páginas 3–64. Taylor & Francis Publisher, 2004.
- Modica L. The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 98:123–142, 1987.
- Modica L. y Mortola S. Il limite nella  $\Gamma$ -convergenza di una famiglia di funzionali ellittici. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 14:526–529, 1977.
- Ramlau R. y Ring W. Regularization of ill-posed Mumford–Shah models with perimeter penalization. *Inverse Problems*, 2010.
- Ring W. y Rondi L. Reconstruction of cracks and material losses by perimeter-like penalizations and phase-field methods: numerical results. *Interfaces and Free Boundaries*, 13:353–371, 2011.
- Rondi L. A variational approach to the reconstruction of cracks by boundary measurements. *J. Math. Pures Appl.*, 87:324–342, 2007.
- Rondi L. Reconstruction in the inverse crack problem by variational methods. *Euro. Jnl. of Applied Mathematics*, 19:635–660, 2008.

- Rondi L. Reconstruction of material losses by perimeter penalization and phase-field methods. *J. Differential Equations*, 251:150–175, 2011.
- Rondi L. y Santosa F. Enhanced electrical impedance tomography via the Mumford-Shah functional. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 6:517–538, 2001.
- Santosa F. y Vogelius M. A computational algorithm to determine cracks from electrostatic boundary measurements. *International Journal of Engineering Science*, 29:917–937, 1991.
- Yorkey T., Webster J., y Tompkins W. Comparing reconstruction algorithms for electrical impedance tomography. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 34:843–852, 1987.