

## DEFINICIÓN DE SISTEMAS DE CONTROL EN ESPACIO DE ESTADO MODAL Y SU VINCULACIÓN CON MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS DE MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD

Gonzalo Alvarez<sup>a</sup>, Anibal Mirasso<sup>b</sup>

<sup>a</sup>IMERIS, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Ciudad Universitaria, 5500  
Mendoza, Argentina, galvarez@fing.uncu.edu.ar.

<sup>b</sup>IMERIS, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Ciudad Universitaria, 5500  
Mendoza, Argentina, aemirasso@uncu.edu.ar

**Palabras claves:** elementos finitos, modelo reducido, control activo, asignación de polos.

**Resumen.** En el análisis dinámico de sistemas estructurales los modelos de elementos finitos utilizados suelen tener numerosos grados de libertad, siendo esto apropiado para cumplir con las exigencias de diseño o de análisis. A los efectos de lograr mejorar el comportamiento dinámico de esos sistemas estructurales suele optarse por la incorporación de amortiguadores de masa sintonizados con sistemas de control activo, ubicados en algunos puntos determinados del sistema estructural. Una estrategia corriente para la definición de los parámetros de control es plantear el sistema acoplado en el espacio de estado. A los efectos de trabajar con pocos grados de libertad en el espacio de estado, es necesario reducir el sistema original de múltiples grados de libertad. Esto se logra mediante un cambio de base hacia el espacio modal generado por los modos de vibración libre del sistema estructural. Se presenta una metodología de vinculación entre el espacio original del modelo de elementos finitos de múltiples grados de libertad, con el espacio de estado modal reducido donde se define el sistema de control incluyendo al amortiguador de masa sintonizado. Además, se vinculan los parámetros del sistema de control definidos en el espacio de estado modal reducido mediante la técnica de asignación de polos, con los del sistema real original de múltiples grados de libertad. Así mismo, se discuten condiciones a cumplir por el modelo modal reducido según condiciones de controlabilidad y eficiencia de los modos a considerar del sistema real de elementos finitos. Se aplica la metodología planteada a ejemplos de la bibliografía y se discuten resultados.

## 1 INTRODUCCIÓN

En el análisis dinámico de sistemas estructurales, los modelos de elementos finitos utilizados suelen tener numerosos grados de libertad, siendo esto apropiado para cumplir con las exigencias de diseño o de análisis. A los efectos de lograr mejorar el comportamiento dinámico de esos sistemas estructurales suele optarse por la incorporación de amortiguadores de masa sintonizados con sistemas de control activo, ubicados en algunos puntos determinados del sistema estructural. Según Soong y Constantinou (1994) este sistema se lo denomina masa activa sintonizada y constituye un sistema híbrido de control, ya que combina las propiedades de un sistema pasivo (amortiguador de masa sintonizado) y de un sistema activo de control. Una detallada discusión sobre estado del arte de sistemas de control en estructuras, tanto civiles y mecánicas como aeroespaciales, ha sido recientemente presentado por Korkmaz, S. (2011). Se destaca allí que la primera propuesta de combinar un amortiguador de masa sintonizado con un sistema de control se debe a Chang y Soong (1980), y reconoce en el trabajo de Yao (1972) el primer tratamiento riguroso de control de estructuras siguiendo los lineamientos de la teoría de control moderno. Soong y Constantinou (1994) sostienen que el primer edificio en el que se instala un sistema de control actuando sobre una masa agregada es el Kyobashi Seiwa en 1989 (Kobori et al, 1990). Citan que es debido a Matsumoto et al (1990) la colocación de un sistema de control actuando sobre un péndulo sintonizado en un edificio de 296 metros de altura y en la torre del puente Akashi Kaiko de 300 metros de altura, con el propósito de mejorar la eficiencia de energía necesaria en el sistema de control. Otros sistemas presentados en la literatura son entre otros: el sistema híbrido de múltiples péndulos del Yokohama Landmark Tower (Abiru et al, 1992); y el sistema híbrido de arco oscilante de Tokyo Park Tower (Koike y Tanida, 1998).

En Argentina uno de los primeros trabajos en llamar la atención sobre la aplicación de los amortiguadores de masa sintonizados en estructuras civiles bajo la acción del viento es debido a Montanaro et al. (1999), en el que discuten la eficiencia de sistemas masa resorte y tanques con líquidos sintonizados al primer modo de estructuras de tipo torre. Posteriormente, Bassotti y Ambrosini (2004, 2007) y Ambrosini et al. (2004), han analizado la posibilidad de utilizar sistemas de tipo masa resorte sintonizados con los modos fundamentales de estructuras de edificios típicamente usados en la provincia de Mendoza, bajo la acción de diversos sismos. Ascheri et al. (2010, 2007, 2006) han presentado una alternativa para el análisis y diseño óptimo de dispositivos pasivos de disipación de energía, para ser usados en estructuras de pórticos y tabiques bajo acción sísmica. Consiste en usar un algoritmo de control activo predictivo de estructuras, para definir las fuerzas adecuadas para controlar la estructura en análisis ante acciones sísmicas diversas. Posteriormente con esas fuerzas se optimiza el diseño de los dispositivos pasivos. Recientemente, Garrido et al. (2012) han analizado la eficiencia de un sistema semiactivo de control en un sistema masa resorte, en el que el amortiguamiento cambia según una ley de control óptimo recortado. Curadelli y Amani (2012) han analizado distintos algoritmos de control óptimo para definir los parámetros de sistemas semiactivos de control, utilizados en una estructura plana de tipo pórtico de seis niveles, sometida a diversos sismos.

En sistemas estructurales que son modelados con el método de elementos finitos usando múltiples grados de libertad, es conveniente recurrir a un sistema reducido de unos pocos grados de libertad, que sea representativo del sistema estructural completo, para definir los parámetros del sistema de control. Gawronski (2004) ha propuesto criterios para truncar la cantidad de modos a incluir. Seto y Mitsuta (1992) han propuesto un método que, según la posición de nodos de modos superiores, selecciona puntos de la estructura donde ubica masas

concentradas, que vincula entre sí con resortes elásticos para generar un sistema reducido dinámicamente equivalente a partir de los modos y con análisis de sensibilidad.

En este trabajo se presenta una metodología de vinculación entre el espacio original de un modelo de elementos finitos de múltiples grados de libertad, con el espacio de estado modal reducido donde se define el sistema de control incluyendo al amortiguador de masa. Además, se vinculan los parámetros del sistema de control definidos en el espacio de estado modal reducido mediante la técnica de asignación de polos, con los del sistema original de múltiples grados de libertad. Así mismo, se discuten condiciones a cumplir por el modelo modal reducido según condiciones de controlabilidad y eficiencia de los modos a considerar del sistema real de elementos finitos. Se aplica la metodología planteada en ejemplos de la bibliografía y se discuten resultados.

## 2 FORMULACIÓN UTILIZADA

Se considera una estructura cualquiera cuyos puntos materiales ubicados mediante coordenadas  $x_k$  con  $k$  variando de 1 a 3, ocupan un volumen  $V_0$  delimitado por una superficie  $S_0$ . En la Figura 1 se puede observar un esquema y la nomenclatura utilizada. Se elige una formulación energética basada en desplazamientos, y el método de elementos finitos para analizar el comportamiento del sistema estructural mediante un modelo discreto.

Las acciones externas sobre el sistema estructural son fuerzas distribuidas y concentradas que tienen un potencial de energía asociado o bien producen trabajo. Las respuesta de la estructura se describe mediante el vector de desplazamientos  $\mathbf{u}(x,t)$  de los distintos puntos materiales ubicados en las coordenadas  $x$ , para cada instante de tiempo  $t$ . Asumiendo una interpolación de los desplazamientos mediante elementos finitos se tiene

$$\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{N}(x) \cdot \mathbf{a}(t) \quad (1)$$

siendo las coordenadas generalizadas  $\mathbf{a}(t) \in \mathbb{R}^N$  un vector cuyas  $N$  componentes son funciones linealmente independientes, correspondientes a desplazamientos o giros de los nodos de la malla de elementos finitos utilizados. Con  $\mathbf{N}(x)$  se identifican las funciones de interpolación de soporte local usuales en el método de elementos finitos (Zienkiewicz y Taylor, 1991).

Los cambios geométricos en la estructura se describen asumiendo relaciones cinemáticas lineales entre desplazamientos y deformaciones específicas. El material se asume elástico lineal siguiendo la ley de Hooke, entre las deformaciones específicas y las tensiones, con lo cual existe una función de energía interna de deformación elástica.

De esa manera es posible considerar la energía potencial total  $\pi^{EF}(\mathbf{a}(t), \mathbf{b}^{EF}(t))$  de la estructura expresada en la forma usual como función cuadrática de las  $N$  coordenadas generalizadas  $\mathbf{a}(t)$  mediante:

$$\pi^{EF}(\mathbf{a}(t), \mathbf{b}^{EF}(t)) = \frac{1}{2} \mathbf{a}(t)^T \cdot \mathbf{K}^{EF} \cdot \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}(t)^T \cdot \mathbf{b}^{EF}(t) \quad (2)$$

Se denomina matriz de rigidez del sistema estructural a  $\mathbf{K}^{EF}$ ; mientras que con  $\mathbf{b}^{EF}(t)$  se representa a las cargas nodales equivalentes a las cargas externas aplicadas en el sistema estructural, que resultan en función del tiempo. De forma equivalente la energía cinética  $T^{EF}(\dot{\mathbf{a}}(t))$  es una función cuadrática de las derivadas respecto al tiempo de las  $N$  coordenadas generalizadas  $\mathbf{a}(t)$  expresada por

$$T^{EF}(\dot{\mathbf{a}}(t)) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{a}}(t)^T \cdot \mathbf{M}^{EF} \cdot \dot{\mathbf{a}}(t) \quad (3)$$

siendo  $\dot{\mathbf{a}}(t)$  el vector de derivada primera del vector  $\mathbf{a}(t)$  respecto a la variable tiempo, y  $\mathbf{M}^{EF}$  es la denominada matriz de masa del sistema estructural. De esta manera el modelo de elementos finitos constituye un modelo discreto N grados de libertad.

## 2.1 Funcional de Hamilton del modelo de elementos finitos

En sistemas discretos para los que existen funciones de energía en términos de N coordenadas generalizadas  $\mathbf{a}(t)$  funciones del tiempo, es posible obtener las ecuaciones de equilibrio mediante una formulación variacional como el Principio de Hamilton (Clough y Penzien, 2003; Balachandran y Magreb, 2006). Se define el funcional de Hamilton como la integral del Lagrangeano del sistema estructural entre dos instantes de tiempo  $t_1$  y  $t_2$  cualesquiera

$$H_{EF} = \int_{t_1}^{t_2} L_{EF}(\mathbf{a}(t), \dot{\mathbf{a}}(t)) dt \quad (4)$$

Siendo  $L_{EF}(\mathbf{a}(t), \dot{\mathbf{a}}(t))$  el Lagrangeano dado por diferencia entre la energía cinética y la potencial total del sistema discreto

$$L_{EF}(\mathbf{a}(t), \dot{\mathbf{a}}(t)) = T^{EF}(\dot{\mathbf{a}}(t)) - \pi^{EF}(\mathbf{a}(t)) \quad (5)$$

Para asegurar una condición de estacionario es necesario analizar la primera variación del funcional de Hamilton (Clough y Penzien, 2003; Balachandran y Magreb, 2006) que resulta:

$$\delta H_{EF} = \int_{t_1}^{t_2} [\delta \mathbf{a}(t)^T \cdot \mathbf{r}_{EF}] dt \quad (6)$$

Siendo  $\mathbf{r}_{EF}$  el vector de fuerzas de balance generalizadas energéticamente equivalentes a las variaciones  $\delta \mathbf{a}(t)$  de las coordenadas generalizadas  $\mathbf{a}(t)$ . Al considerar las definiciones del Lagrangeano dada por ecuación (5), el vector de de fuerzas de balance generalizadas resulta:

$$\mathbf{r}_{EF} = \frac{\partial L_{EF}(\mathbf{a}(t), \dot{\mathbf{a}}(t))}{\partial \mathbf{a}(t)} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{EF}(\mathbf{a}(t), \dot{\mathbf{a}}(t))}{\partial \dot{\mathbf{a}}(t)} \right) = -\mathbf{K}^{EF} \cdot \mathbf{a}(t) + \mathbf{b}^{EF}(t) - \mathbf{M}^{EF} \cdot \ddot{\mathbf{a}}(t) \quad (7)$$

Para que el funcional de Hamilton sea estacionario, su primera variación dada por la ecuación (6) debe ser nula. Dado que las componentes del vector de variaciones de las coordenadas generalizadas  $\delta \mathbf{a}(t)$  son arbitrarias, se deben cumplir las siguientes ecuaciones, denominadas Ecuaciones de Lagrange:

$$\mathbf{r}_{EF} = \frac{\partial L_{EF}(\mathbf{a}(t), \dot{\mathbf{a}}(t))}{\partial \mathbf{a}(t)} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{EF}(\mathbf{a}(t), \dot{\mathbf{a}}(t))}{\partial \dot{\mathbf{a}}(t)} \right) = -\mathbf{K}^{EF} \cdot \mathbf{a}(t) + \mathbf{b}^{EF}(t) - \mathbf{M}^{EF} \cdot \ddot{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{0} \quad (8)$$

Particularmente, cuando las acciones externas son nulas, las ecuaciones de equilibrio (8) del modelo de elementos finitos admiten una solución de la forma

$$\mathbf{a}(t) = \boldsymbol{\varphi} \cdot e^{j\omega t} \quad (9)$$

que al considerarse en las ecuaciones de Lagrange (8) con  $\mathbf{b}^{EF}(t)$  nulo, resultan en el siguiente problema de valores propios:

$$\left( \mathbf{K}^{EF} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}^{EF} \right) \cdot \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (10)$$

donde  $\boldsymbol{\varphi}_k$  es el  $k$ -ésimo modo natural de vibración libre y  $\omega_k$  su frecuencia asociada. Las soluciones del problema de valores propios dado en ecuación (10) son ortogonales y se

verifica que

$$\begin{aligned} \Phi^T \cdot \mathbf{M}^{EF} \cdot \Phi &= \mathbf{I} \\ \Phi^T \cdot \mathbf{K}^{EF} \cdot \Phi &= \mathbf{\Omega} \end{aligned} \quad (11)$$

siendo  $\Phi$  una matriz cuyas columnas son los  $N$  vectores modos naturales de vibración  $\phi_k$  solución de la ecuación (8) normalizados respecto de la matriz de masa; y  $\mathbf{\Omega}$  una matriz diagonal cuyos elementos son los cuadrados de las frecuencias naturales de vibración  $\omega_k$ .

## 2.2 Incorporación de los amortiguadores de masa y las acciones del sistema de control

En el sistema estructural se agregan dos amortiguadores de masa con sistemas de control: Un amortiguador de masa tipo péndulo con masa  $m_p$  y longitud  $L$ , y otro de tipo masa resorte con masa  $m_R$  y constante elástica  $k_R$  (Figura 1). El primero unido al sistema estructural en la abscisa  $x_P$  y el segundo en la abscisa  $x_R$ .

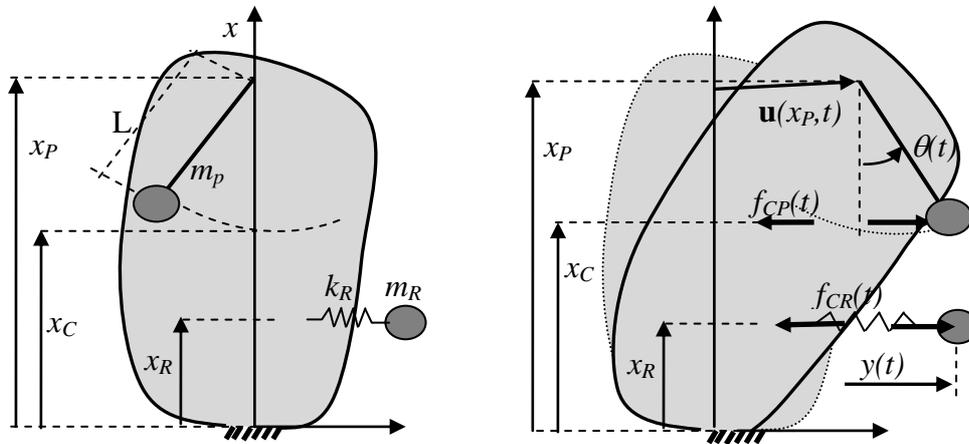


Figura 1: Esquema del tipo estructural considerado

Sin quitar generalidad a la metodología planteada, se asume como caso particular que los desplazamientos de los puntos de vinculación en la dirección vertical son mucho menores que los de la dirección horizontal y pueden despreciarse.

La fuerza  $f_{CP}(t)$  del sistema de control se aplica sobre la masa del péndulo y reacciona en la abscisa  $x_C$  del sistema estructural. Mientras que la fuerza  $f_{CR}(t)$  del sistema de control se aplican sobre la masa del sistema masa-resorte y reacciona en la abscisa  $x_R$  del sistema estructural. Las respuestas de los amortiguadores de masa se analizan mediante el giro  $\theta(t)$  del péndulo respecto de la vertical, y el desplazamiento horizontal  $y(t)$  de la masa  $m_R$ .

Es simple incorporar las contribuciones de los amortiguadores de masa ya sea sintonizados o no, mediante el planteo energético adoptado. Se adiciona al Lagrangeano del modelo de elementos finitos  $L_{EF}(\mathbf{a}(t), \dot{\mathbf{a}}(t))$  los Lagrangeanos de los amortiguadores de masa, y se logra un nuevo sistema discreto ampliado, con coordenadas generalizadas  $\mathbf{a}(t)$ ,  $\theta(t)$  e  $y(t)$ .

El Lagrangeano asociado a los amortiguadores de masa se puede expresar como:

$$L_{AM} = (T_P - \pi_P) + (T_{MR} - \pi_{MR}) \quad (12)$$

siendo las energías potenciales totales del péndulo  $\pi_P$ , y de la masa resorte  $\pi_{MR}$

$$\begin{aligned} \pi_P &= m_p \cdot g \cdot L \cdot (1 - \cos(\theta(t))) - f_{CP}(t) \cdot [u_x(x_P, t) + L \sin(\theta(t))] \\ \pi_{MR} &= \frac{1}{2} m_R \cdot (y(t) - u_x(x_R, t))^2 - f_{CR}(t) \cdot y(t) \end{aligned} \quad (13)$$

con  $u_x(x_R, t)$  se identifica la componente horizontal del desplazamiento del punto material ubicado en la posición  $x_R$ ; y con  $u_x(x_P, t)$ , la componente horizontal del desplazamiento del punto material ubicado en la posición  $x_P$ . Además las fuerzas  $f_{CP}(t)$  y  $f_{CR}(t)$  son las acciones del sistema de control actuando sobre las masas  $m_P$  y  $m_R$  del péndulo y la masa resorte respectivamente. Por otra parte, las energías cinéticas del péndulo  $T_P$ , y de la masa resorte  $T_{MR}$  están dadas por

$$\begin{aligned} T_P &= \frac{1}{2} m_P \langle \vec{v}_P(t), \vec{v}_P(t) \rangle \\ T_{MR} &= \frac{1}{2} m_R \left( \frac{dy(t)}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $\langle \vec{v}_P(t), \vec{v}_P(t) \rangle$  es el producto escalar del vector velocidad, que es la derivada respecto al tiempo del vector posición de la masa del péndulo, y se puede expresar como:

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} u(x_P, t) + L \sin(\theta(t)) \\ x_P - L \cos(\theta(t)) \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Se considera que en los puntos materiales donde los amortiguadores de masa se vinculan con el sistema estructural existen nodos de la malla de elementos finitos, de modo que existe en el vector de coordenadas generalizadas una componente correspondiente a las componentes de desplazamiento  $u_x(x_P, t)$  y  $u_x(x_R, t)$ . Es posible identificar dichas coordenadas generalizadas mediante

$$\begin{aligned} u_x(x_P, t) &= \mathbf{a}(t)^T \cdot \boldsymbol{\Psi}_P \\ u_x(x_R, t) &= \mathbf{a}(t)^T \cdot \boldsymbol{\Psi}_R \end{aligned} \quad (16)$$

siendo  $\boldsymbol{\Psi}_P$  y  $\boldsymbol{\Psi}_R$  vectores de componentes nulas, salvo las componentes correspondientes a las componentes  $u_x(x_P, t)$  y  $u_x(x_R, t)$  que respectivamente valen uno. Los vectores  $\boldsymbol{\Psi}_P$  y  $\boldsymbol{\Psi}_R$  son los que acoplan los amortiguadores de masa con el modelo original de elementos finitos.

Al considerar las ecuaciones (16) en las definiciones del Lagrangeano de los amortiguadores de masa dado por las ecuaciones (12-14), resulta

$$L_{AM} = [T_P(\dot{\mathbf{a}}(t), \dot{\theta}(t), \theta(t)) - \pi_P(\mathbf{a}(t), \theta(t))] + [T_{MR}(\dot{y}(t)) - \pi_{MR}(\mathbf{a}(t), y(t))] \quad (17)$$

con

$$\begin{aligned} T_P(\mathbf{a}(t), \theta(t), \dot{\theta}(t)) &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{a}(t)^T \cdot \boldsymbol{\Psi}_P \cdot m_P \cdot \boldsymbol{\Psi}_P^T \cdot \mathbf{a}(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_P \cdot L^2 \cdot \dot{\theta}(t)^2 + m_P \cdot L \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \mathbf{a}(t)^T \cdot \boldsymbol{\Psi}_P \end{aligned} \quad (18)$$

$$\pi_P(\mathbf{a}(t), \theta(t)) = m_P \cdot g \cdot L \cdot (1 - \cos(\theta(t))) - f_{CP}(t) \cdot [\mathbf{a}(t)^T \cdot \boldsymbol{\Psi}_P + L \sin(\theta(t))]$$

$$T_{MR}(\dot{y}(t)) = \frac{1}{2} m_R (\dot{y}(t))^2 \quad (19)$$

$$\pi_{MR}(\mathbf{a}(t), y(t)) = \frac{1}{2} k_R \cdot (y(t) - \mathbf{a}(t)^T \cdot \boldsymbol{\Psi}_R)^2 - f_{CR}(t) \cdot y(t)$$

Se tiene así que el funcional de Hamilton del sistema discreto de elementos finitos con los amortiguadores de masa y el sistema de control incorporados se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
 H(\mathbf{a}(t), \dot{\mathbf{a}}(t), \theta(t), \dot{\theta}(t), y(t), \dot{y}(t)) &= H_{EF} + H_P + H_R + H_C \\
 H_{EF} &= \int_{t_1}^{t_2} [T_{EF}(\dot{\mathbf{a}}(t)) - \pi_{EF}(\mathbf{a}(t))] dt \\
 H_P &= \int_{t_1}^{t_2} [T_P(\dot{\mathbf{a}}(t), \dot{\theta}(t), \theta(t)) - \pi_P(\mathbf{a}(t), \theta(t))] dt \\
 H_R &= \int_{t_1}^{t_2} [T_{MR}(\dot{y}(t)) - \pi_{MR}(\mathbf{a}(t), y(t))] dt \\
 H_C &= \int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{a}(t)^T \cdot (-\Gamma_P \cdot f_{CP}(t) - \Gamma_R \cdot f_{CR}(t))] dt
 \end{aligned} \tag{20}$$

$H_C$  representa la integral entre dos instantes de tiempo  $t_1$  y  $t_2$  del trabajo que realizan las acciones de control  $\Gamma_P \cdot f_{CP}(t)$  y  $\Gamma_R \cdot f_{CR}(t)$  con las coordenadas generalizadas  $\mathbf{a}(t)$  del modelo original de elementos finitos. Los  $\Gamma_P$  y  $\Gamma_R$  son vectores de componentes nulas, salvo la componentes correspondiente al grado de libertad de  $\mathbf{a}(t)$  donde actúan las fuerzas concentradas de magnitud  $f_{CP}(t)$  y  $f_{CR}(t)$  respectivamente. Es decir que los vectores  $\Gamma_P$  y  $\Gamma_R$  identifican los puntos y grados de libertad del sistema de elementos finitos original donde reacciona las acciones de control incorporadas con los amortiguadores de masa.

Se debe destacar que  $H_{EF}$  corresponde al funcional de Hamilton del sistema estructural original como si no estuviese ningún amortiguador de masa ni sistema de control. Por otra parte  $H_P$  corresponde al funcional de Hamilton del péndulo; mientras que  $H_R$  corresponde al de la masa resorte. En estos dos últimos aparecen los términos de acoplamiento entre los amortiguadores de masa y el sistema estructural original.

### 2.3 Ecuaciones de equilibrio del sistema completo

La condición de estacionario del funcional de Hamilton asociado al sistema completo de elementos finitos, con amortiguadores de masa y sistema de control es

$$\delta H = \delta H_{EF} + \delta H_P + \delta H_R + \delta H_C = 0 \tag{21}$$

siendo

$$\begin{aligned}
 \delta H_{EF} &= \int_{t_1}^{t_2} [\delta \mathbf{a}(t)^T \cdot \mathbf{r}_{EF}] dt \\
 \delta H_P &= \int_{t_1}^{t_2} [\delta \mathbf{a}(t)^T \cdot \mathbf{r}_P + \delta \theta(t) \cdot r_\theta] dt \\
 \delta H_R &= \int_{t_1}^{t_2} [\delta \mathbf{a}(t)^T \cdot \mathbf{r}_R + \delta y(t) \cdot r_y] dt \\
 \delta H_C &= \int_{t_1}^{t_2} [\delta \mathbf{a}(t)^T \cdot (-\Gamma_P \cdot f_{CP}(t) - \Gamma_R \cdot f_{CR}(t))] dt
 \end{aligned} \tag{22}$$

que es posible escribir como

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2} [\delta \mathbf{a}(t)^T \cdot \mathbf{r}_a] dt + \int_{t_1}^{t_2} [\delta \theta(t) \cdot r_\theta] dt + \int_{t_1}^{t_2} [\delta y(t) \cdot r_y] dt = 0 \tag{23}$$

con

$$\mathbf{r}_a = [\mathbf{r}_{EF} + \mathbf{r}_P + \mathbf{r}_R + (-\Gamma_P \cdot f_{CP}(t) - \Gamma_R \cdot f_{CR}(t))] \quad (24)$$

Es oportuno destacar que el vector  $\mathbf{r}_{EF}$  corresponde al modelo original de elementos finitos, sin amortiguadores de masa ni sistema de control, definido por las ecuaciones (8). Los vectores  $\mathbf{r}_P$  y  $\mathbf{r}_R$  son las acciones inducidas por el péndulo y el sistema masa resorte sobre el modelo original de elementos finitos, y están definidos por:

$$\mathbf{r}_R = \frac{\partial L_R}{\partial \mathbf{a}(t)} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_R}{\partial \dot{\mathbf{a}}(t)} \right) = +k_R \cdot \Psi_R \cdot y(t) - \Psi_R \cdot k_R \cdot \Psi_R^T \cdot \mathbf{a}(t) \quad (25)$$

$$\mathbf{r}_P = \frac{\partial L_P}{\partial \mathbf{a}(t)} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_P}{\partial \dot{\mathbf{a}}(t)} \right) = -\Psi_P \cdot m_P \cdot \Psi_P^T \cdot \ddot{\mathbf{a}}(t) - m_P \cdot L \cdot \Psi_P \cdot \ddot{\theta}(t) + \Psi_P \cdot f_{CP}(t) \quad (26)$$

Los escalares  $r_\theta$  y  $r_y$  corresponde a las magnitudes conjugadas energéticamente de  $\delta\theta(t)$  y  $\delta y(t)$ , que se pueden interpretar como una resultante de momentos y fuerzas respectivamente, y están definidas por:

$$r_y = \frac{\partial L_R}{\partial y(t)} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_R}{\partial \dot{y}(t)} \right) = k_R \cdot \Psi_P^T \cdot \mathbf{a}(t) - k_R \cdot y(t) - m_R \cdot \ddot{y}(t) + 1 \cdot f_{CR}(t) \quad (27)$$

$$r_\theta = \frac{\partial L_P}{\partial \theta(t)} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_P}{\partial \dot{\theta}(t)} \right) = -m_P \cdot gL \cdot \theta(t) - m_P \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta}(t) - m_P \cdot L \cdot \Psi_P^T \cdot \ddot{\mathbf{a}}(t) + Lf_{CP}(t) \quad (28)$$

En  $\mathbf{r}_P$  y  $r_\theta$  se han linealizado los términos no lineales en  $\theta(t)$ , haciendo un desarrollo de serie de potencias del seno y coseno de  $\theta(t)$  alrededor de cero y reteniendo sólo los términos lineales resultantes. Dado que son arbitrarias las variaciones  $\delta\mathbf{a}(t)$ ,  $\delta\theta(t)$  y  $\delta y(t)$  para asegurar que el funcional de Hamilton tenga primera variación nula, se deben verificar las siguientes ecuaciones de equilibrio

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_a &= [\mathbf{r}_{EF} + \mathbf{r}_P + \mathbf{r}_R + (-\Gamma_P \cdot f_{CP}(t) - \Gamma_R \cdot f_{CR}(t))] = \mathbf{0} \\ r_\theta &= 0 \\ r_y &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Al considerar las ecuaciones (24-28) en las ecuaciones (29), y reagrupando términos semejantes resultan las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_a \\ r_\theta \\ r_y \end{Bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{EF} + \Psi_P \cdot m_P \cdot \Psi_P^T & m_P \cdot L \cdot \Psi_P & 0 \\ m_P \cdot L \cdot \Psi_P^T & m_P \cdot L^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{a}}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{EF} + \Psi_R \cdot k_R \cdot \Psi_R^T & 0 & -k_R \cdot \Psi_R \\ 0 & m_P \cdot g \cdot L & 0 \\ -k_R \cdot \Psi_R^T & 0 & k_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}(t) \\ \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{Bmatrix} \mathbf{b}^{EF}(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (\Psi_P - \Gamma_P) \\ L \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot f_{CP}(t) + \begin{Bmatrix} -\Gamma_R \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot f_{CR}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

Se puede observar que las ecuaciones de equilibrio del sistema discreto completo son (N+2) ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en las (N+2) coordenadas

generalizadas. Estas ecuaciones son las ecuaciones de equilibrio del modelo original de elementos finitos ampliadas al incorporar los amortiguadores de masa y el sistema de control. Se puede destacar que el péndulo acopla mediante la matriz de masa, mientras que el sistema masa resorte, mediante la matriz de rigidez. Por otra parte las acciones del sistema de control resultan en acciones equivalentes a cargas ubicadas mediante los vectores  $\Gamma_P$  y  $\Gamma_R$ .

### 2.4 Ecuaciones de Equilibrio en Espacio Modal

A los efectos de trabajar con ecuaciones desacopladas, y distinguir la incidencia de cada modo natural de vibración en la respuesta general del sistema, es habitual realizar un análisis modal según Clough y Penzien, (2003). Esto es proponer un cambio de base al espacio modal de la forma

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{k=1,N} \boldsymbol{\varphi}_k \cdot q_k(t) = \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{q}(t) \tag{31}$$

donde  $\boldsymbol{\varphi}_k$  es el modo naturales de vibración libre asociado a la frecuencia  $\omega_k$  del sistema original de elementos finitos, soluciones del problema de autovalores dado por ecuaciones (11). A la función  $q_k(t)$  se la denomina amplitud modal o coordenada en el espacio modal. La matriz  $\boldsymbol{\Phi}$  tiene como columnas a los vectores  $\boldsymbol{\varphi}_k$  que se incluyan en la sumatoria del cambio de base dado por la ecuación (31), y generan el espacio modal. Cuando se consideran todos los modos de vibración libre del sistema original de elementos finitos se puede obtener la solución exacta del problema. Por el contrario si se restringe a un subconjunto de esos modos, la solución será aproximada. Con el cambio de base propuesto; y como es habitual, exigiendo que el vector  $\mathbf{r}_a$  sea ortogonal a la base de modos, las ecuaciones de equilibrio dadas por las ecuaciones (30), considerando las ecuaciones (11), resultan las siguientes ecuaciones de equilibrio en el espacio modal:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^T \cdot \mathbf{r}_a \\ r_\theta \\ r_y \end{Bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{EF} + \boldsymbol{\Phi}^T \cdot \boldsymbol{\psi}_P \cdot m_P \cdot \boldsymbol{\psi}_P^T \cdot \boldsymbol{\Phi} & m_P \cdot L \cdot \boldsymbol{\Phi}^T \cdot \boldsymbol{\psi}_P & 0 \\ m_P \cdot L \cdot \boldsymbol{\psi}_P^T \cdot \boldsymbol{\Phi} & m_P \cdot L^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}^{EF} + \boldsymbol{\Phi}^T \cdot \boldsymbol{\psi}_R \cdot k_R \cdot \boldsymbol{\psi}_R^T \cdot \boldsymbol{\Phi} & 0 & -k_R \cdot \boldsymbol{\Phi}^T \cdot \boldsymbol{\psi}_R \\ 0 & m_P \cdot g \cdot L & 0 \\ -k_R \cdot \boldsymbol{\psi}_R^T \cdot \boldsymbol{\Phi} & 0 & k_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} + \tag{32} \\ &+ \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^T \cdot \mathbf{b}^{EF}(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^T \cdot (\boldsymbol{\psi}_P - \Gamma_P) \\ L \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot f_{CP}(t) + \begin{Bmatrix} -\boldsymbol{\Phi}^T \cdot \Gamma_R \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot f_{CR}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Es oportuno destacar que las ecuaciones de equilibrio en es el espacio modal dependen de las coordenadas modales agrupadas en el vector  $\mathbf{q}(t)$  y también de las posiciones del péndulo  $\theta(t)$  y la masa resorte  $y(t)$ , que son variables en el espacio original. Se debe destacar que las ecuaciones de equilibrio en el espacio modal serán diagonales sólo si no hay amortiguadores de masa, ya que las matrices  $\boldsymbol{\Phi}^T \cdot [\boldsymbol{\psi}_R \cdot k_R \cdot \boldsymbol{\psi}_R^T] \cdot \boldsymbol{\Phi}$  y  $\boldsymbol{\Phi}^T \cdot [\boldsymbol{\psi}_P \cdot m_P \cdot \boldsymbol{\psi}_P^T] \cdot \boldsymbol{\Phi}$  resultan no diagonales.

## 2.5 Modelo Reducido en Espacio Modal

A los efectos de obtener un modelo reducido para definir los parámetros del sistema de control; y sin pérdida de generalidad, se considerará sólo dos modos en el cambio de base propuesto en la ecuación (31). La matriz de cambio de base  $\Phi$  tiene N filas correspondientes a los grados de libertad del modelo original de elementos finitos; y dos columnas, correspondientes a los dos modos de vibración  $\varphi_1, \varphi_2$  que se retienen. Esto es

$$\Phi = (\varphi_1 \quad \varphi_2) \quad (33)$$

Y así las ecuaciones de equilibrio del modelo reducido en el espacio modal serán

$$\mathbf{M}_M \cdot \ddot{\mathbf{x}}_M(t) + \mathbf{K}_M \cdot \mathbf{x}_M(t) = \mathbf{b}_M^{EF}(t) + \Gamma_{PM} \cdot f_{CP}(t) + \Gamma_{RM} \cdot f_{CR}(t) \quad (34)$$

Agrupando las incógnitas en el espacio modal en el vector

$$\mathbf{x}_M(t) = \{(q_1(t) \quad q_2(t) \quad \theta(t) \quad y(t))\}^T \quad (35)$$

Los vectores  $\mathbf{b}_M^{EF}(t), \Gamma_{PM}$  y  $\Gamma_{RM}$  son las proyecciones sobre el espacio modal reducido de las acciones externas del modelo original de elementos finitos, de las acciones de control del péndulo y del sistema masa resorte respectivamente, y están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_M^{EF}(t) &= \left\{ \varphi_1^T \cdot \mathbf{b}^{EF}(t) \quad \varphi_2^T \cdot \mathbf{b}^{EF}(t) \quad 0 \quad 0 \right\}^T \\ \Gamma_{PM} &= \left\{ (\varphi_1^T \cdot \Psi_P - \varphi_1^T \cdot \Gamma_P) \quad (\varphi_2^T \cdot \Psi_P - \varphi_2^T \cdot \Gamma_P) \quad L \quad 0 \right\}^T \\ \Gamma_{RM} &= \left\{ -\varphi_1^T \cdot \Gamma_R \quad -\varphi_2^T \cdot \Gamma_R \quad 0 \quad 1 \right\}^T \end{aligned} \quad (36)$$

Es oportuno destacar que los vectores  $\Gamma_{PM}$  y  $\Gamma_{RM}$  deben ser vectores no nulos para que el modelo reducido resulte adecuadamente definido. Esto condiciona la elección de los grados de libertad donde actúa el sistema de control definidos por los vectores  $\Gamma_P$  y  $\Gamma_R$ ; de modo que sus proyecciones sobre el espacio modal sean no nulas. Resulta inadecuado actuar, por ejemplo, sobre nodos de los modos de vibración del modelo de elementos finitos original.

Las matrices de masa y rigidez en el espacio modal reducido, donde se distinguen las contribuciones del modelo original de elementos finitos, del péndulo y de la masa resorte son las siguientes:

$$\mathbf{M}_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_P \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1^T \cdot \Psi_P \cdot \Psi_P^T \cdot \varphi_1 & \varphi_1^T \cdot \Psi_P \cdot \Psi_P^T \cdot \varphi_2 & L \cdot \varphi_1^T \cdot \Psi_P & 0 \\ \varphi_2^T \cdot \Psi_P \cdot \Psi_P^T \cdot \varphi_1 & \varphi_2^T \cdot \Psi_P \cdot \Psi_P^T \cdot \varphi_2 & L \cdot \varphi_2^T \cdot \Psi_P & 0 \\ L \cdot \Psi_P^T \cdot \varphi_1 & L \cdot \Psi_P^T \cdot \varphi_2 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_R \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{K}_M = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_P \cdot g \cdot L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_R \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1^T \cdot \Psi_R \cdot \Psi_R^T \cdot \varphi_1 & \varphi_1^T \cdot \Psi_R \cdot \Psi_R^T \cdot \varphi_2 & 0 & -\varphi_1^T \cdot \Psi_R \\ \varphi_2^T \cdot \Psi_R \cdot \Psi_R^T \cdot \varphi_1 & \varphi_2^T \cdot \Psi_R \cdot \Psi_R^T \cdot \varphi_2 & 0 & -\varphi_2^T \cdot \Psi_R \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Psi_R^T \cdot \varphi_1 & -\Psi_R^T \cdot \varphi_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Se debe destacar que la contribución de la masa del péndulo  $m_P$  en la matriz de masa modal está definida por las proyecciones del vector  $\Psi_P$  en cada modo retenido. Teniendo en consideración que el vector  $\Psi_P$  tiene componentes nulas salvo la correspondiente al grado de libertad de vinculación entre el péndulo y el modelo original de elementos finitos, dicha proyección es la selección correspondiente del grado de libertad en el modo en cuestión. Similarmente, ocurre lo mismo con el grado de libertad de vinculación de la masa resorte con el modelo original de elementos finitos, pero aportando a la matriz de rigidez modal.

## 2.6 Definición del Sistema de Control en Espacio Modal Reducido

Para definir el sistema de control se trabaja con el modelo reducido definido anteriormente, cuyas ecuaciones de equilibrio están expresadas por las ecuaciones (34), pero en el espacio de estado modal. Esto es:

$$\dot{\mathbf{z}}_M(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}_M(t) + \mathbf{\Gamma}_{PM}^{SS} \cdot f_{CP}(t) + \mathbf{\Gamma}_{RM}^{SS} \cdot f_{CR}(t) + \mathbf{\Gamma}_{EF}^{SS}(t) \quad (39)$$

con el vector de estado  $\mathbf{z}_M(t)$  definido como su vector transpuesto en la forma:

$$\mathbf{z}_M(t) = \{q_1(t) \quad q_2(t) \quad \theta(t) \quad y(t) \quad \dot{q}_1(t) \quad \dot{q}_2(t) \quad \dot{\theta}(t) \quad \dot{y}(t)\}^T \quad (40)$$

Se deben distinguir las variables en espacio modal  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$ , de las variables en el espacio original  $\theta(t)$ , e  $y(t)$  y sus derivadas. La matriz de coeficientes en el espacio de estado modal reducido resulta:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_4 & \mathbf{I}_4 \\ -\mathbf{M}_M^{-1} \cdot \mathbf{K}_M & \mathbf{0}_4 \end{pmatrix} \quad (41)$$

siendo  $\mathbf{I}_4$  y  $\mathbf{0}_4$  las matrices identidad y nula de orden cuatro respectivamente. Los vectores de acciones equivalentes a las acciones externas y de control en el espacio de estado modal son:

$$\mathbf{\Gamma}_{EF}^{SS} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_4 \\ \mathbf{M}_M^{-1} \cdot \mathbf{b}_M^{EF}(t) \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{\Gamma}_{PM}^{SS} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_4 \\ \mathbf{M}_M^{-1} \cdot \mathbf{\Gamma}_{PM} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{\Gamma}_{RM}^{SS} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_4 \\ \mathbf{M}_M^{-1} \cdot \mathbf{\Gamma}_{RM} \end{Bmatrix}; \quad (42)$$

En las ecuaciones (42) con  $\mathbf{0}_4$  se indica el vector de cuatro componentes nulas.

Si bien es posible definir en forma independiente las acciones de control asociadas al péndulo  $f_{CP}(t)$  y asociadas a la masa resorte  $f_{CR}(t)$ , se plantea una única acción de control por realimentación de estado (Dorf y Bishop, 2001), por lo que se considera proporcional al vector de estado, en la forma:

$$f_C(t) = -\mathbf{G}_M \cdot \mathbf{z}_M(t) = -\left( \{g1 \quad g2\} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} + \{g3 \quad g4\} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} + \{g5 \quad g6\} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{Bmatrix} + \{g7 \quad g8\} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{y}(t) \end{Bmatrix} \right) \quad (43)$$

Siendo  $\mathbf{G}_M = \{g1 \quad g2 \quad g3 \quad g4 \quad g5 \quad g6 \quad g7 \quad g8\}$  un vector fila de constantes a determinar.

Así las ecuaciones en el espacio de estados del sistema con control por realimentación de estado se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_M(t) &= \mathbf{A}_C \cdot \mathbf{z}_M(t) + \mathbf{\Gamma}_{EF}^{SS}(t) \\ \mathbf{A}_C &= (\mathbf{A} - \mathbf{\Gamma}_C^{SS} \cdot \mathbf{G}_M) \\ \mathbf{\Gamma}_C^{SS} &= \mathbf{\Gamma}_{PM}^{SS} + \mathbf{\Gamma}_{RM}^{SS} \end{aligned} \quad (44)$$

Se pretende que el sistema con control garantice una respuesta amortiguada para las acciones consideradas. Por tratarse de un sistema lineal, y asumiendo que el sistema es completamente controlable, está garantizada la libre ubicación de los polos de la matriz  $\mathbf{A}_C$  que representa al sistema con bucle cerrado (Dorf y Bishop, 2001). Para que el sistema sea completamente controlable se debe verificar que la matriz de controlabilidad tenga rango completo, es decir que exista su matriz inversa (Dorf y Bishop, 2001). La matriz de controlabilidad, para el sistema considerado está dada por:

$$\mathbf{M}_C = \left( \mathbf{\Gamma}_C^{SS} \quad \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}_C^{SS} \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{\Gamma}_C^{SS} \quad \dots \quad \mathbf{A}^Q \mathbf{\Gamma}_C^{SS} \right) \quad (45)$$

siendo  $Q$  igual al orden del espacio de estado menos uno.

Resulta entonces posible y conveniente asignar dichos polos en el semi plano negativo del plano  $s$ , y así garantizar una respuesta en el tiempo de tipo oscilatoria amortiguada. La asignación de polos y el método de Ackerman (Dorf y Bishop, 2001) permite obtener las constantes de  $\mathbf{G}_M$ .

## 2.7 Definición del Sistema de Control en Espacio Original

Una vez encontrados los valores de las constantes del vector  $\mathbf{G}_M$  en el espacio de estado modal reducido, es necesario trasladarlas al modelo completo de elementos finitos planteado en variables reales. Para ello se asume que la acción de control  $f_C(t)$  es la misma en ambos espacios, aunque definida por parámetros distintos.

Para definir la acción de control en el espacio original se eligen tantos puntos en los cuales medir la respuesta como cantidad de modos se consideran para definir el espacio modal reducido. En esos puntos se mide la respuesta en términos de desplazamientos y velocidades. Es decir que de toda la dimensión del espacio de estado real, sólo se seleccionan algunos grados de libertad que son los que se medirán y se agrupan en el vector  $\mathbf{y}_R(t)$ , que en función de las componentes del espacio modal es

$$\mathbf{y}_R(t) = \mathbf{C}_{MS} \cdot \mathbf{z}_M = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_a \cdot \Phi & 0 & 0 & \mathbf{0}_N^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_N^T & 1 & 0 & \mathbf{0}_N^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_N^T & 0 & 1 & \mathbf{0}_N^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_N^T & 0 & 0 & \mathbf{C}_a \cdot \Phi & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_N^T & 0 & 0 & \mathbf{0}_N^T & 1 & 0 \\ \mathbf{0}_N^T & 0 & 0 & \mathbf{0}_N^T & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \theta(t) \\ y(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{y}(t) \end{Bmatrix} \quad (46)$$

Siendo  $\mathbf{C}_a$  una matriz de tantas filas como puntos se eligen para medir, y de  $N$  columnas. Tiene elementos nulos salvo aquellos correspondiente a los grados de libertad elegidos para medir, que valen uno. El vector  $\mathbf{0}_N$  es un vector nulo de dimensión  $N$ . La matriz  $\mathbf{C}_a \Phi$  es la proyección de los grados de libertad a medir en el espacio original sobre el espacio modal reducido, y resulta una matriz que tiene las componentes de los modos que generan el espacio reducido, correspondientes a los grados de libertad a medir.

La acción de control en el espacio original se define

$$f_C(t) = -\mathbf{G}_R \cdot \mathbf{y}_R(t) = -\mathbf{G}_R \cdot \mathbf{C}_{MS} \cdot \mathbf{z}_M \quad (47)$$

De comparar la definición de la acción de control dadas por las ecuaciones (43) y (47) se tiene que

$$\mathbf{G}_M = \mathbf{G}_R \cdot \mathbf{C}_{MS} \quad (48)$$

De donde es posible calcular  $\mathbf{G}_R$  a partir de  $\mathbf{G}_M$  y de invertir la matriz  $\mathbf{C}_{MS}$  expresada en la ecuación (46). La inversa de la matriz  $\mathbf{C}_{MS}$  está garantizada si la matriz  $\mathbf{C}_a \Phi$  tiene inversa. Por lo tanto la elección de los grados de libertad, en el espacio original, donde medir queda condicionada a que su proyección sobre el espacio modal sea tal que la matriz  $\mathbf{C}_a \Phi$  tenga inversa.

Así es que al haber elegido dos modos para generar el espacio modal reducido, se deben elegir dos puntos situados por ejemplo en  $x = x_1$  y  $x = x_2$ , en los cuales medir los grados de libertad del espacio original  $j$ -ésimo y  $k$ -ésimo correspondientes a las componentes  $j$  y  $k$  del vector  $\mathbf{a}(t)$ . La matriz  $\mathbf{C}_a$  es de 2 filas por  $N$  columnas. La primera fila de la matriz  $\mathbf{C}_a$  corresponde a la selección del grado de libertad  $j$ -ésimo, mientras que la segunda fila, al  $k$ -

ésimo. De esa manera la matriz  $\mathbf{C}_a \Phi$  resulta:

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_a \cdot \Phi = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(j) & \varphi_2(j) \\ \varphi_1(k) & \varphi_2(k) \end{pmatrix} \quad (49)$$

siendo  $\varphi_m(l)$  la componente “ $l$ ” del modo “ $m$ ”. De considerar las ecuaciones (54-55) resulta posible plantear

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_R &= \mathbf{G}_M \cdot \mathbf{C}_{MS}^{-1} \\ [g1_R \quad g2_R] &= [g1_M \quad g2_M] \cdot \mathbf{B}^{-1} \quad ; \quad g3_R = g3_M \quad ; \quad g7_R = g7_M \\ [g5_R \quad g6_R] &= [g5_M \quad g6_M] \cdot \mathbf{B}^{-1} \quad ; \quad g4_R = g4_M \quad ; \quad g8_R = g8_M \end{aligned} \quad (50)$$

De esta manera la acción de control en el espacio original del modelo de elementos finitos se calcula con las constantes definidas en el espacio modal reducido de la siguiente forma

$$\begin{aligned} f_C(t) &= - \left( [g1_M \quad g2_M] \cdot \mathbf{B}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_j(t) \\ \mathbf{a}_k(t) \end{Bmatrix} + g3_M \cdot \theta(t) + g4_M \cdot y(t) \right) \\ &\quad - \left( [g5_M \quad g6_M] \cdot \mathbf{B}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_j(t) \\ \mathbf{a}_k(t) \end{Bmatrix} + g7_M \cdot \theta(t) + g8_M \cdot \dot{y}(t) \right) \end{aligned} \quad (51)$$

La acción de control  $f_C(t)$  en un modelo de elementos finitos se calcula midiendo los grados de libertad  $\mathbf{a}_j(t)$  y  $\mathbf{a}_k(t)$  y sus velocidades, en los puntos de la torre en  $x=x_1$  y  $x=x_2$  y las constantes de  $\mathbf{G}_M$  calculadas en un espacio modal reducido. La acción de control se aplica en la masa del péndulo y reacciona contra la torre en  $x=x_C$ , y en la masa  $m_R$  y reacciona en la torre en  $x=x_R$ .

Es oportuno señalar que el modelo reducido y el sistema de control presentados anteriormente se reducen a respectivos sistemas de ecuaciones de orden tres, y seis en espacio de estado, cuando sólo se considera como amortiguador de masa el péndulo; o en su defecto la masa resorte. En ambos casos se deberá eliminar las filas y columnas asociadas al amortiguador de masa que no se incluya en las ecuaciones de movimiento dadas por las ecuaciones (23), (26) y (34). De esa manera habrá sólo seis constantes de  $G$  a determinar y se tendrá la posibilidad de asignar seis polos que aseguren el adecuado amortiguamiento del sistema.

### 3 APLICACIÓN EN UNA TORRE CON AMORTIGUADOR MASA RESORTE

Se considera a continuación el control de vibraciones de flexión de una torre de altura  $H=1500$ mm, de sección transversal de tipo tubo cuadrado de 50 mm de lado y 2,3 mm de espesor, de material acero y con una masa en el extremo libre de 2 kg. Se considera una carga transversal aplicada en el extremo libre de 5405 N, con variación en el tiempo de tipo impulso. Es un caso presentado y discutido en Preumont y Seto (2008), donde en primer lugar obtienen un sistema reducido mediante un método propuesto en Seto y Mitsuta (1992, 1994). Posteriormente, (Seto et al., 1995) incorporan un amortiguador de masa tipo masa resorte en el extremo libre de la torre, con un sistema de control activo definido mediante el método LQ (sistema lineal con función objeto cuadrática) de control óptimo. Para aplicar la metodología propuesta en este trabajo, se ha desarrollado un modelo de elementos finitos en ANSYS usando 15 elementos de igual longitud BEAM188 (Ansys, 2009) a lo largo del eje de la torre entre  $X=0$  y  $X=H$ . La masa concentrada en el extremo libre se ha incorporado con el elemento Mass21 (Ansys, 2009). Se obtuvieron los modos de vibración libre de flexión de la torre, con

la masa en el extremo y sin sistema de control, y se consideraron los dos primeros modos  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  normalizados respecto de la matriz de masa como generadores del espacio modal reducido. Para los valores de x característicos, las componentes de desplazamiento transversal al eje de la torre de dichos modos se presentan en la Tabla 1, donde también se indica que grado de libertad corresponde en el vector de coordenadas generalizadas  $\mathbf{a}(t)$  del modelo de elementos finitos realizado. Las frecuencias naturales de vibración asociadas a dicho modos de flexión son 95,61 rad/seg (15,21 Hz) y 741,72 rad/seg (118,05 Hz) respectivamente.

| X              | 0              | H/15           | H/5            | H/3               | 8H/15             | 2H/3              | 4H/5              | 14H/15            | H                 |
|----------------|----------------|----------------|----------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Nodo           | 1              | 2              | 4              | 6                 | 9                 | 11                | 13                | 15                | 16                |
| $\mathbf{a}_k$ | $\mathbf{a}_1$ | $\mathbf{a}_3$ | $\mathbf{a}_7$ | $\mathbf{a}_{11}$ | $\mathbf{a}_{17}$ | $\mathbf{a}_{21}$ | $\mathbf{a}_{25}$ | $\mathbf{a}_{29}$ | $\mathbf{a}_{31}$ |
| $\varphi_1(x)$ | 0.00           | 0.004          | 0.033          | 0.086             | 0.201             | 0.294             | 0.395             | 0.501             | 0.555             |
| $\varphi_2(x)$ | 0.00           | -0.033         | -0.219         | -0.450            | -0.632            | -0.549            | -0.297            | 0.072             | 0.276             |

Tabla 1: Modos de vibración considerados como funciones base.

Reteniendo estos dos modos en el cambio de base dado por las ecuaciones (31), y sin considerar amortiguador de masa ni sistema de control, el modelo reducido tiene ecuaciones de equilibrio en el espacio modal reducido dadas por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 9141.27 & 0 \\ 0 & 550148.56 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.555 \\ 0.276 \end{Bmatrix} 100 \cdot \delta(t) \quad (52)$$

siendo el vector término independiente la proyección de las cargas externas en el espacio modal reducido, dado por  $\Phi^T \cdot \mathbf{b}^{EF}(t)$ , dado por de las ecuaciones (36).

Tal como lo presentado por Preumont y Seto (2008), es posible comparar la respuesta del modelo reducido y la del modelo completo de elementos finitos realizado en ANSYS mediante la respuesta en el dominio de la frecuencia en diferentes puntos de la torre, ante un impulso en el extremo de la misma. En la Figura 2 se puede observar la respuesta en el punto medio de la torre en el dominio de la frecuencia, obtenidas con un incremento de frecuencia de 0.0399Hz. Se pueden observar dos picos en la respuesta que corresponden a las dos primeras frecuencias naturales de vibración libre que son:  $f_1=15.21$  Hz y  $f_2= 118.04$  Hz.

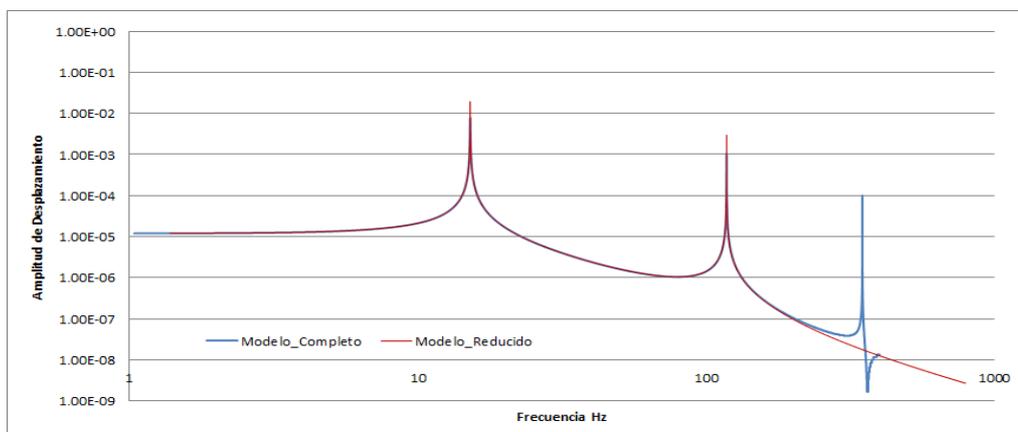


Figura 2: Amplitud de desplazamiento en el nodo 9 de la torre

Sin embargo, el sistema reducido no presenta amplificación en la tercera frecuencia correspondiente al tercer modo de vibración del modelo completo de elementos finitos, que se

manifiesta en la Figura 2 por el tercer pico en  $f_3=349.164$  Hz que presenta la curva del modelo completo. Esta diferencia es de esperar ya que en el modelo reducido se incluyeron solamente los dos primeros modos de vibración del sistema libre. El modelo reducido tiene una respuesta que se superpone en el rango de frecuencia de interés con las del sistema completo de elementos finitos al igual que lo presentado en Preumont y Seto (2008), con otra metodología para definir el modelo reducido.

Tanto en el modelo reducido como en el modelo completo de elementos finitos, se ha incorporando un sistema masa resorte en el extremo de la torre sintonizado a 15.21 Hz con el primer modo de vibración. La masa agregada se eligió como 4% de la masa total del sistema; es decir 0,28 Kg, mientras que la rigidez es 2554 N/m. La masa total del sistema es la suma de la masa de la torre 5,16 Kg más la masa agregada de 2Kg.

El vector  $\psi_R$  de acoplamiento entre el amortiguador de masa y la torre tiene elementos nulos salvo la componente 31 que vale uno. Dicha componente corresponde al desplazamiento horizontal del nodo 16. De modo que la contribución del amortiguador de masa incorporado en la rigidez del modelo reducido esta dado por

$$k_R \cdot \begin{pmatrix} \phi_1^T \cdot \psi_R \cdot \psi_R^T \cdot \phi_1 & \phi_1^T \cdot \psi_R \cdot \psi_R^T \cdot \phi_2 & -\phi_1^T \cdot \psi_R \\ \phi_2^T \cdot \psi_R \cdot \psi_R^T \cdot \phi_1 & \phi_2^T \cdot \psi_R \cdot \psi_R^T \cdot \phi_2 & -\phi_2^T \cdot \psi_R \\ -\psi_R^T \cdot \phi_1 & -\psi_R^T \cdot \phi_2 & 1 \end{pmatrix} = 2554 \cdot \begin{pmatrix} 0,555^2 & 0,555 \cdot 0,276 & -0,555 \\ 0,276 \cdot 0,555 & 0,276^2 & -0,276 \\ -0,555 & -0,276 & 1 \end{pmatrix} \quad (53)$$

El vector  $\Gamma_R$  de localización de la acción del sistema de control sobre la torre tiene elementos nulos salvo la componente 31 que vale uno. Dicha componente corresponde al desplazamiento horizontal del nodo 16 que representa la punta de la torre en  $X=H$ . La proyección del vector de la fuerza de control en el espacio modal reducido está dada por

$$\Gamma_{RM} = \{-\phi_1^T \cdot \Gamma_R \quad -\phi_2^T \cdot \Gamma_R \quad 1\}^T = \{-0,555 \quad -0,276 \quad 1\}^T \quad (54)$$

Las ecuaciones del modelo reducido con el amortiguador de masa resultan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.28 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 9927 & 391 & -1417 \\ 391 & 550340 & -705 \\ -1417 & -705 & 2554 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5548 \\ 0.2760 \\ 0 \end{Bmatrix} 100 \cdot \delta(t) + \begin{Bmatrix} -0.5548 \\ -0.2760 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot f_C(t) \quad (55)$$

En la Figura 3 se presenta la respuesta en el dominio de la frecuencia del extremo de la torre incluyendo el amortiguador de masa sintonizado, ante un impulso en el mismo punto, pero con  $f_C(t)$  nulo y considerando un intervalo de frecuencia de 0.0399Hz. Al comparar con la Figura 2 se puede observar que en correspondencia con la frecuencia asociada al primer modo se ha producido un doble pico cuando se incorporó el sistema masa resorte sintonizado. Las nuevas frecuencias de la torre con la masa en la punta y el amortiguador de masa sintonizado son  $f_1=11.13$ Hz,  $f_2=17.6$ Hz y  $f_3=118.07$ Hz.

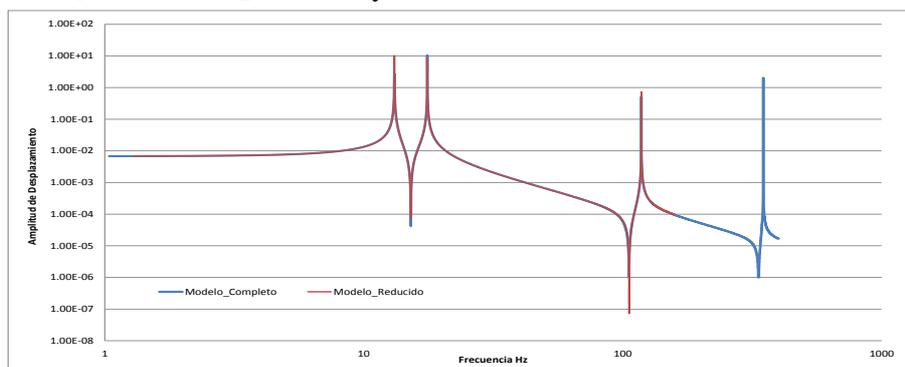


Figure 3: Amplitud de desplazamiento del extremo de la torre. Modelos con Masa-Resorte Sintonizado

A partir de la excelente concordancia que se observa en los resultados se puede asegurar que el modelo reducido es equivalente dinámicamente al modelo completo de elementos finitos en el rango de frecuencias de interés.

Antes de definir el sistema de control es necesario verificar que el sistema reducido sea completamente controlable para lo cual la matriz de controlabilidad dada por la ecuación (45) debe ser inversible. Para este caso el determinante de la matriz de controlabilidad resulta  $2.2146 \cdot 10^{30}$  que garantiza la existencia de su inversa y así el modelo resulta controlable.

A partir de las ecuaciones (54-55) se puede definir la matriz  $\mathbf{A}_c$  del sistema reducido con control dada por la ecuación (44). Para obtener las constante  $\mathbf{G}_M$ , se considera una posición de polos en el plano  $s$  tal que el amortiguamiento buscado sea del orden de  $\zeta_1 = 43\%$  para el primer modo y de  $\zeta_2 = 34\%$  para el segundo modo. Así usando el método de Ackermann, se obtienen las constantes  $\mathbf{G}_M$  para el modelo reducido, que se presentan en la Tabla 2.

Para conseguir las constantes  $\mathbf{G}_R$  del sistema de control en el sistema real de elementos finitos se debe transformar al espacio modal las variables elegidas para medir la respuesta del sistema estructural en el espacio original. En este caso se considera medir los desplazamientos en dirección horizontal, y las velocidades del nodo 16, ubicado en el extremo de la torre; y del nodo 9, ubicado en el centro de la misma. La primera fila de la matriz  $\mathbf{C}_a$  tiene ceros salvo la componente 31 que vale 1 correspondiente al desplazamiento horizontal del nodos 16. En la segunda fila es la componente 17 la única que vale 1 correspondiente al desplazamiento horizontal del nodos 16. Resulta así que la matriz  $\mathbf{C}_a$  es:

$$\mathbf{C}_a = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

Su proyección sobre el espacio modal reducido resulta:

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_a \cdot \Phi = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\varphi_1 \quad \varphi_2) = \begin{pmatrix} 0,555 & 0,276 \\ 0,201 & -0,632 \end{pmatrix} \quad (57)$$

Mediante la transformación expresada por las ecuaciones (50) se obtienen las constantes  $\mathbf{G}_R$  para el modelo completo de elementos finitos. En la Tabla 2 se presentan los valores obtenidos para el sistema de control en el espacio reducido y en el espacio original del modelo de elementos finitos.

| $G$                    | $g_1$ | $g_2$ | $g_3$ | $g_4$  | $g_5$   | $g_6$ |
|------------------------|-------|-------|-------|--------|---------|-------|
| <i>Modelo Reducido</i> | 10793 | 34    | -1013 | -62.55 | -0.2015 | -55   |
| <i>Modelo Completo</i> | 16782 | 7380  | -1013 | -97    | -42     | -55   |

Tabla 2: Constantes del Sistema de Control.

En la Figura 4 se presentan las respuestas del desplazamiento en función del tiempo en el extremo de la torre con el sistema de control definido, ante un impulso en dicho punto, para el modelo completo de elementos finitos el cual fue resuelto utilizando el método de integración en el tiempo HHT (Hughes, 1987) que ofrece Ansys con un  $\Delta t = 0.00025s$ ; y para el reducido, el cual fue resuelto utilizando el método de la diferencia central con un  $\Delta t = 0.002 s$ . Para el mismo valor de impulso, las respuestas de ambos modelos son similares, logrando un amortiguamiento prácticamente total al finalizar el segundo ciclo; de la misma forma que lo obtenido en forma analítica y experimental por Seto y Mitsuta (1994). Se debe destacar que en el planteo de Seto y Mitsuta (1994) referente a la obtención del modelo reducido y de la estrategia de control utilizadas (LQR) son distintas a las propuesta en el presente trabajo. Por

otra parte, el periodo de la respuesta en este trabajo es inferior al presentado por de Seto y Mitsuta (1994), y es probable que las fuerzas desarrolladas en el sistema de control sean también distintas; siendo en este trabajo posiblemente mayores. No es posible compararlas ya que no están presentadas en Seto y Mitsuta (1994).

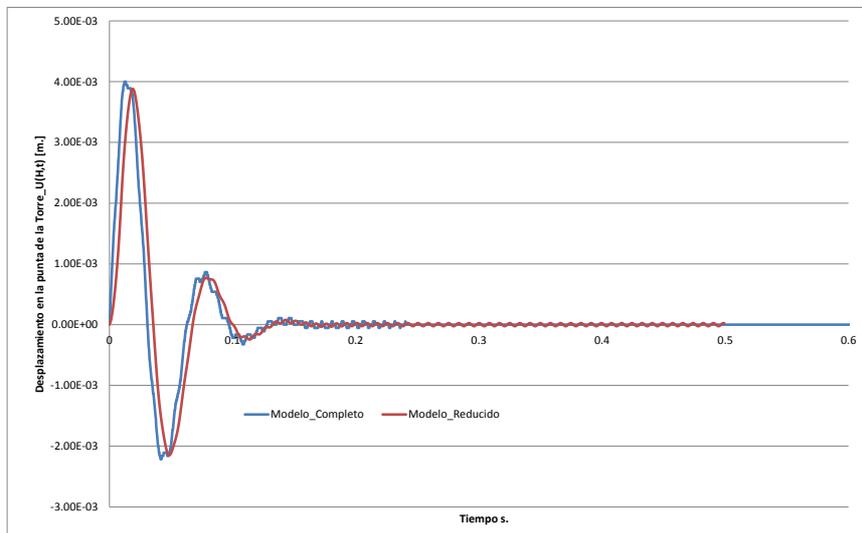


Figura 4: Desplazamiento en el extremo de la torre. Modelos con Masa-resorte sintonizado y control

De la Figura 4 es posible estimar el orden del amortiguamiento logrado con la incorporación del sistema masa resorte sintonizado y el sistema de control en el sistema completo de elementos finitos. Considerando los dos primeros picos positivos y el pico positivo en el segundo 0.3 de la respuesta y mediante una aproximación de mínimos cuadrados con una función exponencial de la forma  $e^{-\xi\omega t}$  se puede inferir que el amortiguamiento logrado es del orden de 41%. Se debe destacar que al asignar los polos de la matriz  $A_c$ , se planteó un amortiguamiento de  $\zeta_1 = 43\%$  para el primer modo y de  $\zeta_2 = 34\%$  para el segundo modo. Se debe destacar que el valor de amortiguamiento obtenido en el modelo de elementos finitos, es del orden del amortiguamiento planteado en el modelo reducido propuesto.

La metodología propuesta para encontrar el modelo reducido y definir el sistema de control por retroalimentación de estado mediante la asignación de polos resulta así satisfactoria para el problema de interés.

#### 4 APLICACIÓN EN UNA PLACA PLANA

Se considera el ejemplo de una placa plana empotrada en un borde y libre en los demás, discutido en Kar et al. (2000). En la Figura 5 se presenta la nomenclatura y la malla de elementos finitos utilizada. Se trata de una Placa Plana 1000 mm de altura  $H$ ; 300 mm de ancho  $B_I$  y 4 mm de espesor; de material acero con módulo de Elasticidad  $E=2\cdot 10^{11}$  y densidad  $7850 \text{ Kg/m}^3$ . Se considera una excitación de tipo impulso representado en la Figura 5 por la función  $F(t)$  aplicada en el punto denominado  $X_\delta$  de coordenadas  $(0, H/1, B/1)$ , siendo  $H/1$  igual a 850 mm. Se considera la incorporación de un amortiguador de masa sintonizado (AMS) acoplado a la placa en la posición denominada  $X_{AMS}$ , de coordenadas  $(0, H/1, 0)$ . La fuerza del sistema de control  $f_{cR}(t)$  se aplica sobre la masa  $m_R$  y reacciona en el punto de acople  $X_{AMS}$ . El sistema de control mide los desplazamientos y velocidades de la masa  $m_R$ , y de los puntos de la placa denominados  $X_\delta$ ,  $X_{AMS}$  y el  $X_M$  de coordenadas  $(0, H/2, B/2)$ , al igual

que lo adoptado por Kar et al.(2000); siendo  $H_2$  igual a 500 mm y  $B_2$  igual a 150 mm.

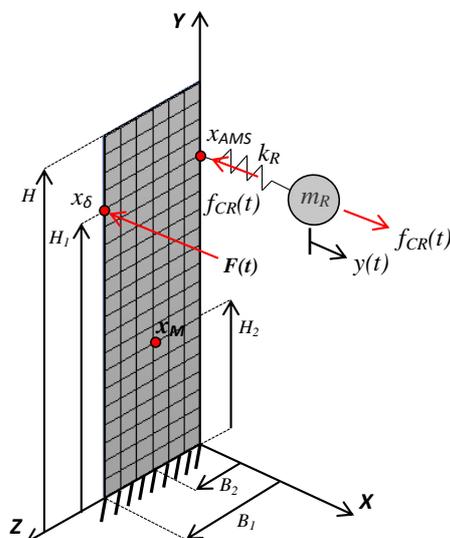


Figura 5: Desplazamiento en la posición  $X_\delta$  de la placa

Para aplicar la metodología propuesta, se ha desarrollado un modelo de elementos finitos en ANSYS usando 120 elementos SHELL 181 (Ansys, 2009) como se puede observar en la Figura 5. Se obtuvieron los modos de vibración libre normalizados respecto de la matriz de masa, sin sistema de control ni amortiguador de masa. En la Figura 6 se presentan los tres primeros modos que se utilizaron para definir el cambio de base dado por ecuación (32). Es decir que el sistema reducido se define con los dos primeros modos de flexión transversal de la placa y el primer modo de torsión; cuyas frecuencias naturales son 3.32 Hz, 20.89 Hz y 22.63 Hz respectivamente. Así mismo, en la Figura 6 se destacan los puntos  $X_\delta$ ,  $X_{AMS}$  y  $X_M$  que están ubicados en cercanías de los nodos del cuarto modo de vibración libre de la placa y tienen desplazamientos cercanos a cero en ese modo.

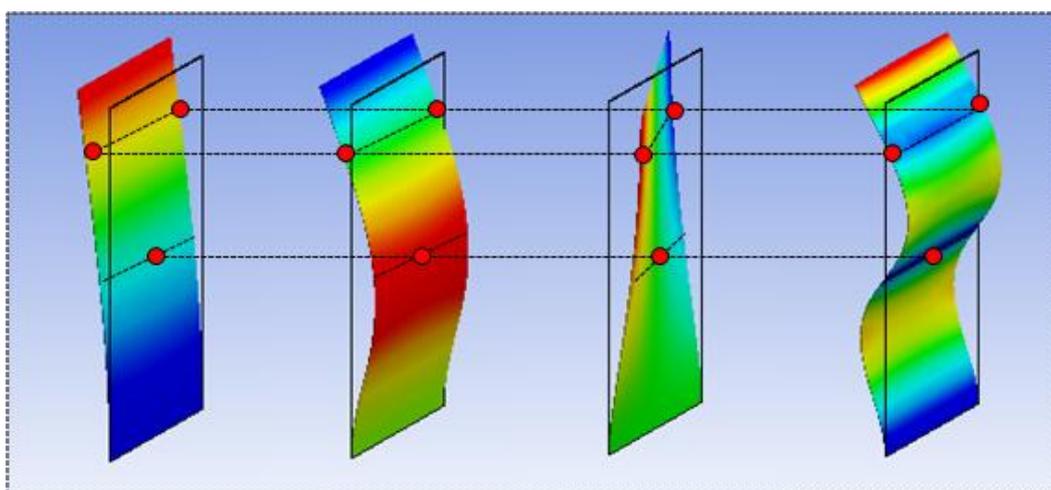


Figura 6: Modos de vibración libre considerados

Tal como lo presentado en Kar et al. (2000), es posible comparar la respuesta del modelo reducido y la del modelo completo de elementos finitos realizado en ANSYS sin

amortiguador de masa sintonizado mediante la respuesta en el dominio de la frecuencia ante un impulso en la posición  $X_\delta$  de la misma. En la Figura 7 se puede observar la respuesta en la posición  $X_\delta$  de la Placa. Se observan tres picos correspondientes a las tres primeras frecuencias naturales de vibración libre  $f_1=3.32$  Hz  $f_2= 20.89$  Hz y  $f_3= 22.63$  Hz

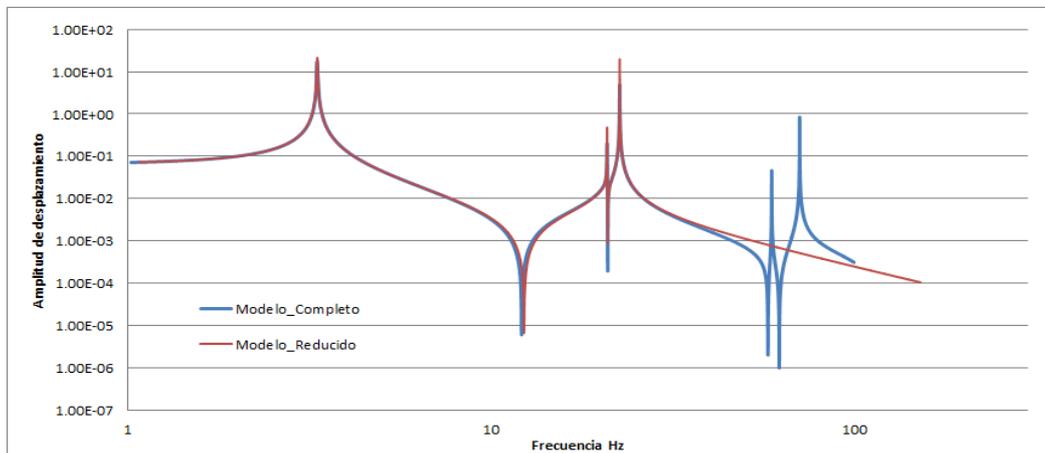


Figura 7: Amplitud de desplazamiento en la posición  $X_\delta$  de la placa

Se puede observar que el modelo reducido tiene una respuesta que se superpone en todo el rango de frecuencia analizado con la del sistema completo de elementos finitos. Sin embargo, el sistema reducido no presenta amplificación en la frecuencia  $f_4=59.35$ Hz correspondiente al cuarto modo de vibración libre del modelo completo de elementos finitos, que se manifiesta en la figura 7 por el cuarto pico que presenta la curva del modelo completo. Esta diferencia es de esperar ya que en el modelo reducido se incluyeron solamente los tres primeros modos de vibración del sistema libre. Se puede decir que la Figuras 7 asegura que el modelo reducido y el de elementos finitos son equivalentes en el rango de frecuencias que incluyen los tres primeros modos; al igual que lo presentado en Kar et al. (2000).

Antes de definir el sistema de control, tanto en el modelo reducido como en el modelo completo de elementos finitos, se ha incorporado un sistema masa resorte amortiguador en la posición  $X_{AMS}$  de la placa, con una frecuencia  $f_1=3.07$  Hz. La masa agregada 0.1554 Kg se eligió como 1.6 % de la masa total del sistema que es de 9.42 Kg. La rigidez del resorte se fijó en 57.88 N/m y la constante del amortiguador en 2.3 Ns/m.

En la figura 8 se presentan los desplazamientos en la posición  $X_\delta$  de la placa con el AMS en función del tiempo, ante un impulso en la misma ubicación. Se puede ver que hasta los seis primeros ciclos no hay diferencias significativas entre la respuesta del modelo reducido y la del modelo completo de elementos finitos. A partir del sexto ciclo se puede ver que la respuesta del modelo completo de elementos finitos comienza a desfasarse respecto de la respuesta del modelo reducido, mientras que la amplitud y la frecuencia de ambas respuestas permanecen sin diferencias significativas. Así mismo, se puede observar que la curva obtenida con el modelo reducido presenta oscilaciones de pequeña amplitud y alta frecuencia; mientras que en la curva obtenido del modelo completo, dichas oscilaciones no se observan. Esto se debe al amortiguamiento numérico que introduce el método HHT de integración en el tiempo (Hughes, 1987) que se adoptó para resolver el modelo completo de elementos finitos en ANSYS, en este caso con un  $\Delta t=0.0005$  s. En el modelo reducido se ha utilizado el método de diferencia central con un  $\Delta t=0.001$  s. Se considera que el modelo reducido aproxima en forma suficientemente aproximada a la respuesta del modelo completo, como para proceder a la

definición del sistema de control.

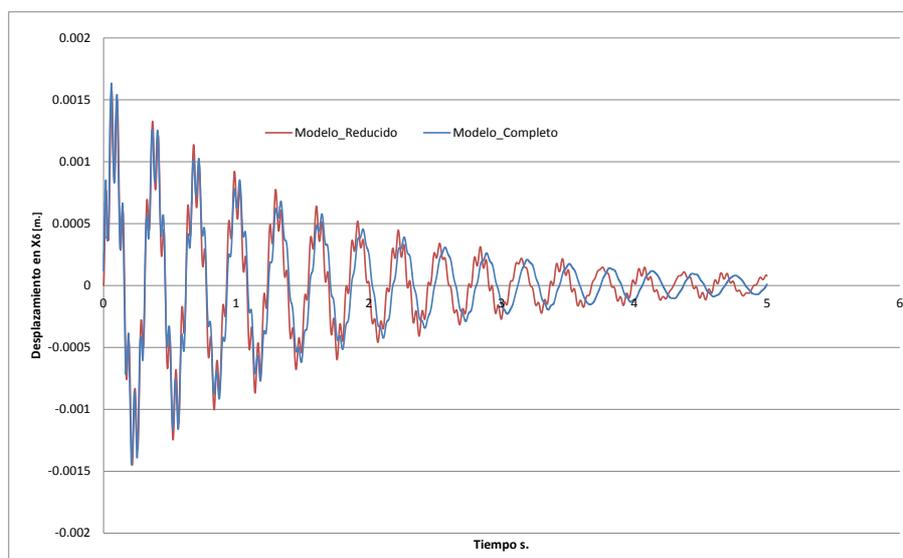


Figura 8: Desplazamiento en la posición  $X_\delta$  de la placa. Modelo con Masa-Resorte, sin control

Con el modelo reducido definido y el sistema masa resorte amortiguador incorporado es posible definir el sistema de control. A partir de las ecuaciones (36-38) se puede definir la matriz  $A_c$  del sistema reducido con control dada por la ecuación (44). Para obtener las constante  $G_M$ , se considera una posición de polos en el plano  $s$  tal que el amortiguamiento buscado sea del orden de  $\zeta_1=48\%$  para el primer modo y de  $\zeta_2=44\%$  para el segundo modo. Así usando el método de Ackermann, se obtienen las constantes  $G_M$  para el modelo reducido. Mediante la transformación expresada por las ecuaciones (50) se obtienen las constantes  $G_R$  para el modelo completo de elementos finitos. En la Tabla 4 se presentan los valores obtenidos.

| $G$                    | $g_1$ | $g_2$  | $g_3$    | $g_4$   |
|------------------------|-------|--------|----------|---------|
| <i>Modelo Reducido</i> | 750.8 | -32.8  | -1095.4  | -23.4   |
| <i>Modelo Completo</i> | -30.4 | 1249.6 | 544.2    | -23.4   |
|                        | $g_5$ | $g_6$  | $g_7$    | $g_8$   |
| <i>Modelo Completo</i> | -7985 | 178.2  | -21658.4 | -4640.6 |
| <i>Modelo Completo</i> | -20.5 | 7.4    | -5.5     | -4.6    |

Tabla 3: Constantes del Sistema de Control.

A los efectos de definir completamente el sistema de control en el espacio original es necesario medir desplazamientos y velocidades de tantos puntos como modos se consideran en la definición del modelo reducido, para que la matriz de transformación  $B$  dada en ecuación (49) sea cuadrada e tenga inversa. Dichos puntos son los mismos asumidos por Kar et al. (2000). Además de la masa  $m_R$  se consideran los denominados  $X_\delta$ ,  $X_{AMS}$  y el  $X_M$  de coordenadas  $(0, H2, B2)$ . Estos puntos están ubicados en cercanías de los nodos del cuarto modo de vibración libre de la placa y tienen desplazamientos cercanos a cero. Esto garantiza que no hay interferencia del cuarto modo en la respuesta del sistema completo ya que no resulta excitado por la acción de control; ni participa en las mediciones que definen la acción de control.

En la Figura 10 se presenta la respuesta en el dominio de la frecuencia del desplazamiento de la posición  $X_\delta$  de la Placa con AMS obtenida utilizando un intervalo de frecuencia de 0.01998Hz, ante un impulso en el mismo punto.

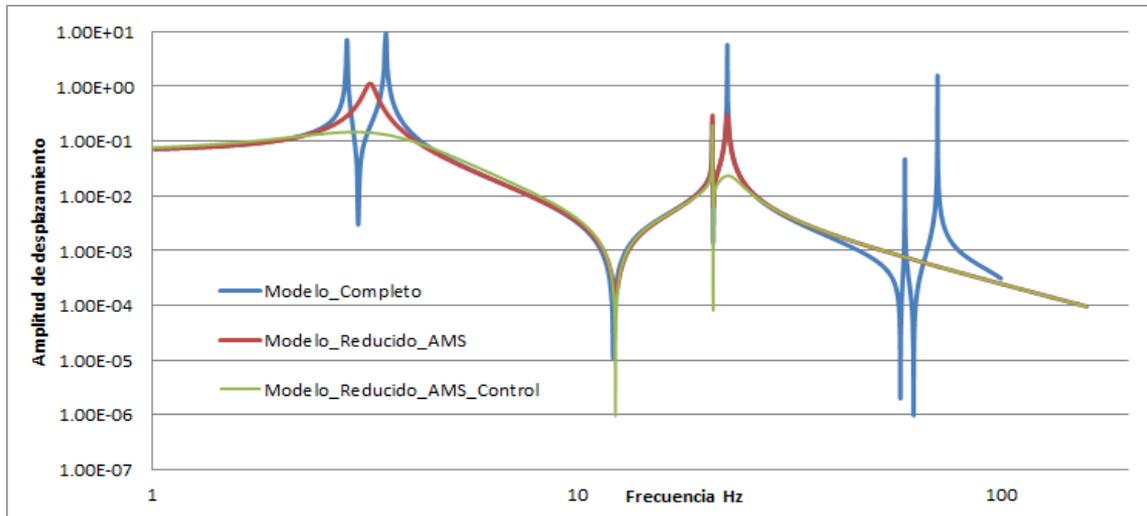


Figura 9: Desplazamiento en la posición  $X_\delta$  de la placa. Modelos con Masa-Resorte, con y sin control

Se puede observar que para la curva azul correspondiente al modelo completo se ha producido un doble pico cuando se incorpora el AMS. Las frecuencias de la placa y el AMS son  $f_1=11.13\text{Hz}$ ,  $f_2=17.6\text{Hz}$  y  $f_3=118.07\text{Hz}$ . La curva roja correspondiente al modelo reducido con AMS, no reproduce tal división de la frecuencia fundamental en dichos picos. La curva verde corresponde a la respuesta del modelo reducido con el sistema de control definido. Se puede ver claramente la efectividad del sistema de control adoptado en la reducción de la amplificación de la respuesta correspondiente a las frecuencias fundamentales de la placa. En la Figura 10 se presentan las respuestas del desplazamiento en función del tiempo en la posición  $X_\delta$  de la Placa con el sistema de control definido, ante un impulso en dicho punto, para el modelo completo de elementos finitos y para el reducido. Las respuestas de ambos modelos son similares, logrando un amortiguamiento prácticamente total al finalizar el segundo ciclo; de la misma forma que lo obtenido por Kar et al. (2000) mediante un modelo reducido y una estrategia de control distintas a las propuesta en el presente trabajo.

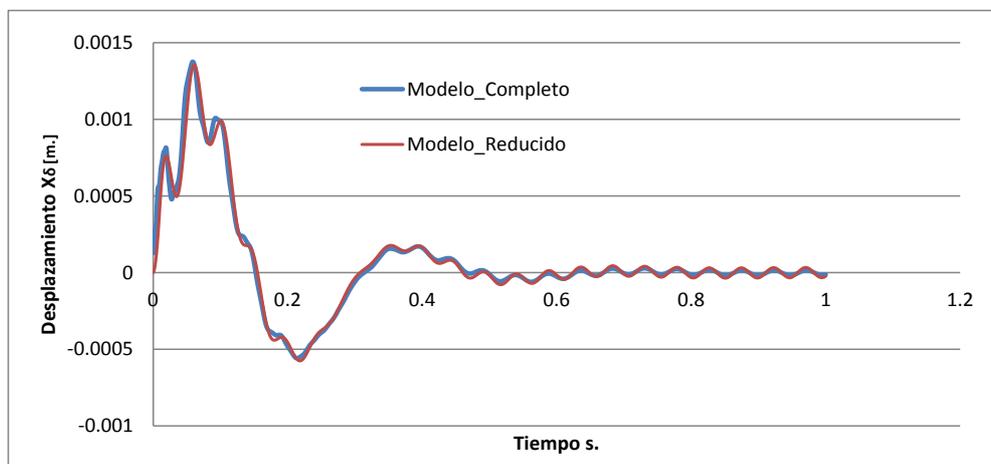


Figura 10: Desplazamiento en la posición  $X_\delta$  de la placa. Modelos con Masa-Resorte, con control

Se debe destacar que el periodo de la respuesta que se puede apreciar en la Figura 11 es inferior al presentado por Kar et al. (2000) y es probable que las fuerzas desarrolladas en el sistema de control sean también distintas; siendo en este trabajo posiblemente mayores. No es posible compararlas ya que no están presentadas en Kar et al. (2000). De la Figura 11 es posible estimar el orden del amortiguamiento logrado con la incorporación del sistema masa resorte sintonizado y el sistema de control en el sistema completo de elementos finitos. Considerando los dos primeros picos de la respuesta y una aproximación de mínimos cuadrados con una función exponencial de la forma  $e^{-\zeta\omega t}$  se puede inferir que el amortiguamiento logrado es del orden de 30%, mientras que en la asignación de polos de la matriz  $A_c$ , se planteó un amortiguamiento de  $\zeta_1 = 48\%$  para el primer modo y de  $\zeta_2 = 44\%$  para el segundo modo.

La metodología propuesta para encontrar el modelo reducido y definir el sistema de control por retroalimentación de estado mediante la asignación de polos resulta así satisfactoria. Es de interés comprobar la eficiencia del sistema de control asociado al amortiguador de masa sintonizado, cuando a la estructura considerada se la somete una excitación de desplazamientos en la base correspondiente al registro de desplazamientos del sismo de Mendoza del 85'.

En la Figura 12 se presenta el desplazamiento del punto  $X_\delta$  de los tres modelos completos de elementos finitos. La curva azul corresponde a la placa sin AMS ni sistema de control; mientras que la roja es la de la placa con AMS. La curva verde es la correspondiente a la placa con el AMS, y el sistema de control definido previamente, vale decir para una carga tipo impulso. Los tres modelos se desarrollaron en Ansys y se resolvieron con el método HHT y un intervalo de tiempo  $\Delta t = 0.0001$  s.

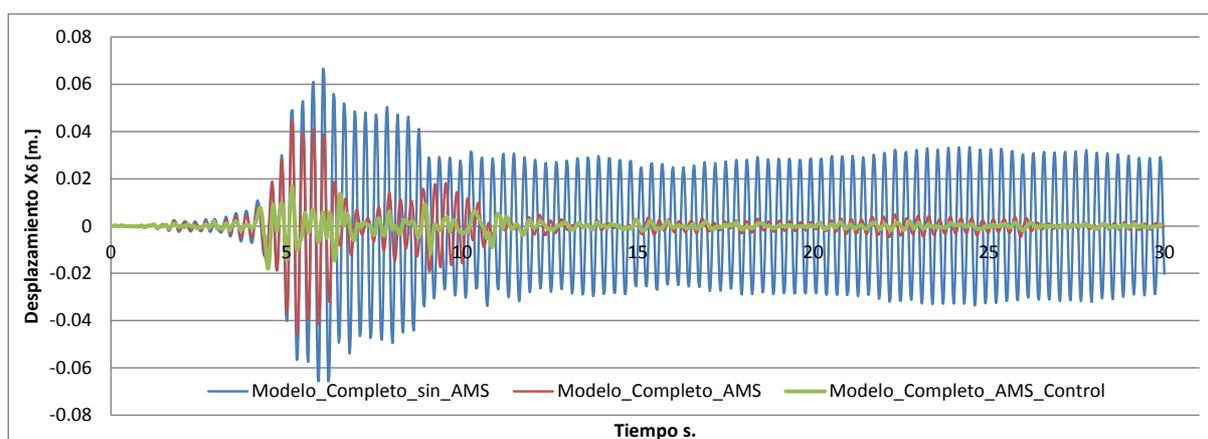


Figura 11: Desplazamiento en la posición  $X_\delta$  de la placa ante acción sísmica.

De comparar en la figura 12 la respuesta del modelo de la placa sola y la placa con AMS se puede apreciar que la incorporación del AMS es efectiva en la reducción de la amplitud de las oscilaciones, principalmente luego de 12 segundos, ya que existe una reducción en la amplitud del orden de diez veces en ese periodo. Esta reducción no es tan marcada antes de dicho tiempo, donde se puede observar el fenómeno de beating y se alcanza una reducción del orden de 35%, comparando el pico máximo de la respuesta de ambos modelos. Se puede afirmar que el AMS no reduce las vibraciones inmediatamente, sino que demora un cierto tiempo en lograr eficientemente su objetivo, tal como lo ya señalado por Ambrosini y colaboradores (Montanaro et al. 1999, Bassotti y Ambrosini, 2004, 2007). Al considerar la curva verde

correspondiente a la respuesta de la placa con el AMS y el sistema de control, se observa que la reducción de vibraciones se produce desde los cuatro segundos, instante de tiempo cercano al inicio de las amplitudes de vibraciones significativas. Con el AMS y el sistema de control se logran altas reducciones de vibraciones en todo el rango de tiempo que dura el análisis. Particularmente, antes de los 12 segundos, se pueden observar reducciones del orden del 75% cuando se compara la respuesta pico de la placa sola con el pico de la respuesta de la placa con AMS y sistema de control.

Teniendo en cuenta estos resultados es posible asegurar que la respuesta del sistema con AMS y sistema de control ante la excitación sísmica, es muy efectiva tanto en lo que respecta a reducir la amplitud de las oscilaciones; como también, en la velocidad en que el sistema responde para lograrlo y mantenerlas en un bajo nivel.

## 5 CONCLUSIONES

Se ha presentado una metodología para diseñar un sistema híbrido de control de estructuras modeladas con el método de elementos finitos, que combina amortiguadores de masa sintonizados y control activo mediante retroalimentación en el espacio de estado.

A partir de la formulación variacional del principio de Hamilton se acopla a las ecuaciones de equilibrio de un sistema estructural modelado con el método de elementos finitos, la contribución que aporta la incorporación de AMS y de sistemas de control activos. Mediante la condición de estacionario del funcional de Hamilton del sistema completo se obtienen las ecuaciones de equilibrio del modelo de elementos finitos ampliado con el AMS y el sistema de control.

El diseño del sistema de control se realiza en el espacio modal reducido de un sistema dinámicamente similar al modelo completo de elementos finitos. Para definir este modelo reducido se consideran sólo unos pocos modos de vibración libre del modelo original de elementos finitos. Se utiliza una estrategia de control de retroalimentación de todas las variables del estado modal reducido, y se determinan las ganancias mediante la asignación de polos y el método de Ackermann. Para transformar esas ganancias al modelo original de elementos finitos se eligen puntos donde medir tantas variables de estado como ganancias se debe convertir, y se plantea una transformación. Se han presentado las condiciones que debe cumplir el sistema reducido en lo referente a controlabilidad, y su relación con los puntos a medir en el sistema completo.

La metodología planteada es apropiada para incorporar AMS y sistemas de control en modelos tradicionales de elementos finitos. Particularmente, en este trabajo se utilizó el programa ANSYS, donde se programaron las acciones de control mediante APDL.

Se han analizado dos casos de interés sometidos a la acción de un impulso, que están tratados en la literatura. Se trata de una torre modelada con elementos tipo viga, y de una placa rectangular. En el caso de la torre se consideró la reducción de vibraciones de flexión restringidas a un plano. Se han presentado con detalle las distintas etapas de la metodología propuesta. Para ambas estructuras, los resultados obtenidos son similares a los existentes en la literatura, donde se han aplicado otras metodologías.

En el caso de la torre se logró una gran equivalencia entre el modelo reducido y el modelo completo de elementos finitos; medida tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia. En el caso de la placa rectangular dicha equivalencia no es tan notable, pero si lo suficientemente adecuada para conseguir una gran eficiencia en la reducción de vibraciones en el modelo completo de elementos finitos. Esa eficiencia se puso de manifiesto al controlar las vibraciones producidas en la placa, no sólo al imponerle un impulso en el extremo libre, sino

también ante una acción sísmica en la base.

En todos los casos analizados se logró el mismo orden de amortiguamiento en el sistema completo de elementos finitos, que el amortiguamiento propuesto en la asignación de polos del sistema reducido. No se presentó necesidad alguna de incorporar modos de vibración de mayores frecuencias al definir el modelo reducido.

La metodología propuesta se considera satisfactoria y mayor atención se debe poner en la búsqueda de criterios para definir sistemáticamente el modelo reducido. También es necesario analizar el comportamiento del sistema de control definido ante otras solicitaciones y alteraciones de los parámetros del sistema estructural original.

## REFERENCIAS

- Ansys, “Ansys help system/mechanical APDL/Element reference/element library”, ANSYS, Inc, 2009.
- Abiru, H., Fujishiro, M., Matsumoto, T., Yamazaki, S. y Nagata, N., Tuned active mass damper installed in the Round Mark Tower. *Proceedings of the 1<sup>st</sup> International Conference on Motion and Vibration Control*, 110-152. 1992.
- Ambrosini, D., Cuitiño, G. y Rebecco, J., Eficiencia de amortiguadores de masa sintonizados en estructuras sismorresistentes, *Mecánica Computacional*, 23:447-462, 2004.
- Ascheri, J.P, Rubinstein, M., Möller, O., Optimización de dispositivos de control pasivo a partir de un modelo de control activo predictivo, *Mecánica Computacional*, 29:185-201, 2010.
- Ascheri, J.P, Rubinstein, M., Möller, O., Diseño de sistemas sismorresistentes de control pasivo utilizando estrategias de control activo predictivo, *Mecánica Computacional*, 26:2283-2300, 2007.
- Ascheri, J.P, Rubinstein, M., Möller, O., Diseño matemático de disipadores de energía sísmica utilizando estrategias de control activo predictivo, *Mecánica Computacional*, 25:2163-2178, 2006.
- Balachandran, B., Magreb, E.B., *Vibraciones*, Thomson Learning, 2006.
- Bassotti, R. y Ambrosini, D. Influencia de amortiguadores de masa sintonizados en la disminución de efectos torsionales de estructuras sismorresistentes, *Mecánica Computacional*, 23:481-497, 2004.
- Bassotti, R. y Ambrosini, D. Sobre la utilización de amortiguadores de masa sintonizada en la Provincia de Mendoza, *Mecánica Computacional*, 26:2321-2340, 2007.
- Chang, J.C.H. y Soon, T.T., Structural control using active tuned mass damper, *J. Eng. Mech., ASCE*, 106:1091-1098, 1980
- Clough, R.W. y Penzien, J., *Dynamics of Structures*, Computers & Structures, Inc., 2003.
- Curadelli, O., Amani, M., Estudio comparativo de estrategias de control para dispositivos semi activos de control de vibraciones, *Mecánica Computacional*, 31:2255-2264, 2012.
- Dorf, R.C., Bishop, R.H., *Modern Control Systems*, Prentice Hall, 2001.
- Garrido, H., Curadelli, O., Ambrosini, D., Estudio paramétrico sobre la efectividad y la adaptabilidad del amortiguador sintonizado de masa semiactivo, *Mecánica Computacional*, 31:2349-2367, 2012.
- Gawronski, W.K., *Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures*. Springer Verlag, 2004.
- Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice Hall, 1987.
- Kar, I.N., Miyakura, T. y Seto, K., Bending and torsional vibration control of a flexible plate

- structure using H-based robust control law, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 8, 3, 545-563, 2000.
- Kobori, T. et al., Study on active mass driver (AMD) system – active seismic response controlled structure, *4th World Congress of Council on Tall Buildings and Urban Habitat*, Hong Kong, November 1990.
- Koike, Y. y Tanida, K., Application of V shaped hybrid mass damper to high rise buildings and verification of damper performance. *Proceedings of Structural Engineering World Congress*. CD-ROM, T198-194. San Francisco, EEUU, 1998.
- Korkmaz, S. A review of active structural control: challenges for engineering informatics, *Computers and Structures*, 89:2113–2132, 2011.
- Matsumoto, T. et al., Study on powered passive mass damper for high rise building, *Proceedings of AIJ Annual Meeting*, (in Japanese), October, 1990.
- Montanaro, M.I., Ambrosini, D., Danesi, R.F., Análisis computacional de sistemas de control pasivo de vibraciones, *Mecánica Computacional*, 19, 8, 1999.
- Preumont, A. y Seto, K., *Active Control of Structures*, John Wiley & Sons, 2008.
- Seto, K., y Mitsuta, S., A new method for making a reduce order model of flexible structure using unobservability and uncontrollability and its application in vibration control. *Proceedings of 1<sup>st</sup> International Conference on Motion and Vibration Control*, 153–158, 1992.
- Seto, K., y Mitsuta, S., A new method for making a reduce order model of flexible structure using unobservability and uncontrollability and its application in vibration control. *Japanese Society of Mechanical Engineering International Journal*, Serie C, Vol.37. N°3, 444-449, 1994.
- Seto, K., Kondo, S., Ezurre, K., Vibration control method for flexible structure with distributed parameters using a hybrid dynamic absorber, *ASME 1995 Design Engineering Technica Conference*, DE-Vol.83-3, 1995.
- Soong, T.T. y Constantinou, M.C., *Passive and Active Structural Vibration Control in Civil Engineering*, Springer Verlag, 1994.
- Yao, J.T.P., Concept of structural control, *ASCE Journal of Structural Division*, 99:1567-1574, 1972.
- Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L., *The Finite Element Method*, Mc Graw Hill, 1991.