

## RESPUESTA ESTÁTICA Y DINÁMICA EN PLACAS CONFORMADAS POR MATERIALES COMPOSITE

Ciancio, Patricia M.<sup>a</sup>, Rossit, Carlos A.<sup>b</sup>, Bambill, Diana V.<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As (UNCPBA), Facultad de Ingeniería,  
Departamento de Ingeniería Civil, Área Estructuras,  
Avda. del Valle 5737, 7400 Olavarría, Argentina, [pciancio@fio.unicen.edu.ar](mailto:pciancio@fio.unicen.edu.ar),  
<http://www.fio.unicen.edu.ar>*

<sup>b</sup> *Universidad Nacional del Sur (UNS), Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada,  
(IMA), Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET),  
Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, [carossit@criba.edu.ar](mailto:carossit@criba.edu.ar), [dbambill@criba.edu.ar](mailto:dbambill@criba.edu.ar),  
<http://www.uns.edu.ar>*

**Palabras clave:** respuesta dinámica, vibraciones forzadas, placas de materiales composite, dinámica de placas.

**Resumen.** La utilización de materiales livianos en tipologías estructurales tales como las placas delgadas rectangulares, ha creado la necesidad de conocer su comportamiento cuando las restricciones para su sustentación son mixtas y cuando el escenario de su desempeño requiere considerar acciones de naturaleza dinámica sobre su dominio.

En el presente trabajo se analizan los desplazamientos y esfuerzos dinámicos de placas rectangulares con diferentes relaciones entre sus lados, con condiciones de apoyo que surgen de una combinación de las clásicas condiciones de borde. Los materiales constitutivos son no tradicionales y se diseñan de modo que el peso de la placa es la variable que condiciona una performance apropiada frente a requisitos predefinidos. Entre ellos se consideran fibras de vidrio y de grafito en matriz polimérica con determinada orientación de las fibras. Diferentes cargas dinámicas actúan sobre la totalidad y en una región del dominio analizado.

Como casos particulares de los casos dinámicos que se estudian y que en general no aparecen en la literatura, se determinan los desplazamientos y esfuerzos estáticos de dichas placas.

Se utiliza una metodología variacional como el método de Ritz utilizando como funciones aproximantes a una serie truncada de funciones viga.

## 1 INTRODUCCIÓN

Hay numerosas situaciones tecnológicas en que los metales puros no tienen aplicación útil, [Mahamood et al., 2012](#). Por ejemplo una cierta aplicación puede requerir que el material empleado tenga dureza y a la vez ductilidad, sin embargo no es conocido un material de esas características en la naturaleza. Para solucionar el problema, se han combinado dos metales o un metal con un material no metálico. Cuando esa combinación se efectúa con los materiales fundidos, se denomina aleación (recientemente renombrada como aleación convencional).

Un ejemplo de notable trascendencia histórica lo constituyó la aleación entre cobre y estaño para generar el bronce. Tan es así que ha dado lugar a la denominada “Edad de Bronce” en el cuarto milenio A.C.

Desde entonces, el hombre ha experimentado con distintas aleaciones con el objetivo de mejorar las propiedades de los materiales, encontrándose el procedimiento limitado a que un material se pueda disolver en otro en razón de las exigencias de equilibrio termodinámico. Así surgieron a lo largo del tiempo, distintas metodologías para combinar favorablemente materiales de propiedades complementarias.

En la actualidad resultan de suma aplicación los materiales compuestos (composite materials) que constituyen una clase de material avanzado, formado por dos o más materiales combinados en estado sólido con propiedades físicas y químicas distintas a los materiales parentales individuales y también, en general, más ligeros en peso.

Aunque existe una gran variedad de materiales compuestos, en todos ellos pueden distinguirse las siguientes componentes: la *matriz*, componente que se presenta en fase continua actuando como ligante y el *refuerzo*, en fase discontinua que es el elemento resistente. La matriz es la responsable de las propiedades físicas y químicas, transmite los esfuerzos al refuerzo, lo protege y da cohesión al material.

Son muchas las combinaciones de distintos tipos de materiales posibles, pero las más utilizadas en la actualidad son los refuerzos constituidos por fibras de materiales muy resistentes en una matriz cerámica. En muchos casos esas fibras están orientadas según requerimientos de diseño.

Estos materiales siguen comportamientos constitutivos caracterizados por materiales ortótropos o anisótropos en el caso más general.

En el presente trabajo se analiza la vibración forzada de placas rectangulares delgadas constituidas por dos materiales compuestos: Grafito (As)-Epoxy y E-Glass-Epoxy, con las fibras orientadas a  $45^\circ$  con respecto a la dirección coordenada  $x$ .

Se trata de materiales con dos direcciones elásticas principales, pero de acuerdo con su disposición en la estructura tienen comportamiento global anisótropo.

La información disponible sobre vibraciones forzadas de placas no isotrópicas es muy limitada. Pueden mencionarse, además de los trabajos de los autores ([Ciancio et al., 2008](#), [2010](#), [Rossit et al. 2008](#)), los trabajos de [Laura et al. 1999](#), de [Gupta y Ansari, 2000](#) y de [Romanelli y Laura, 2001](#).

Como es sabido, el sistema diferencial que gobierna el problema de la placa vibrante de material anisótropo, es de enorme complejidad analítica, aunque se trate de un dominio geoméricamente simple, como es el de una placa rectangular. Es por ello, que para su tratamiento se recurre a la utilización de métodos aproximados.

En el presente trabajo se utiliza el método variacional de Ritz que es uno de los más utilizados por los investigadores en el estudio de placas anisótropas. Como aproximación de la deformada se toma una sumatoria truncada de “funciones viga” que satisfacen idénticamente

las condiciones esenciales pero no las condiciones naturales de borde lo que es lícito al hacer uso del método de Ritz.

Se analiza la respuesta dinámica transversal en placas rectangulares anisótropas delgadas de lados  $a$  y  $b$  en las direcciones coordenadas y con espesor constante; bajo las cargas excitadoras actuantes del tipo  $p_0 \cos \omega t$ , que se detallan:

a) Carga distribuida uniformemente sobre el dominio total de la placa (Figura 1-a)

b) Carga distribuida uniformemente sobre una región rectangular de igual relación de aspecto que la de la placa (Figura 1-b)

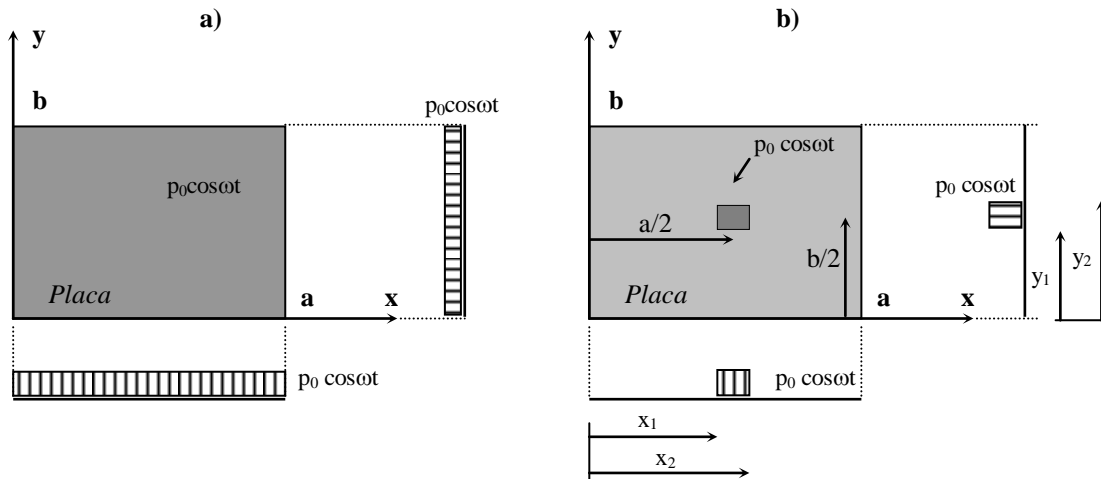


Figura 1. Placas anisótropas bajo carga: a) distribuida total, b) distribuida parcial

## 2 SOLUCIÓN ANALÍTICA APROXIMADA

Utilizando la clásica notación de Lekhnitskii, 1968 y en el caso de vibraciones forzadas el problema de una placa de anisotropía generalizada está gobernado por el siguiente funcional expresado en coordenadas adimensionales  $\bar{x} = x/a$ ,  $\bar{y} = y/b$ :

$$\begin{aligned}
 J[W_a] = & \frac{D_{11} a b}{2 a^4} \left\{ \iint_A \left[ \left( \frac{\partial^2 W_a}{\partial \bar{x}^2} \right)^2 + \frac{2 D_{12}}{D_{11}} (\lambda)^2 \cdot \frac{\partial^2 W_a}{\partial \bar{x}^2} \cdot \frac{\partial^2 W_a}{\partial \bar{y}^2} + \frac{D_{22}}{D_{11}} (\lambda)^4 \cdot \left( \frac{\partial^2 W_a}{\partial \bar{y}^2} \right)^2 + 4 D_{66} (\lambda)^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 W_a}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + 4 \lambda \cdot \frac{D_{16}}{D_{11}} \cdot \frac{\partial^2 W_a}{\partial \bar{x}^2} \cdot \frac{\partial^2 W_a}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + 4 (\lambda)^3 \frac{D_{26}}{D_{11}} \cdot \frac{\partial^2 W_a}{\partial \bar{y}^2} \cdot \frac{\partial^2 W_a}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right] d \bar{x} d \bar{y} - \frac{\rho_A h_A \omega^2 a^4}{D_{11}} \iint_A W_a^2 d \bar{x} d \bar{y} - 2 \frac{a^4}{D_{11} A_p} \iint_{A_p} p_0 W_a d \bar{x} d \bar{y} \right\} \quad (1)
 \end{aligned}$$

donde,  $W_a$  es la amplitud de desplazamiento aproximada en coordenadas adimensionales, que debe cumplir las condiciones de borde esenciales;  $A$  es el área total de la superficie de la placa anisótropa, y  $A_p$  es el dominio donde actúa la carga.

$D_{ij}$  representa los coeficientes de rigidez:  $D_{11}$  y  $D_{22}$  son las rigideces flexionales alrededor de los ejes  $\bar{y}$  y  $\bar{x}$  respectivamente;  $D_{66}$  es la rigidez torsional;  $D_{16}$  y  $D_{26}$  son rigideces adicionales. La relación entre lados de la placa  $a/b$  está representada por  $\lambda$ ; por otro lado  $\rho$ ,  $h$  son la densidad y el espesor de la placa respectivamente. La frecuencia circular a la que vibra el sistema está representada por  $\omega$ . De acuerdo a los casos de carga que se analizan  $p_0$  es la magnitud de la carga excitadora armónica. En el anteúltimo término de la Ec. (1) el factor  $\rho_A h_A \omega^2 a^4 / D_{11}$ , representa el cuadrado del coeficiente de frecuencias:  $\Omega^2$ ; por lo que resulta:

$$\Omega = \sqrt{\rho_A \cdot h_A / D_{11}} \omega \cdot a^2.$$

Como aproximación de la deflexión se han tomado series truncadas de funciones viga:

$$W_a(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N b_{mn} X_m(\bar{x}) Y_n(\bar{y}) \quad (2)$$

donde  $X_m(\bar{x})$  y  $Y_n(\bar{y})$  son respectivamente las formas modales de vibración natural de una viga Bernoulli – Euler con equivalentes condiciones de borde en sus extremos, que en los bordes opuestos de la placa en estudio según cada dirección coordenada.

Cuando la configuración de la placa conduce a modelos de vigas inestables, deben adicionarse los desplazamientos de cuerpo rígido. Por ejemplo, en el caso de la placa cantilever E-L-L-L, para la viga libre las dos primeras funciones características en (2) corresponden a traslación y rotación rígidos, [Ciancio et al., 2007](#).

Reemplazando (2) en (1) y aplicando la condición de minimización de Ritz:  $\frac{\partial J(W_a)}{\partial b_{mn}} = 0$  se obtiene un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo en las constantes  $b_{mn}$ .

Determinados los coeficientes  $b_{mn}$ , pueden calcularse valores aproximados de la amplitud adimensional de los desplazamientos:

$$\frac{W_A}{p_0 a^4} = \frac{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N b_{mn} X_m(\bar{x}) Y_n(\bar{y})}{D_{11}} \quad (3)$$

y a partir de ellos la de los momentos flectores:

$$\frac{Mx_A}{p_0 a^2} = - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{b_{mn}}{P_0} \left[ Y_n(\bar{y}) \cdot \frac{d^2 X_m(\bar{x})}{d\bar{x}^2} + \frac{D_{12}}{D_{11}} \lambda^2 X_m(\bar{x}) \cdot \frac{d^2 Y_n(\bar{y})}{d\bar{y}^2} + 2 \cdot \frac{D_{16}}{D_{11}} \lambda \frac{dX_m(\bar{x})}{d\bar{x}} \frac{dY_n(\bar{y})}{d\bar{y}} \right] \quad (4)$$

$$\frac{My_A}{p_0 a^2} = - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{b_{mn}}{P_0} \left[ \frac{D_{12}}{D_{11}} Y_n(\bar{y}) \cdot \frac{d^2 X_m(\bar{x})}{d\bar{x}^2} + \frac{D_{22}}{D_{11}} \lambda^2 X_m(\bar{x}) \cdot \frac{d^2 Y_n(\bar{y})}{d\bar{y}^2} + 2 \cdot \frac{D_{26}}{D_{11}} \lambda \frac{dX_m(\bar{x})}{d\bar{x}} \frac{dY_n(\bar{y})}{d\bar{y}} \right] \quad (5)$$

No se incluyen en los desarrollos los efectos de: amortiguamiento, deformación por corte e inercia rotatoria.

## 2.1 Cálculo de las rigideces equivalentes de una placa de material compuesto ortótropo

El funcional (1) puede ser convenientemente aplicado al caso de un material compuesto de comportamiento ortótropo cuando sus direcciones principales no coinciden con las direcciones coordenadas adecuadas para el problema en estudio.

En ese caso, siguiendo la formulación sugerida por [Lekhnitskii, 1968](#) las rigideces  $D_{ij}$  de la placa anisótropa, son magnitudes que se obtienen de las rigideces principales del material y de la orientación de sus fibras respecto de las direcciones de los ejes coordenados elegidos, pues al cambiar de un sistema de coordenadas a otro, los  $D_{ij}$  varían.

Tal es el caso de un material compuesto ortótropo, cuyas rigideces principales son  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  y  $D_k$ , al considerar un sistema de coordenadas  $x$  y, donde la dirección principal elástica 1 del material ortótropo está rotada un ángulo cualquiera  $\varphi$  con respecto a  $x$ ; las rigideces flexionales  $D_{11}$ ,  $D_{22}$ , la rigidez torsional  $D_{66}$  y la rigidez  $D_{12}$  se calculan con las expresiones:

$$\begin{aligned} D_{11} &= D_1 \cos^4 \varphi + 2D_3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + D_2 \sin^4 \varphi \\ D_{22} &= D_1 \sin^4 \varphi + 2D_3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + D_2 \cos^4 \varphi \\ D_{66} &= D_k + (D_1 + D_2 - 2D_3) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ D_{12} &= D_2 \nu_{12} + (D_1 + D_2 - 2D_3) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (6)$$

Las rigideces auxiliares,  $D_{16}$  y  $D_{26}$ , que son nulas en el sistema coordinado de las direcciones elásticas principales, en este sistema son:

$$\begin{aligned} D_{16} &= \frac{1}{2}(D_2 \sin^2 \varphi - D_1 \cos^2 \varphi + D_3 \cos 2\varphi) \sin 2\varphi \\ D_{26} &= \frac{1}{2}(D_2 \cos^2 \varphi - D_1 \sin^2 \varphi - D_3 \cos 2\varphi) \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (7)$$

Las propiedades mecánicas y la densidad de los compuestos se obtienen a partir de las expresiones dadas por Tsai, 1964, tal como se determinaran en un trabajo previo, Ciancio et al, 2010.

Con ellos obtenemos:

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}, \quad D_k = \frac{G h^3}{12}, \quad D_3 = D_1 \nu_2 + 2D_k \quad (8)$$

En las expresiones (8)  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G$ ,  $\nu_1$  y  $\nu_2$  son: los módulos elásticos, el módulo de corte y los coeficientes de Poisson de los materiales utilizados en las direcciones principales de elasticidad, respectivamente.

Al reemplazar estas rigideces en las expresiones (6) y (7), se obtienen las rigideces a considerar en el funcional (1).

### 3 RESULTADOS OBTENIDOS

Se incluyen dos tipos de materiales para algunas de las condiciones de sustentación, que presentan diferentes características de anisotropía, para distintas relaciones entre los lados de la placa; a efectos de mostrar el comportamiento dinámico y estático ante una variación de las propiedades constitutivas.

Se destaca que no se conocen soluciones analíticas exactas para los casos que se estudian.

En la Tabla 1 se indican los valores de densidad y propiedades elásticas con respecto a las direcciones principales de los materiales considerados en el estudio. En dichos materiales se

consideró una relación del volumen de fibra al volumen de matriz de 0.6, y asimismo una orientación de las fibras de 45 grados con respecto al eje coordenado x de la placa.

Material	$\rho_{\text{compuesto}}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$E_1$ [GPa]	$E_2$ [GPa]	$G_{12}=G$ [GPa]	$\nu_{12}=\nu_1$	$\nu_{21}=\nu_2$
Grafito-Epoxy (AS)	1381,25	86,19	5,55	2,83	0,27439	0,01766
Eglass-Epoxy	1643,75	28,81	5,44	2,69	0,27471	0,05186

Tabla 1. Propiedades elásticas de los materiales considerados

### 3.1 Verificación de la aproximación

La mayoría de los casos que se tratan en la literatura se refieren a placas isótropas con cargas estáticas y distintas condiciones de borde. Cuando se tratan placas anisótropas sometidas a cargas dinámicas en general la condición de borde es simplemente apoyada.

A los fines de comparar los resultados obtenidos a través de la metodología variacional utilizada en este trabajo, se determinan para placas simplemente apoyadas las amplitudes de las deflexiones transversales adimensionales y las amplitudes de los momentos flectores adimensionales para el caso isótropo ( $\nu=0,3$ ), [Tabla 2](#).

Las amplitudes de desplazamientos adimensionales dinámicos calculadas en el caso anisótropo, aparecen en la [Tabla 3](#). En este caso las relaciones de rigideces del material genérico son las utilizadas por los autores de la referencia [Laura et.al., 1999](#);  $D_{12}/D_{11} = 0.3$ ,  $D_{22}/D_{11} = D_{66}/D_{11} = 0.5$ ,  $D_{16}/D_{11} = D_{26}/D_{11} = 1/3$ .

$\lambda$	Resultados obtenidos	$W_1/(p_0 a^4/D)$	$M_{x1}/p_0 a^2$	$M_{y1}/p_0 a^2$
1/2	En este trabajo	0.01014	0.1018	0.0464
	<a href="#">Timoshenko, et.al, 1970</a>	0.01013	0.1017	0.0464
2/3	En este trabajo	0.00772	0.0812	0.0498
	<a href="#">Timoshenko, et.al, 1970</a>	0.00772	0.0812	0.0498
1	En este trabajo	0.00407	0.0479	0.0479
	<a href="#">Timoshenko, et.al, 1970</a>	0.00406	0.0479	0.0479

Tabla 2. Amplitudes adimensionales de desplazamientos y momentos flectores en el centro de placas isótropas simplemente apoyadas bajo carga estática uniformemente repartida ( $\nu= 0.3$ )

El coeficiente de frecuencias de las cargas excitadoras  $\Omega$  se da en relación al coeficiente de frecuencia fundamental de las vibraciones libres  $\Omega_1$  que corresponde al sistema estructural que se analiza. Se consideran distintas magnitudes para la relación  $\Omega/\Omega_1$ . Se incluyen en los análisis mencionados los casos de carga estática ( $\Omega/\Omega_1=0$ ) como una situación particular del caso dinámico.

Se observa una concordancia satisfactoria, los valores tienen una diferencia que llega sólo al 0.1 % cuando  $\lambda=2/3$  y  $\Omega/\Omega_1=0.5$ .

$\lambda$	$\frac{\Omega}{\Omega_1}$	Laura et.al, 1999	Presente trabajo
		Coef. frec.p / vibrac.libres: $\Omega_1=13.8667$	Coef. frec.p / vibrac.libres: $\Omega_1=13.8666$
	0.1	0.0081300	0.0081382
2/3	0.5	0.0108459	0.0108568
	0.9	0.0440044	0.0440388
		Coef. frec.p / vibrac.libres: $\Omega_1=18.2417$	Coef. frec.p / vibrac.libres: $\Omega_1=18.2409$
	0.1	0.0047747	0.0047796
1	0.5	0.0063515	0.0063580
	0.9	0.0255519	0.0255773
		Coef. frec.p / vibrac.libres: $\Omega_1=27.2446$	Coef. frec.p / vibrac.libres: $\Omega_1=27.2441$
	0.1	0.0021480	0.0021502
3/2	0.5	0.0028577	0.0028606
	0.9	0.0115020	0.0115108

Tabla 3. Amplitudes de desplazamientos adimensionales en el centro de placas anisótropas simplemente apoyadas bajo cargas dinámicas distribuidas en forma uniforme en toda la placa

### 3.2 Resultados para placas anisótropas

Debido a la cantidad y variabilidad de parámetros involucrados en el problema propuesto, se analizan solamente algunos casos representativos para demostrar la conveniencia del procedimiento.

En todos los casos se ha tomado en (2),  $M=N=20$ , con lo que la función aproximante posee 400 términos.

#### Caso 1) Placa empotrada bajo carga distribuida uniformemente en todo el dominio, de grafito AS epoxy, y con distintas relaciones de lados.

Se muestra en la Figura 2 los resultados obtenidos para la placa graficada en la Figura 1 a). En ella se indica la deformada correspondiente al caso en que la relación  $\Omega/\Omega_1=0$  como caso particular de la carga excitadora (carga estática).

En la Tabla 4 se muestran los resultados obtenidos cuando la acción es dinámica y con una frecuencia excitadora igual a 0.1 y 0.95 de la frecuencia fundamental de la placa, respectivamente. Del análisis de los resultados se observa un comportamiento que presenta simetría central en todos los casos, con la esperada diferencia entre las magnitudes de los valores obtenidos entre el caso estático y los dinámicos considerados. Sobre este aspecto se destaca que el orden de magnitud de los valores coincide entre el caso estático y el dinámico que presenta una relación de frecuencias  $\Omega/\Omega_1=0.1$  y cuando la placa es cuadrada. No sucede lo mismo con los resultados dinámicos que corresponden a  $\Omega/\Omega_1=0.95$ , en este caso los resultados presentan un orden de magnitud mayor comparados con los anteriores. Es de destacar que los desplazamientos adimensionales mayores se presentan en el centro de la placa, mostrando la preponderancia de la simetría de la carga y de vínculos frente a las propiedades anisotrópicas del material constitutivo.



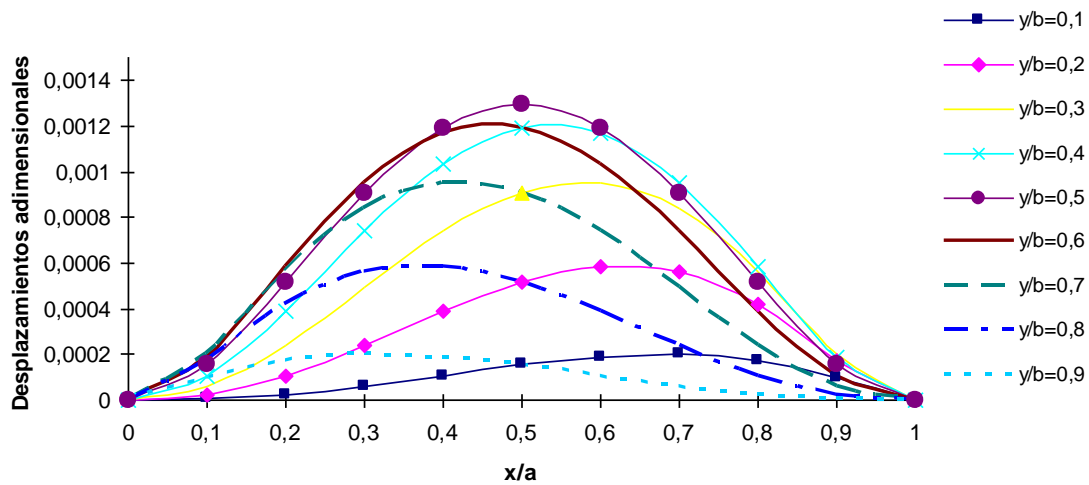


Figura 2. Deformada de una placa cuadrada empotrada de material grafito AS epoxy, carga total distribuida uniforme

$\lambda$	$x/a$	$\Omega/\Omega_1=0.1$									
		$y/b$									
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
1	0.1	0,00000494	0,00002380	0,00006060	0,00010802	0,00015589	0,00018900	0,00020192	0,00017446	0,00009469	
	0.2	0,00002375	0,00010690	0,00024233	0,00039415	0,00052146	0,00058898	0,00056522	0,00042518	0,00017446	
	0.3	0,00006059	0,00024233	0,00049701	0,00074630	0,00091865	0,00096272	0,00084580	0,00056522	0,00020192	
	0.4	0,00010801	0,00039415	0,00074629	0,00104543	0,00120547	0,00118185	0,00096272	0,00058898	0,00018946	
	0.5	0,00015589	0,00052147	0,00091865	0,00120547	0,00130789	0,00120547	0,00091866	0,00052147	0,00015589	
	0.6	0,00018945	0,00058898	0,00096271	0,00118185	0,00120547	0,00104543	0,00074630	0,00039415	0,00010802	
	0.7	0,00020191	0,00056522	0,00084580	0,00096272	0,00091865	0,00074630	0,00049701	0,00024233	0,00006059	
	0.8	0,00017445	0,00042518	0,00056521	0,00058898	0,00052146	0,00039415	0,00024233	0,00010690	0,00002376	
	0.9	0,00009465	0,00017446	0,00020191	0,00018946	0,00015589	0,00010802	0,00006059	0,00002376	0,00000494	
1	$x/a$	$\Omega/\Omega_1=0.95$									
		$y/b$									
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
		0.1	0	0,00001173	0,00022266	0,00066192	0,00122989	0,00170544	0,00191954	0,00165910	0,00086530
		0.2	0,00001170	0,00038889	0,00149071	0,00313313	0,00477853	0,00579794	0,00567761	0,00419664	0,00165910
		0.3	0,00022260	0,00149071	0,00396366	0,00690389	0,00923544	0,01002570	0,00877664	0,00567761	0,00191954
		0.4	0,00066192	0,00313313	0,00690389	0,01058940	0,01278490	0,01263500	0,01002570	0,00579794	0,00170544
		0.5	0,00122989	0,00477853	0,00923544	0,01278490	0,01411560	0,01278490	0,00923544	0,00477853	0,00122989
		0.6	0,00170544	0,00579794	0,01002570	0,01263500	0,01278490	0,01058940	0,00690389	0,00313313	0,00066192
		0.7	0,00191954	0,00567761	0,00877664	0,01002570	0,00923544	0,00690389	0,00396366	0,00149071	0,00022266
0.8	0,00165910	0,00419664	0,00567761	0,00579794	0,00477853	0,00313313	0,00149071	0,00038889	0,00001173		
0.9	0,00086530	0,00165910	0,00191954	0,00170544	0,00122989	0,00066192	0,00022266	0,00001173	0,00000000		

Tabla 4. Amplitudes adimensionales de los desplazamientos dinámicos de una placa cuadrada empotrada de grafito AS epoxy y carga excitadora en toda la placa distribuida uniforme.

También se han obtenido para la misma placa los valores de los esfuerzos originados en la placa. Se consignan a modo indicativo, solamente los valores adimensionales de  $M_x$  y  $M_y$  en el centro de la placa y en los centros de los bordes (Tabla 5):

Ubicación	$\frac{M_x}{p_0 a^2}$		$\frac{M_y}{p_0 a^2}$	
	$\Omega/\Omega_1 = 0.1$	$\Omega/\Omega_1 = 0.95$	$\Omega/\Omega_1 = 0.1$	$\Omega/\Omega_1 = 0.95$
	Centro placa ( $x=y=1/2$ )	0.0250588	0.303721	0.0250588
Centro borde izq. ( $x=0,y=1/2$ )	-	-0.229635	-	-0.180578



	0.0355270		0.0279373	
Centro borde der. ( $x=1,y=1/2$ )	- 0.0355270	-0.229638	- 0.0279274	-0.180580
Centro borde inf. ( $x=,y=0$ )	- 0.0279373	-0.180578	- 0.0355270	-0.229636
Centro borde sup. ( $x=1/2,y=1$ )	- 0.0279374	-0.180580	- 0.0355270	-0.229638

Tabla 5. Momentos dinámicos adimensionales en una placa cuadrada empotrada de grafito AS epoxy y carga excitadora en toda la placa distribuida uniforme.

En la [Figura 3](#), se graficaron los desplazamientos adimensionales correspondientes a la placa empotrada de grafito AS epoxy bajo carga estática distribuida en todo el dominio y con una relación de lados igual a 2. En la [Tabla 6](#) se presentan los valores adimensionales de los desplazamientos dinámicos para una relación entre la frecuencia de la carga excitadora y la fundamental de la placa de 0.1 y 0.95 respectivamente.

La magnitud del mayor valor de los resultados es prácticamente coincidente entre el caso de la carga estática y la dinámica de relación  $\Omega/\Omega_1=0.1$ . Esto cambia cuando la relación  $\Omega/\Omega_1=0.95$ , en cuyo caso el valor máximo supera en un orden en su magnitud a los anteriores.

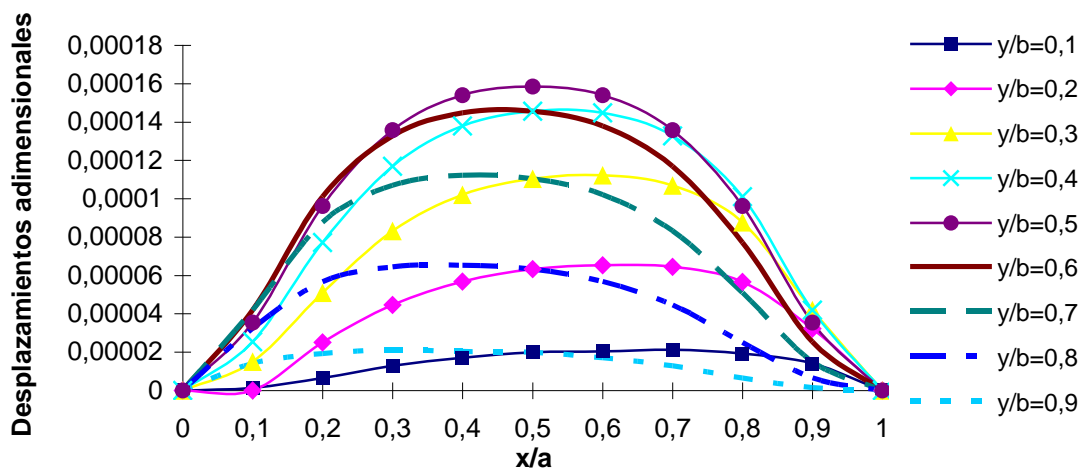


Figura 3. Deformada de una placa empotrada de material grafito AS epoxy de relación  $\lambda=2$ , carga estática total distribuida uniforme.

$\lambda$	$x/a$	$\Omega/\Omega_1=0.1$								
		$y/b$								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	0.1	0,00000145	0,00000655	0,00001505	0,00002555	0,00003565	0,00004222	0,00004219	0,00003263	0,00001422
	0.2	0,00000657	0,00002521	0,00005129	0,00007772	0,00009690	0,00010190	0,00008842	0,00005716	0,00001930
	0.3	0,00001301	0,00004494	0,00008387	0,00011790	0,00013700	0,00013410	0,00010790	0,00006509	0,00002134
	0.4	0,00001725	0,00005733	0,00010290	0,00013930	0,00015550	0,00014640	0,00011340	0,00006598	0,00002059
	0.5	0,00001998	0,00006391	0,00011150	0,00014710	0,00016020	0,00014710	0,00011150	0,00006391	0,00001998
	0.6	0,00002059	0,00006598	0,00011340	0,00014640	0,00015550	0,00013930	0,00010290	0,00005733	0,00001725
	0.7	0,00002134	0,00006509	0,00010790	0,00013410	0,00013700	0,00011790	0,00008842	0,00004494	0,00001301
	0.8	0,00001930	0,00005716	0,00008842	0,00010190	0,00009690	0,00007772	0,00005129	0,00002521	0,00000656
	0.9	0,00001422	0,00003263	0,00004219	0,00004222	0,00003565	0,00002555	0,00001505	0,00000655	0,00000145
2		$\Omega/\Omega_1=0.95$								
		$y/b$								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	0.1	0,00000004	0,00000993	0,00004611	0,00011450	0,00020200	0,00027720	0,00030270	0,00024490	0,00010820
	0.2	0,00001857	0,00010940	0,00029100	0,00052810	0,00074530	0,00085260	0,00077970	0,00052140	0,00018110
	0.3	0,00007299	0,00030780	0,00066510	0,00104100	0,00130400	0,00134200	0,00111300	0,00068000	0,00022160
	0.4	0,00013660	0,00051280	0,00100800	0,00145600	0,00169500	0,00162900	0,00126600	0,00072570	0,00022000
	0.5	0,00019290	0,00066590	0,00122400	0,00166300	0,00182900	0,00166300	0,00122400	0,00066590	0,00019290
	0.6	0,00022000	0,00072570	0,00126600	0,00162900	0,00169500	0,00145600	0,00100800	0,00051280	0,00013660
	0.7	0,00022160	0,00068000	0,00111300	0,00134200	0,00130400	0,00104100	0,00066510	0,00030780	0,00007300
0.8	0,00018110	0,00052140	0,00077970	0,00085260	0,00074530	0,00052810	0,00029100	0,00010940	0,00001857	
0.9	0,00010820	0,00024490	0,00030270	0,00027720	0,00020200	0,00011450	0,00004611	0,00000990	0,00000005	

Tabla 6. Amplitudes adimensionales de los desplazamientos dinámicos de una placa empotrada de grafito AS epoxy de relación  $\lambda=2$ , carga excitadora en toda la placa distribuida uniforme.

Se puede vislumbrar un comportamiento análogo al de la placa cuadrada analizada, cuando la relación de lados es igual a 2. Pero los valores en la placa rectangular disminuyen en un orden en relación a la cuadrada.

**Caso 2-a) Placa cantilever bajo carga parcial centrada distribuida uniforme en una región del dominio, de grafito AS epoxy, y con distintas relaciones de lados.**

Se considera en primer lugar la placa con una relación de lados igual a 1 con carga centrada distribuida uniforme estática en una región del dominio de 0.1 a y 0.1b. Para ella se calcularon los valores de los desplazamientos adimensionales estáticos que se graficaron en la Figura 4.

Iguales estados de carga pero dinámicas correspondientes a las relaciones de frecuencias  $\Omega/\Omega_1=0.1$  y 0.95 se utilizaron para determinar los resultados que aparecen en la Tabla 7.

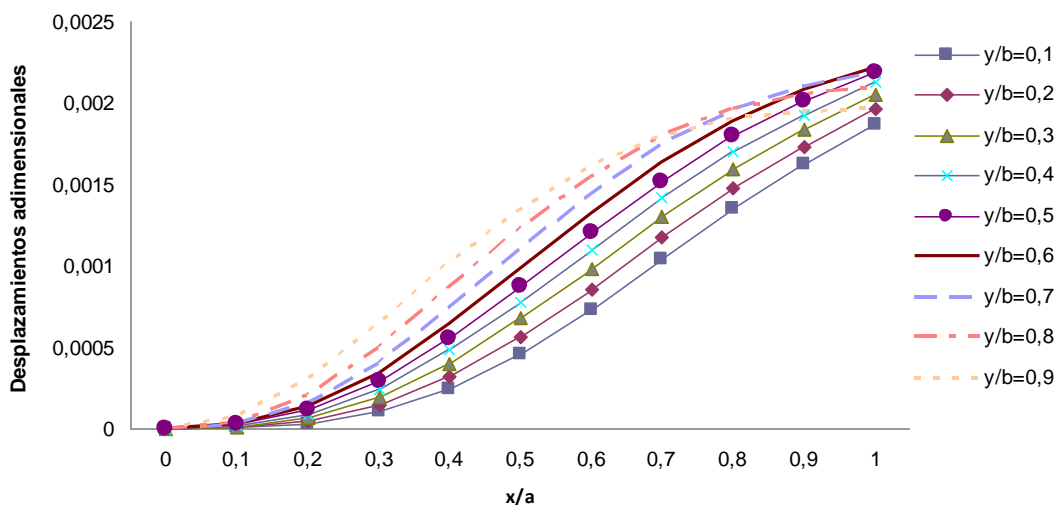


Figura 4. Deformada de una placa cuadrada cantilever de grafito AS epoxy con carga estática centrada distribuida uniforme en una región 0.1a x 0.1b del dominio

$\lambda$	x/a	$\Omega/\Omega_1=0.1$									
		y/b									
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
1	0.1	0,00000644	0,00000961	0,00001156	0,00001848	0,00002865	0,00003253	0,00003082	0,00004110	0,00007675	
	0.2	0,00003248	0,00004941	0,00006662	0,00009209	0,00012114	0,00014050	0,00015760	0,00020620	0,00030660	
	0.3	0,00010320	0,00014577	0,00019410	0,00024682	0,00029736	0,00034490	0,00040590	0,00050510	0,00064880	
	0.4	0,00024625	0,00032114	0,00040528	0,00048833	0,00056420	0,00064430	0,00074640	0,00087550	0,0102126	
	0.5	0,00046340	0,00056963	0,00068273	0,00078954	0,00088707	0,00099150	0,00111400	0,00124260	0,00135800	
	0.6	0,00076930	0,00086743	0,00099656	0,00111360	0,00122006	0,00133400	0,00145900	0,00156530	0,00163058	
	0.7	0,00105490	0,00118774	0,00131728	0,00143248	0,00153778	0,00164800	0,00175500	0,00182090	0,00182200	
	0.8	0,00136962	0,00149318	0,00161085	0,00171725	0,00181598	0,00190900	0,00197900	0,00198860	0,00192643	
	0.9	0,00164378	0,00175343	0,00185557	0,00194922	0,00203367	0,00209800	0,00211900	0,00207310	0,00196519	
	1	0,00188593	0,00198238	0,00206994	0,00214894	0,00221294	0,00224150	0,00221900	0,00211820	0,00197894	
			$\Omega/\Omega_1=0.95$								
			y/b								
			0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
		0.1	0,00005065	0,00006368	0,00007917	0,00014944	0,00024640	0,00027827	0,00026626	0,00039474	0,00079161
		0.2	0,00021610	0,00035830	0,00052963	0,00078311	0,00105936	0,00125922	0,00149580	0,00210195	0,00324834
		0.3	0,00079782	0,00121327	0,00170977	0,00223549	0,00273717	0,00328977	0,00410212	0,00535330	0,00701303
		0.4	0,00217993	0,00293990	0,00381786	0,00467200	0,00548599	0,00649279	0,00788010	0,00952127	0,0115560
		0.5	0,00438349	0,00549601	0,00671133	0,00786617	0,00899516	0,01037980	0,01207490	0,01366990	0,01478310
		0.6	0,00728143	0,00866965	0,01010980	0,01144390	0,01275080	0,01429800	0,01597210	0,01713220	0,01735420
	0.7	0,01072790	0,01218980	0,01366490	0,01502420	0,01634800	0,01780040	0,01908570	0,01944140	0,01850310	
	0.8	0,01413380	0,01545550	0,0167784	0,01803230	0,01923520	0,02033460	0,02087780	0,02017970	0,01807970	
	0.9	0,01678880	0,01789370	0,01899030	0,02005050	0,02098260	0,02150550	0,02111680	0,01938950	0,01643260	
	1	0,01884480	0,01974650	0,02062120	0,02145020	0,02201680	0,02185400	0,02049910	0,01785270	0,01428490	

Tabla 7. Amplitudes adimensionales de los desplazamientos dinámicos de una placa cuadrada cantilever de grafito AS epoxy, con carga excitadora centrada distribuida uniforme en una región 0.1a x 0.1b del dominio

En estas placas se observa que los mayores valores de desplazamientos dinámicos no coinciden en su ubicación sobre la placa cuando se presenta una carga dinámica de relación de frecuencias  $\Omega/\Omega_1=0.1$  y otra de relación  $\Omega/\Omega_1=0.95$ . Al no presentar simetría de vínculos es notable la incidencia de la anisotropía del material. Se destaca de igual manera que para la acción dinámica de mayor frecuencia el punto de mayor desplazamiento adimensional dinámico coincide con el de mayor magnitud del desplazamiento cuando la acción es estática.

Se considera a continuación la placa con una relación de lados igual a 2, primeramente se muestra el comportamiento bajo iguales condiciones que el caso de relación de lados 1, para la carga estática (Figura 5) y para analizar la acción de carga dinámica excitadora se considera una relación entre frecuencias  $\Omega/\Omega_1=0.95$  (Tabla 8).

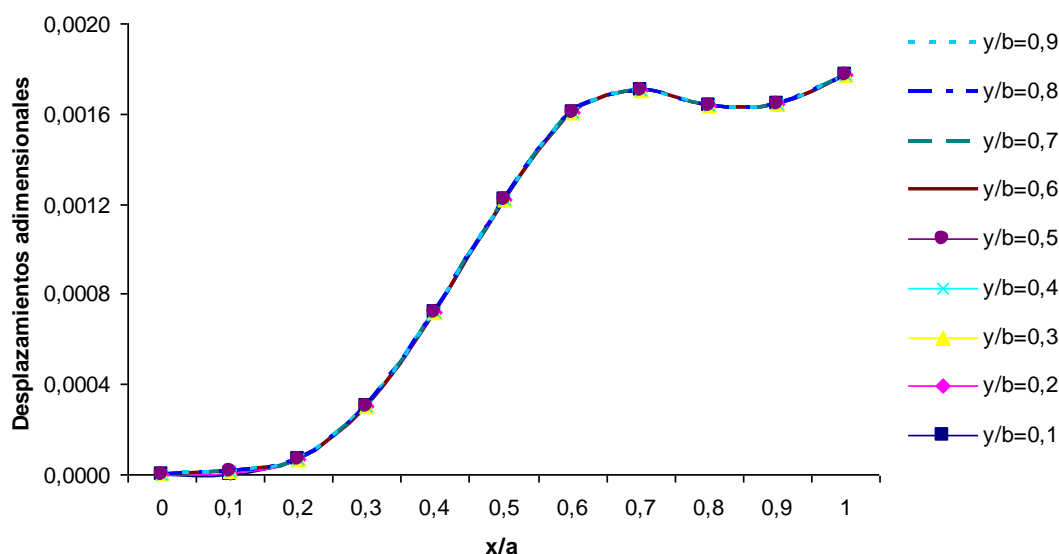


Figura 5. Deformada de una placa cantilever de grafito AS epoxy de relación  $\lambda=2$  con carga estática centrada distribuida uniforme en una región 0.1a x 0.1b del dominio

$\lambda$	x/a	$\Omega/\Omega_1=0.95$								
		y/b								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	0.1	0,00002002	0,000096657	0,000183947	0,000311595	0,000489249	0,000657683	0,000853695	0,00126048	0,00198753
	0.2	0,00108358	0,00152432	0,00200142	0,00254461	0,00314946	0,00382764	0,0046975	0,00593482	0,00756909
	0.3	0,00432004	0,00526052	0,00633955	0,00741487	0,00847981	0,00975482	0,0113325	0,0129451	0,0142925
	0.4	0,00961673	0,0109407	0,0123223	0,0135811	0,0147608	0,0160956	0,0174471	0,0181683	0,0178612
	0.5	0,0156439	0,0166969	0,0176217	0,0183624	0,0189609	0,0193837	0,0192785	0,0181431	0,0158994
	0.6	0,0196197	0,0197177	0,0196152	0,0193416	0,018832	0,0178097	0,0160125	0,0134781	0,0105135
	0.7	0,019502	0,018692	0,0176855	0,0165194	0,0150724	0,0130892	0,010628	0,00821074	0,0062729
	0.8	0,0169818	0,0158651	0,0145223	0,0130097	0,0113093	0,0093741	0,00750773	0,00635661	0,00622892
	0.9	0,0155688	0,0145426	0,0133005	0,0119167	0,0105297	0,00932183	0,00864006	0,00889219	0,010117
	1	0,0157821	0,0148983	0,0138874	0,0128084	0,0119247	0,011623	0,0121935	0,0136383	0,0156723

Tabla 8. Amplitudes adimensionales de los desplazamientos dinámicos de una placa cantilever de grafito AS epoxy de relación  $\lambda=2$ , con carga excitadora centrada uniforme en una región 0.1a x0.1b del dominio.

En cuanto al comportamiento bajo la carga estática actuante se observa que los desplazamientos adimensionales se mantienen constantes para una misma coordenada x, y el mayor valor se presenta en el extremo libre. Este comportamiento cambia cuando la carga considerada es dinámica con la relación de frecuencia  $\Omega/\Omega_1=0.95$ .

**Caso 2-b) Placa cantilever bajo carga parcial centrada distribuida uniforme en una región del dominio, de E-Glass epoxy, y relación de lados 2.**

Como una variante para analizar el comportamiento estático y dinámico de las placas motivo de este trabajo se considera otro material como el E-Glass epoxy cuyas propiedades ya han sido mencionadas. Se conservan el estado de carga parcial en igual región del dominio de la placa, las mismas condiciones de borde y una relación de aspecto igual a 2.

La Figura 6 muestra los resultados para el caso estático de carga y la Tabla 9 para la carga dinámica con una relación de frecuencias de 0.95.

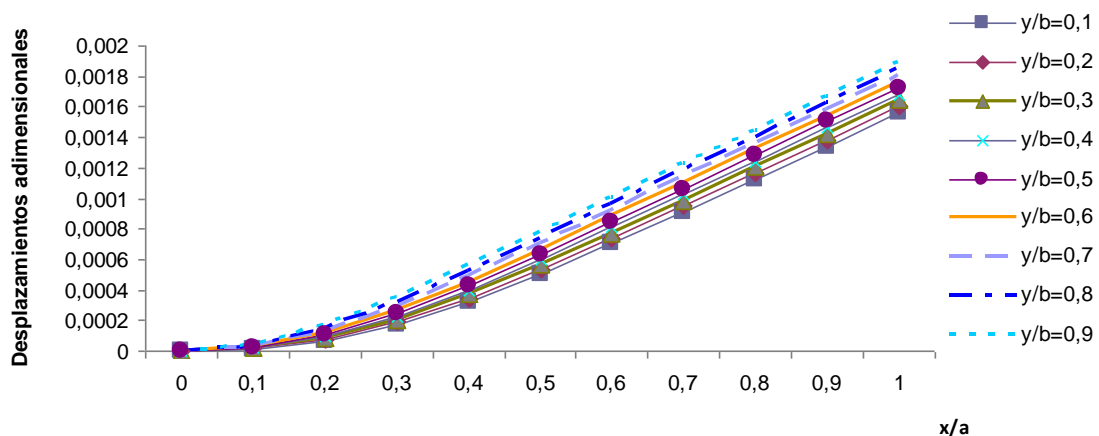


Figura 6. Deformada de una placa cantilever de E-Glass epoxy de relación  $\lambda=2$  con carga estática centrada distribuida uniforme en una región 0.1a x0.1b del dominio.

$\lambda$	x/a	$\Omega/\Omega_1=0.95$								
		y/b								
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	0.1	0.00009394	0.00012471	0.000143186	0.000161635	0.000184764	0.000204293	0.000225847	0.000279603	0.000384785
	0.2	0.000494304	0.000588923	0.00066069	0.000732409	0.000816096	0.000903006	0.00100887	0.00118908	0.00147361
	0.3	0.00131252	0.00148176	0.0016325	0.00178501	0.00195575	0.00214825	0.00238298	0.0027035	0.00312469
	0.4	0.0025667	0.00281763	0.00305683	0.0033029	0.00357362	0.00387702	0.00422995	0.00466111	0.00517493
	0.5	0.00422715	0.00455767	0.00488091	0.0052167	0.00558131	0.00597848	0.00641971	0.00693024	0.00751543
	0.6	0.00623403	0.00663159	0.00702893	0.00744167	0.00788244	0.00835557	0.0088705	0.00944404	0.0100765
	0.7	0.00850455	0.00895838	0.00941797	0.00989366	0.010395	0.0109287	0.0115019	0.0121202	0.012777
	0.8	0.0109736	0.0114735	0.01198	0.0125038	0.0130526	0.0136296	0.0142376	0.0148799	0.0155521
	0.9	0.0135923	0.0141206	0.0146586	0.0152154	0.0157964	0.0164026	0.017035	0.0176954	0.0183796
	1	0.0162813	0.0168255	0.017387	0.0179688	0.0185723	0.0192023	0.0198614	0.0205435	0.0212365

Tabla 9. Amplitudes adimensionales de los desplazamientos dinámicos de una placa cantilever de E-Glass epoxy de relación  $\lambda=2$ , con carga excitadora centrada uniforme en una región 0.1a x0.1b del dominio

A los efectos de evaluar la influencia de las características del material de la placa, se comparan los valores de las [Tablas 8 y 9](#), que corresponden a situaciones de similar geometría, vinculación y carga, variando únicamente el material.

En primer lugar, debe consignarse que globalmente las deformaciones son mayores para el caso de E-Glass epoxy, cuya rigidez principal  $E_1$  es menor que la del grafito AS epoxy ([Tabla 1](#)).

Una magnitud importante en el comportamiento de este tipo de materiales es la relación de ortotropía  $E_1/E_2$ . Según se desprende de la [Tabla 1](#) es mucho mayor para el grafito AS epoxy: 15.53 que para el E-Glass epoxy: 5.30.

Obsérvese que en el caso de la relación de ortotropía más baja, E-Glass epoxy, ([Tabla 9](#)) el comportamiento se ve dominado por las condiciones de vinculación. En efecto, para puntos de  $y/b=$  constante (perpendicular al empotramiento), el desplazamiento crece conforme aumenta  $x/a$  (distancia al empotramiento) asemejando la deformación de las ménsulas,

En cambio, en la [Tabla 8](#) puede observarse cómo la fuerte ortotropía del material distorsiona ese patrón de comportamiento.

#### 4 CONCLUSIONES

Como conclusión general, puede decirse que el método de Ritz, utilizando funciones viga como aproximación de los desplazamientos, provee una herramienta eficaz para atacar un problema elastodinámico complejo como es la vibración forzada de placas rectangulares delgadas de materiales anisótropos con distintas condiciones de borde.

A través de las expresiones dadas por [Lekhnitskii, 1968](#) la formulación general efectuada para un caso de anisotropía genérica puede aplicarse a casos concretos de materiales compuestos con distintas orientaciones de sus fibras con respecto a los bordes de la placa.

#### AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue auspiciado por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, por la Universidad Nacional del Sur, UNS, y por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET.

#### REFERENCIAS

Ciancio, P. M., Pico, O. L. y Rossit, C. A., Incidencia de la conformación anisotrópica de placas rectangulares delgadas sobre las frecuencias naturales de vibración. *Mecánica Computacional*, Vol. XXIX: 343-351, 2010.

- Ciancio, P. M. y Rossit, C. A., Forced vibrations of rectangular anisotropic plates in an ocean structure, Chapter 7 of *Ocean Engineering Research Advances*, Editorial Nova Science Publishers, New York, 185-213, 2008.
- Ciancio, P. M., Rossit, C. A. y Laura, P. A. A. "Approximate study of the free vibrations of a cantilever anisotropic plate carrying a concentrated mass". *Journal of Sound and Vibration*, 302(3), 621-628, 2007.
- Gupta, U. S., Ansari, A. H., Forced axi-symmetric response of polar orthotropic linearly tapered circular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 236(4): 623-636, 2000.
- Laura, P. A. A., Avalos, D. R., Larrondo, H. A., Forced vibrations of simply supported anisotropic rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 220(1): 178-185, 1999.
- Lekhnitskii, S. G., *Anisotropic plates*. Gordon and Breach Sciences Publishers, N.Y., 1968.
- Mahamood, R. M., Akinlabi, E. T., Shukla, M. y Pityana, S., Functionally Graded Material: An Overview. *Proceedings of the World Congress on Engineering 2012*, Vol. III WCE 2012, London, U.K., 2012.
- Romanelli, E., Laura, P. A. A., Forced transverse vibrations of a simply supported rectangular orthotropic plate in the case where the force acts over a plate subdomain. *Ocean Engineering*, 28: 1135-1144, 2001.
- Rossit, C. A., Ciancio, P. M. y Bambill, D. V., Análisis estático y dinámico de placas rectangulares anisótropas bajo cargas transversales. XXXIII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural. *Actas en C.D.*, Santiago, Chile, 2008.
- Tsai, S. W., *Structural Behavior of Composite Materials*, NASA CR-71, 1964.
- Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S., *Teoría de placas y láminas*. Ediciones Urmo. (Única traducción autorizada al castellano de la obra *Theory of Plates and Shells*, 1959 por McGraw-Hill, Inc., Nueva York), 1970.