

## VIBRACIONES DE UNA PLACA DE REISSNER-MINDLIN INMERSA EN UN FLUIDO IDEAL EN 3D

**Ricardo L. A. Márquez Turiello, Claudio Padra y Mario Scheble**

*Grupo Mecánica Computacional, Centro Atómico Bariloche, 8400 Bariloche, Río Negro, Argentina,  
<http://mecom.cnea.gov.ar/>*

**Palabras Clave:** Vibraciones, Interacción fluido-placa, Reissner-Mindlin, Mecánica Computacional.

**Resumen.** El cálculo preciso de aproximaciones de elementos finitos de los modos normales de estructuras sólidas interactuando con fluidos es muy importante en muchas aplicaciones de la ingeniería, siendo objeto de estudio durante largo tiempo y desarrollándose diversos métodos para su planteo y resolución.

En este trabajo se estudió el problema tridimensional de vibraciones de placas interactuando con un fluido ideal compresible. Las placas se modelaron empleando las ecuaciones de Reissner-Mindlin y con los elementos mixtos de Durán-Liberman, mientras que para el fluido se emplearon las ecuaciones de fluido ideal compresible con los desplazamientos como variables primarias.

Se desarrolló y validó un código para la resolución de problemas 3D de vibraciones con interacción placa-fluido, y se resolvió un problema de interés. Se reportan los resultados obtenidos (modos y frecuencias) del proceso de validación y del problema analizado.

## 1. INTRODUCCIÓN

El cálculo preciso de los modos normales de estructuras sólidas interactuando con fluidos utilizando elementos finitos es muy importante en muchas aplicaciones de la ingeniería, desde el diseño de intercambiadores de calor, condensadores y otros dispositivos, hasta estudios sísmicos de represas. Este tipo de problemas ha sido objeto de estudio durante largo tiempo y se han desarrollado diversos métodos para su planteo y resolución.

En este trabajo se estudió el problema tridimensional de vibraciones libres de una placa elástica interactuando con un fluido ideal compresible. El objetivo del análisis de vibraciones libres es la identificación de las frecuencias de resonancia y la caracterización de sistemas fluido-placa acoplados para evitar fallas y roturas. Tomando a modo de ejemplo un intercambiador de calor, la idea consiste en hallar sus frecuencias de resonancia y compararlas con frecuencias de excitación de otros dispositivos del circuito hidráulico, como ser una bomba, o con las frecuencias con la cual se produce el desprendimiento de vórtices en su interior.

En los problemas de vibraciones en fluidos, generalmente se toma a la presión como variable primaria. Sin embargo, en problemas de interacción fluido-placa, esta elección conduce a problemas de autovalores no simétricos con complicaciones computacionales. Para lidiar con este problema, se buscaron formas alternativas de describir el problema utilizando diferentes variables, como los desplazamientos (Hamdi et al., 1978), la velocidad potencial (Everstine, 1981), presión y desplazamientos potenciales (Morand y Ohayon, 1979), entre otras.

El uso de los desplazamientos como variables primarias permite obtener problemas de autovalores simétricos. Sin embargo, al utilizar esta formulación, en el problema aparece un espectro de modos espurios asociados a la autofrecuencia nula, sin significado físico y de dimensión infinita. Debido a esto, se utilizaron los elementos de Raviart-Thomas, permitiendo eliminar de manera sencilla los modos espurios del problema, ya que con estos elementos los modos espurios quedan asociados al autovalor nulo (Rodríguez et al., 1999).

La placa se modeló empleando las ecuaciones de Reissner-Mindlin permitiendo modelar placas delgadas y de espesores moderados. Sin embargo, al utilizar elementos finitos estándar para la discretización de la placa se observan errores debido al fenómeno de *locking*, siendo necesaria la utilización de métodos mixtos. Finalmente, el uso de los elementos mixtos de Durán-Liberman resultó ser apropiado para este tipo de problemas (Durán y Liberman, 1992).

La elección de estos elementos para el fluido y para la placa permiten la obtención de un problema acoplado no conforme en la interfaz fluido-placa. El acoplamiento cinemático entre la placa y el fluido se impone de forma débil en la formulación introduciendo una nueva variable al problema: la presión de interfaz. De esta manera, es posible el uso de mallas no-coincidentes (non-matching grids) en la interfaz fluido-placa (Rodríguez et al., 1999), permitiendo refinar independientemente las placas o el fluido según sea conveniente.

El resto del trabajo se organiza de la siguiente manera. En la sección 2 se presentan las ecuaciones del problema de vibraciones libres de un sistema fluido-placa acoplado y su formulación variacional. En la sección 3 se realiza la discretización por elementos finitos del problema. En la sección 4 se muestran los resultados de la validación del código desarrollado para la resolución de problemas 3D de vibraciones con interacción fluido-placa. Por último, en la sección 5 se presentan los resultados numéricos de un problema sencillo de interés.

## 2. PLANTEO DEL PROBLEMA

Sean  $\Omega_S$  y  $\Omega_F$  los dominios del sólido y del fluido respectivamente, como se ve en la figura 1. La frontera exterior de  $\Omega_S$  pueden dividirse en 2 tipos de fronteras,  $\Gamma_D$ , donde la estructura

esta fija, y  $\Gamma_N$ , donde la estructura está libre de tensiones.  $\Gamma_I$  denota la frontera de interfaz entre el sólido y el fluido,  $\mathbf{n}$  es la normal unitaria exterior del sólido, y  $\boldsymbol{\nu}$  es la normal unitaria exterior del fluido.

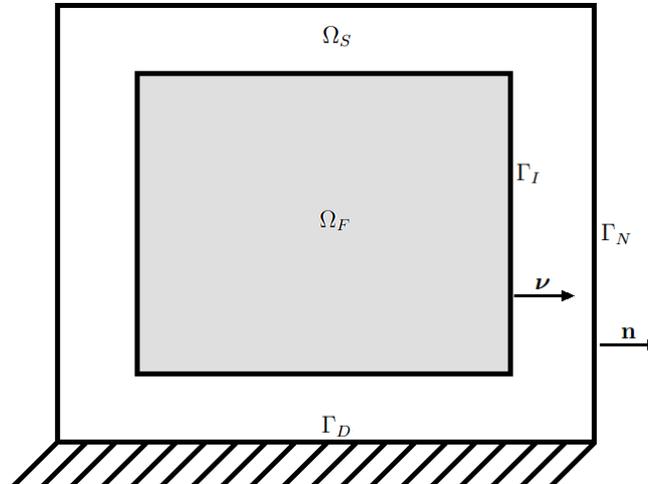


Figura 1: Dominios del fluido y del sólido.

El problema que se estudiará es el vibraciones de pequeñas amplitudes de estructuras elásticas en contacto con un fluido compresible ideal. Para ello se considera que las deformaciones son lo suficientemente pequeñas como para que la teoría de elasticidad lineal sea válida. Además se considera un fluido homogéneo y se desprecian los efectos de la gravedad. Por último, se asume que las velocidades del fluido son pequeñas como para despreciar efectos convectivos y que los efectos viscosos en el fluido no son relevantes.

Bajo estas consideraciones, las ecuaciones que describen el movimiento de un sistema con interacción fluido-estructura pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{w})}{\partial x_j} &= \rho_S \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} && \text{en } \Omega_S, \quad i = 1, 2, 3, \\ -\frac{\partial p}{\partial x_i} &= \rho_F \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} && \text{en } \Omega_F, \quad i = 1, 2, 3, \\ p &= -\rho_F c^2 \operatorname{div} \mathbf{u} && \text{en } \Omega_F, \\ \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu} && \text{en } \Gamma_I, \\ \sigma(\mathbf{w})\boldsymbol{\nu} &= -p\boldsymbol{\nu} && \text{en } \Gamma_I, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{0} && \text{en } \Gamma_D, \\ \sigma(\mathbf{w})\mathbf{n} &= \mathbf{0} && \text{en } \Gamma_N, \end{aligned}$$

donde  $(x_1, x_2, x_3)$  son las coordenadas espaciales de un punto material del sólido o del fluido;  $p$  es la presión del fluido;  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{u}$  son los desplazamientos del sólido y del fluido respectivamente;  $\rho_S$  y  $\rho_F$  son las densidades del sólido y del fluido respectivamente;  $\sigma(\mathbf{w})$  es el tensor de tensiones del sólido, relacionado con  $\mathbf{w}$  a través de la ley de Hooke.

Para determinar los modos de vibración de este sistema, se consideran soluciones armónicas

para la presión y desplazamientos, es decir, buscamos soluciones de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t) &= \mathbf{U}(x) e^{i\omega t}, & x \in \Omega_F, t \geq 0, \\ \mathbf{w}(x, t) &= \mathbf{W}(x) e^{i\omega t}, & x \in \Omega_S, t \geq 0, \\ p(x, t) &= P(x) e^{i\omega t}, & x \in \Omega_F, t \geq 0, \end{aligned}$$

siendo  $\omega$  la frecuencia angular de vibración. Reemplazando con estas últimas expresiones en las ecuaciones anteriores, se obtiene el siguiente problema de autovalores:

*Encontrar un número real  $\omega$  y funciones  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{W}$ , y  $P$ , no todas idénticamente nulas, tales que:*

$$-\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{W})}{\partial x_j} = \omega^2 \rho_S W_i \quad \text{en } \Omega_S, i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \omega^2 \rho_F U_i \quad \text{en } \Omega_F, i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

$$P = -\rho_F c^2 \operatorname{div} \mathbf{U} \quad \text{en } \Omega_F, \quad (3)$$

$$\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{en } \Gamma_I, \quad (4)$$

$$\sigma(\mathbf{W})\boldsymbol{\nu} = -P\boldsymbol{\nu} \quad \text{en } \Gamma_I, \quad (5)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_D, \quad (6)$$

$$\sigma(\mathbf{W})\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_N. \quad (7)$$

Para obtener la formulación variacional del problema de autovalores, se multiplica la ecuación de momento del sólido (ec. 1) por un desplazamiento virtual  $\mathbf{Z}$ , tal que satisfaga la condición de contorno de Dirichlet (ec. 6), y se integra por partes sobre  $\Omega_S$ , obteniendo:

$$\int_{\Omega_S} \sigma(\mathbf{W}) : \epsilon(\mathbf{Z}) d\Omega + \int_{\Gamma_I} \sigma(\mathbf{W})\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{Z} d\Gamma = \omega^2 \int_{\Omega_S} \rho_S \mathbf{W} \cdot \mathbf{Z} d\Omega. \quad (8)$$

donde  $\epsilon(\mathbf{Z})$  es el tensor de deformaciones y  $\sigma(\mathbf{W}) : \epsilon(\mathbf{Z})$  es el producto interno de tensores de segundo orden.

De igual manera, multiplicando la ecuación de momento del fluido (ec. 2) por un desplazamiento virtual  $\mathbf{Y}$ , integrando por partes sobre  $\Omega_F$ , y usando la ecuación (3), se llega a:

$$\int_{\Omega_F} \rho_f c^2 \operatorname{div} \mathbf{U} \operatorname{div} \mathbf{Y} d\Omega + \int_{\Gamma_I} P \mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma = \omega^2 \int_{\Omega_F} \rho_F \mathbf{U} \cdot \mathbf{Y} d\Omega. \quad (9)$$

Sumando ambas ecuaciones y utilizando la ecuación (5) se obtiene:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_S} \sigma(\mathbf{W}) : \epsilon(\mathbf{Z}) d\Omega + \int_{\Omega_F} \rho_f c^2 \operatorname{div} \mathbf{U} \operatorname{div} \mathbf{Y} d\Omega + \int_{\Gamma_I} P(\mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\nu}) d\Gamma = \\ &= \omega^2 \left( \int_{\Omega_S} \rho_S \mathbf{W} \cdot \mathbf{Z} d\Omega + \int_{\Omega_F} \rho_F \mathbf{U} \cdot \mathbf{Y} d\Omega \right), \quad \forall (\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \in \mathcal{X}, \quad (10) \end{aligned}$$

donde el espacio  $\mathcal{X}$  se define como:

$$\mathcal{X} = \{(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) : \mathbf{Y} : \Omega_F \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ y } \mathbf{Z} : \Omega_S \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ con } \mathbf{Z} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_D\}.$$

La condición de acoplamiento cinemático (ec. 4) entre los campos de desplazamientos del sólido y del fluido se impone en forma débil, multiplicando la ecuación por una función de prueba  $Q$  e integrando,

$$\int_{\Gamma_I} Q(\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\nu}) d\Gamma = 0, \quad \forall Q \in \mathcal{P}, \quad (11)$$

con

$$\mathcal{P} = \{Q \in L^2(\Gamma_I)\}.$$

Como sucede típicamente en las formulaciones de desplazamientos,  $\omega = 0$  es una autofrecuencia del problema con un autoespectro de dimensión infinita

$$\mathcal{K} = \{(\mathbf{U}, \mathbf{0}) \in \mathcal{X} : \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \text{ en } \Omega_F \text{ y } \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_I\}.$$

Estos modos consisten en rotaciones puras del fluido, las cuales no inducen vibraciones en el sólido, ni cambios de presión en el fluido. Son soluciones matemáticas del problema de autovalores, pero carecen de sentido físico, y las mismas aparecen por que no se impuso la condición de irrotacionalidad en el fluido. Las restantes autofrecuencias del problema son estrictamente positivas y se corresponden con vibraciones del sistema fluido-estructura acoplado.

Hasta el momento se consideró un problema de un sistema fluido-estructura acoplado. Sin embargo, nuestro problema de interés es el de interacción de placas con un fluido compresible, para lo cuál habrá que modificar la ecuación (10).

Debido al gran costo computacional que implica el uso del modelo de elasticidad 3D para describir el movimiento de la placa, resulta conveniente utilizar un modelo específico de placas. Se utilizó el modelo de Reissner-Mindlin, para lo cual se considera que el dominio de la placa puede ser escrito como  $\Omega_P = \Sigma_0 \times (-\frac{t}{2}, \frac{t}{2})$ , donde  $\Sigma_0$  denota la superficie media y  $t$  es el espesor de la placa. Como antes,  $\Gamma_D$  y  $\Gamma_N$  serán las fronteras de Dirichlet y de Neumann respectivamente.

Sean  $\mathbf{u}^P = (u_1^P, u_2^P, u_3^P)$  los desplazamientos de un punto cualquiera de la placa. De acuerdo al modelo de Reissner-Mindlin, suponiendo que la dirección normal de la placa coincide con la dirección  $x_3$ , los desplazamientos de la placa se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} u_1^P &= -x_3 \beta_1(x_1, x_2), \\ u_2^P &= -x_3 \beta_2(x_1, x_2), \\ u_3^P &= \alpha(x_1, x_2), \end{aligned}$$

donde  $\alpha$  representa el desplazamiento transversal de la placa y  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$  son las rotaciones de las fibras normales a  $\Sigma_0$  en la dirección  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente.

Teniendo en cuenta estas últimas suposiciones, y recordando que se buscan soluciones armónicas, se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento para la placa de Reissner-Mindlin:

$$\frac{D(1-\nu)}{2} \nabla^2 \beta_1 + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \kappa t \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} - \beta_1 \right) = -\frac{\rho_P t^3}{12} \omega^2 \beta_1, \quad (12)$$

$$\frac{D(1-\nu)}{2} \nabla^2 \beta_2 + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \kappa t \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} - \beta_2 \right) = -\frac{\rho_P t^3}{12} \omega^2 \beta_2, \quad (13)$$

$$\kappa t \left( \nabla^2 \alpha - \frac{\Phi}{D} \right) = -\rho_P t \omega^2 \alpha, \quad (14)$$

con  $\omega$  la frecuencia angular de vibración,  $\kappa = Ek/(2(1+\nu))$ ,  $E$  el módulo de Young,  $\nu$  el coeficiente de Poisson,  $\rho_P$  la densidad de la placa,  $D = Et^3/(12(1-\nu^2))$  la rigidez flexional,  $k$  el factor de corrección por corte (comúnmente  $k = 5/6$ ), y

$$\Phi = D \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} \right).$$

Para obtener la formulación variacional, se multiplican las ecuaciones de movimiento de la placa (ec. 12-14) por las funciones de prueba  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  y  $\theta$  respectivamente, se suman las 3 ecuaciones y se integra por partes sobre  $\Sigma_0$ , obteniendo:

$$t^3 a(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta}) + \kappa t \int_{\Sigma_0} (\nabla \alpha - \boldsymbol{\beta}) \cdot (\nabla \theta - \boldsymbol{\eta}) d\Sigma = \omega^2 \left( \int_{\Sigma_0} \rho_P \alpha \theta d\Sigma + \frac{t^3}{12} \int_{\Sigma_0} \rho_P \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Sigma \right), \quad (15)$$

donde  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ , y

$$a(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \int_{\Sigma_0} \left( \sum_{i,j=1}^2 (1-\nu) \epsilon_{ij}(\boldsymbol{\beta}) \epsilon_{ij}(\boldsymbol{\eta}) + \nu \operatorname{div} \boldsymbol{\beta} \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} d\Sigma \right).$$

Finalmente, incorporando el modelo de placas de Reissner-Mindlin en la ecuación (10), obtenemos la formulación débil del problema de vibraciones de un sistema fluido-placa acoplado:

Hallar  $\omega \in \mathbb{R}$ , y  $(\mathbf{U}, \alpha, \boldsymbol{\beta}, P) \neq \mathbf{0} \in \mathcal{V} \times \mathcal{P}$ , tal que:

$$\begin{aligned} t^3 a(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta}) + \kappa t \int_{\Sigma_0} (\nabla \alpha - \boldsymbol{\beta}) \cdot (\nabla \theta - \boldsymbol{\eta}) d\Sigma + \int_{\Omega_F} \rho_f c^2 \operatorname{div} \mathbf{U} \operatorname{div} \mathbf{Y} d\Omega + \int_{\Gamma_I} P(\mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\nu} - \theta) d\Gamma = \\ = \omega^2 \left( \int_{\Sigma_0} \rho_P \alpha \theta d\Sigma + \frac{t^3}{12} \int_{\Sigma_0} \rho_P \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Sigma + \int_{\Omega_F} \rho_F \mathbf{U} \cdot \mathbf{Y} d\Omega \right), \quad \forall (\mathbf{Y}, \theta, \boldsymbol{\eta}) \in \mathcal{V}, \quad (16) \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_I} Q(\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\nu} - \alpha) d\Gamma = 0, \quad \forall Q \in \mathcal{P}, \quad (17)$$

con

$$\mathcal{V} = \{(\mathbf{Y}, \theta, \boldsymbol{\eta}) : \mathbf{Y} : \Omega_F \rightarrow \mathbb{R}^3, \theta : \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R} \text{ y } \boldsymbol{\eta} : \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ con } \theta = \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_D\}.$$

Nótese como se modifica la condición de acoplamiento cinemático debido a que el desplazamiento transversal de la placa es constante en el espesor de la placa, por lo cual:

$$\alpha|_{\Gamma_I} = \alpha|_{\Sigma_0}.$$

### 3. DISCRETIZACIÓN CON ELEMENTOS FINITOS

Para el fluido consideremos  $\mathcal{T}_h^F$  una partición regular de tetraedros de  $\Omega_F$ . Los elementos más simples que se pueden utilizar son los triángulos lineales estándar, cuyas incógnitas son los desplazamientos en las 3 direcciones espaciales en cada uno de sus 4 vértices, sin embargo, esta opción no es la más recomendable debido a la aparición de los modos espurios mencionados anteriormente.

Como ya se mencionó, en el problema (16-17) aparece un espectro de modos espurios, producidos por rotaciones puras del fluido, sin significado físico, de dimensión infinita y con frecuencia nula. Cuando se utilizan los elementos lineales estándar, los autovalores espurios se

mezclan con los autovalores del problema haciendo difícil la detección de los mismos. Por este motivo, se deben utilizar elementos finitos que permitan tener al cero como autovalor, con un autoespacio asociado lo suficientemente grande para incluir los modos espurios.

Un tipo de elementos finitos que cumple con lo mencionado anteriormente son los de Raviart-Thomas. Se utilizaron elementos de Raviart-Thomas de orden 0 ( $RT_h^0$ ) para el campo de desplazamientos  $\mathbf{U}_h$  del fluido. Los grados de libertad de los elementos  $RT_h^0$  son las componentes normales del campo de desplazamientos en los baricentros de cada cara del tetraedro. Por lo tanto, las componentes normales son constantes en cada cara del tetraedro, y continuas a través de caras de elementos vecinos. El espacio  $RT_h^0$  se define como:

$$RT_h^0 = \{ \mathbf{U}_h : \Omega_F \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ y } \mathbf{U}_h|_T = (a + d x_1, b + d x_2, c + d x_3), \forall T \in \mathcal{T}_h^F \}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Para la placa consideremos los elementos mixtos de Durán-Liberman (Durán y Liberman, 1992), los cuales poseen espacios diferentes para el desplazamiento transversal y las rotaciones de la placa. Sea  $\mathcal{T}_h^P$  una partición regular de triángulos de  $\Sigma_0$ . Para el desplazamiento transversal  $\alpha_h$  se eligen las funciones lineales continuas por elemento:

$$W_h = \{ \theta : \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R} \text{ y } \theta|_T \in \mathcal{P}_1, \forall T \in \mathcal{T}_h^P \}.$$

Se describe a continuación como se aproximarán las rotaciones. Sea  $T \in \mathcal{T}_h^P$  y  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sus coordenadas baricéntricas. Se denota por  $\boldsymbol{\tau}_i$  al vector tangente al lado para el cual  $\lambda_i = 0$ , y se define

$$\mathbf{p}_1 = \lambda_2 \lambda_3 \boldsymbol{\tau}_1, \quad \mathbf{p}_2 = \lambda_1 \lambda_3 \boldsymbol{\tau}_2, \quad \mathbf{p}_3 = \lambda_1 \lambda_2 \boldsymbol{\tau}_3,$$

y

$$H_h = \{ \boldsymbol{\eta} : \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ y } \boldsymbol{\eta}|_T \in \mathcal{P}_1^2 \oplus \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle, \forall T \in \mathcal{T}_h^P \},$$

donde  $\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$  es el espacio generado por  $\{ \mathbf{p}_i \}_{1 \leq i \leq 3}$ .

Habiendo definido los espacios para el fluido y la placa se obtiene el siguiente problema de autovalores discreto:

Hallar  $\omega_h \in \mathbb{R}$ , y  $(\mathbf{U}_h, \alpha_h, \boldsymbol{\beta}_h, P_h) \neq \mathbf{0} \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{P}_h$ , tal que:

$$\begin{aligned} & t^3 a(\boldsymbol{\beta}_h, \boldsymbol{\eta}_h) + \kappa t \int_{\Sigma_0} (\nabla \alpha_h - \boldsymbol{\beta}_h) \cdot (\nabla \theta_h - \boldsymbol{\eta}_h) d\Sigma + \\ & + \int_{\Omega_F} \rho_f c^2 \operatorname{div} \mathbf{U}_h \operatorname{div} \mathbf{Y}_h d\Omega + \int_{\Gamma_I} P(\mathbf{Y}_h \cdot \boldsymbol{\nu} - \theta_h) d\Gamma = \\ = & \omega_h^2 \left( \int_{\Sigma_0} \rho_P \alpha_h \theta_h d\Sigma + \frac{t^3}{12} \int_{\Sigma_0} \rho_P \boldsymbol{\beta}_h \cdot \boldsymbol{\eta}_h d\Sigma + \int_{\Omega_F} \rho_F \mathbf{U}_h \cdot \mathbf{Y}_h d\Omega \right), \quad \forall (\mathbf{Y}_h, \theta_h, \boldsymbol{\eta}_h) \in \mathcal{V}_h, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\int_{\Gamma_I} Q_h(\mathbf{U}_h \cdot \boldsymbol{\nu} - \alpha_h) d\Gamma = 0, \quad \forall Q_h \in \mathcal{P}_h, \quad (19)$$

con

$$\mathcal{V}_h = \{ (\mathbf{Y}_h, \theta_h, \boldsymbol{\eta}_h) \in RT_h^0 \times W_h \times H_h : \theta_h = \boldsymbol{\eta}_h = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_D \},$$

y

$$\mathcal{P}_h = \{ Q_h \in \mathcal{P} : Q_h|_f \in \mathcal{P}_0(f), \quad \forall f \in \mathcal{F}_I \},$$

donde  $\mathcal{F}_I$  son las caras de los tetraedros  $\mathcal{T}_h^F \in \Gamma_I$ .

#### 4. VALIDACIÓN DEL CÓDIGO

En esta sección, se mostrarán los resultados obtenidos de la validación del código computacional desarrollado para el cálculo de los modos normales y frecuencias de resonancia de sistemas fluido-placa acoplados. Para la validación se consideró un problema analizado en [Rodríguez et al. \(1999\)](#), y se compararon los resultados con los obtenidos en ese trabajo. El problema a resolver consiste en una cavidad cúbica llena de agua con todas sus paredes perfectamente rígidas, excepto por la superior, en la cual se colocó una placa delgada con todos sus lados empotrados. En la figura 2 se muestra un esquema del problema a resolver con las dimensiones de la cavidad y de la placa.

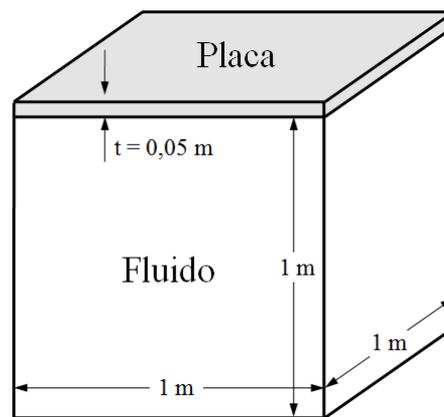


Figura 2: Esquema del problema utilizado para la validación. Cavidad rígida llena de agua con una placa empotrada en una de sus caras.

Los parámetros físicos utilizados para la placa y el fluido son los del acero y del agua respectivamente: densidad de la placa  $\rho_P = 7700 \text{ kg/m}^3$ , módulo de Young  $E = 144 \text{ GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,35$ , densidad del fluido  $\rho_F = 1000 \text{ kg/m}^3$ , y velocidad del sonido en el fluido  $c = 1430 \text{ m/s}$ .

El problema se resolvió utilizando 3 mallas diferentes: malla 1, 11683 d.o.f.; malla 2, 75562 d.o.f.; malla 3, 158417 d.o.f.; donde d.o.f. denota el número total de grados de libertad del sistema, es decir, la suma de los grados de libertad de la placa, del fluido y de la interfaz.

Se calcularon los primeros 13 modos del sistema acoplado con las 3 mallas, y se compararon con los resultados de [Rodríguez et al.](#). Debido a que los modos del problema acoplado son perturbaciones de los modos desacoplados de la placa y del fluido, se denotará con  $\omega_i^P$  a los modos que sean una perturbación de la placa, y  $\omega_i^F$  a los que sean del fluido. En la tabla 1 se presentan los resultados obtenidos. Allí se ve que los valores calculados difieren de los del trabajo citado en menos de un 5% para la malla 1, y en menos del 2% para la malla 3 para todos los modos.

En las figuras 3 y 4 se puede observar la deformación de la placa y la distribución de presiones en el fluido de los modos  $\omega_1^P$ ,  $\omega_{100}^F$  y  $\omega_2^P$ .

Estos resultados indican que el código computacional desarrollado funciona satisfactoriamente y que se encuentra apto para analizar otros problemas de interés.

Modo	Malla 1	Malla 2	Malla 3	Rodríguez et al.
$\omega_1^P$	2182,140	2168,776	2167,336	2167,922
$\omega_{001}^F$	4849,755	4830,359	4828,695	4841,131
$\omega_{100}^F$	4863,477	4840,971	4839,113	4847,314
$\omega_{010}^F$	4863,575	4841,199	4839,158	4847,249
$\omega_2^P$	3554,845	3519,072	3515,775	3518,343
$\omega_3^P$	3556,039	3519,413	3515,937	3518,040
$\omega_{101}^F$	6693,167	6650,303	6646,353	6669,856
$\omega_{110}^F$	6688,721	6644,784	6639,822	6656,259
$\omega_{011}^F$	6693,090	6650,826	6646,502	6669,870
$\omega_4^P$	5502,385	5409,094	5398,143	5418,194
$\omega_{111}^F$	8178,368	8113,374	8104,638	8138,963
$\omega_5^P$	7078,910	6854,359	6829,998	6831,714
$\omega_6^P$	7480,828	7276,255	7253,476	7355,582

Tabla 1: Frecuencias de vibración de los primeros 13 modos del problema de validación.

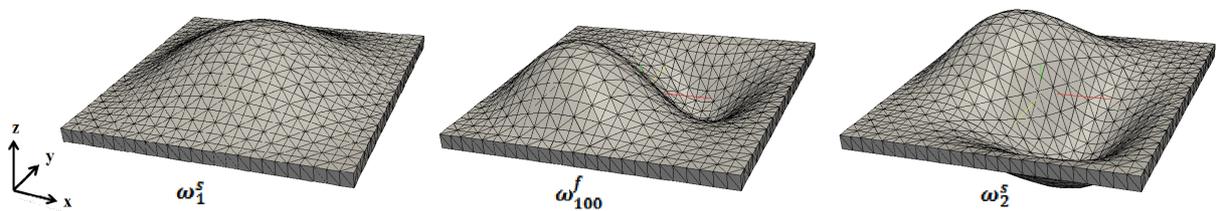


Figura 3: Deformación de la placa para los modos  $\omega_1^P$ ,  $\omega_{100}^F$  y  $\omega_2^P$  del problema de validación.

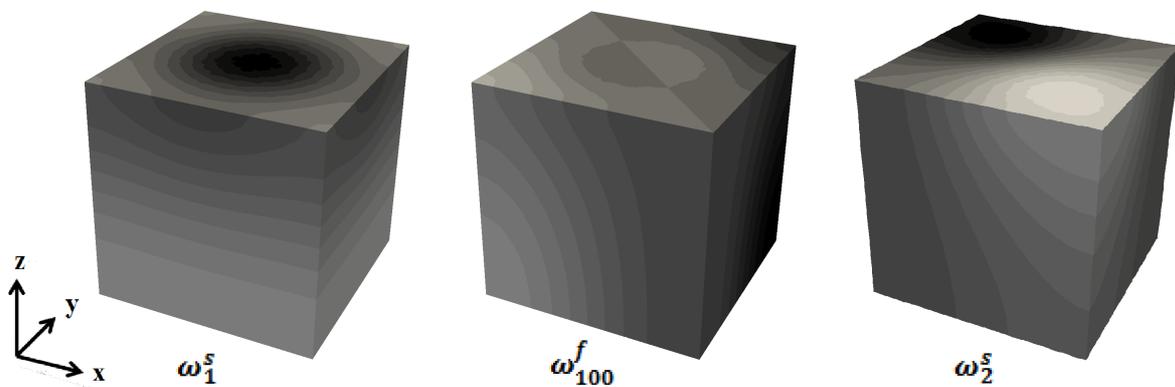


Figura 4: Presión en el fluido para los modos  $\omega_1^P$ ,  $\omega_{100}^F$  y  $\omega_2^P$  del problema de validación.

## 5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Una vez validado el código computacional se procedió a estudiar el problema de una placa de acero empotrada en uno de sus lados, vibrando en el interior de una cavidad rígida llena de agua. Los parámetros físicos utilizados para la placa y el agua son los mismos que se utilizaron para el problema de validación. En la figura 5 se muestra la geometría y dimensiones del problema estudiado.

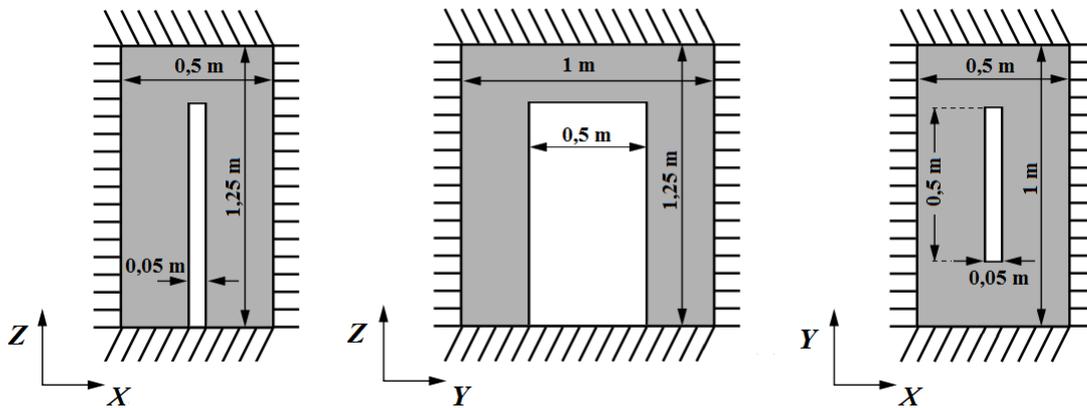


Figura 5: Placa vibrando en el interior de una cavidad rígida llena de agua.

Se utilizó una malla de 165087 d.o.f. (1323 en la placa, 146138 en el fluido y 17626 en la interfaz). En la tabla 2 se reportan las primeras 4 frecuencias de vibración del sistema acoplado.

Modo	Frecuencia
$\omega_1^P$	163,675
$\omega_2^P$	774,399
$\omega_3^P$	1041,961
$\omega_4^P$	2538,673

Tabla 2: Frecuencias de vibración de los primeros 4 modos del problema de una placa inmersa en agua.

En las figuras 6-9 se muestran la distribución de presión en el fluido y la deformación de la placa para cada uno de los primeros 4 modos de vibración.

## 6. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se presentó el problema tridimensional de vibraciones libres de una placa elástica interactuando con un fluido ideal compresible. Se presentaron las ecuaciones del problema y su formulación variacional. Utilizando los elementos de Raviart-Thomas para el fluido se obtuvo un problema simétrico de autovalores y se eliminaron los modos espurios asociados al autovalor nulo, mientras que, utilizando las ecuaciones de Reissner-Mindlin con los elementos mixtos de Durán-Liberman se pudo modelar placas delgadas y de espesores moderados. La condición de acoplamiento cinemático entre el fluido y la placa se impuso de manera sencilla utilizando la presión de interfaz, permitiendo el uso de mallas no coincidentes. Finalmente, se validó el código computacional desarrollado y se resolvió un problema de interés sencillo.

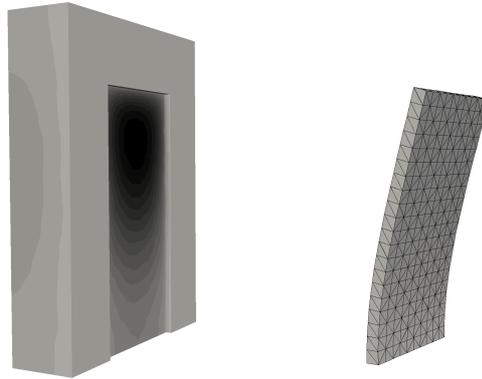


Figura 6: Distribución de presiones y deformación de la placa del modo  $\omega_1^P$ .

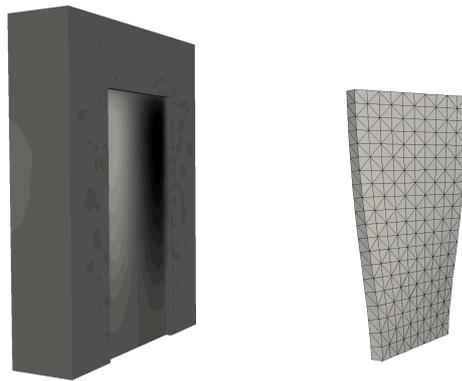


Figura 7: Distribución de presiones y deformación de la placa del modo  $\omega_2^P$ .

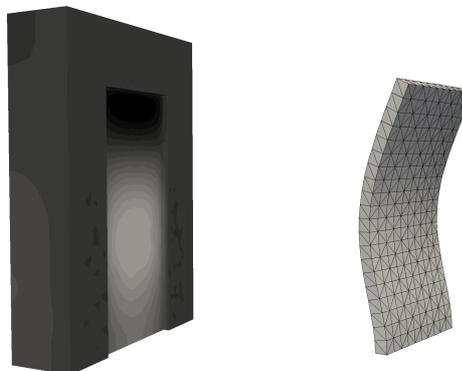


Figura 8: Distribución de presiones y deformación de la placa del modo  $\omega_3^P$ .



Figura 9: Distribución de presiones y deformación de la placa del modo  $\omega_4^P$ .

## REFERENCIAS

- Durán R. y Liberman E. On mixed finite element methods for the reissner-mindlin plate model. *American Mathematical Society*, 58:561–573, 1992.
- Everstine G. A symmetric potential formulation for fluid-structure interaction. *Journal of Sound and Vibration*, 79:157–160, 1981.
- Hamdi M., Ouser Y., y Verchery G. A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 13:139–150, 1978.
- Morand H. y Ohayon R. Substructure variational analysis of the vibrations of coupled fluid-structure systems. finite element results. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14:741–755, 1979.
- Rodríguez R., Bermúdez A., y Hervella-Nieto L. Finite element computation of three-dimensional elastoacoustic vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 219:279–306, 1999.