Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXXII, págs. 2677-2688 (artículo completo)
Carlos G. García Garino, Aníbal E. Mirasso, Mario A. Storti, Miguel E. Tornello (Eds.)
Mendoza, Argentina, 19-22 Noviembre 2013

CONVERGENCIA DE UNA FAMILIA DE PROBLEMAS DISCRETOS DE CONTROL ÓPTIMO ELÍPTICO FRONTERA RESPECTO DE UN PARÁMETRO

Domingo A. Tarzia

Departamento de Matemática - CONICET, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina, DTarzia@austral.edu.ar

Palabras Clave: Control óptimo frontera, Discretización, Elementos finitos, Convergencia respecto de un parámetro, Problema elíptico mixto.

Resumen. Se considera un dominio acotado D de Rn con una frontera regular compuesta de dos porciones de frontera *F1* y *F2*. En Gariboldi – Tarzia, Adv. Diff. Eq. Control Processes, 1 (2008), 113-132, se considera la convergencia de una familia de problemas de controles óptimos frontera de tipo Neumann gobernados por ecuaciones variacionales elípticas cuando el parámetro *alpha* de la familia (el coeficiente de transferencia de calor sobre la porción de frontera *F1*) tiende a infinito. Se demuestra la convergencia del control óptimo, del estado del sistema y del estado adjunto de la familia de problemas de controles óptimos fronteras de tipo Neumann a los correspondientes de un problema de control óptimo frontera de tipo Neumann también gobernado por una ecuación variacional elíptica con condiciones de contorno de tipo Dirichlet sobre *F1*.

Se consideran, tanto para la familia de problemas de controles óptimos frontera de tipo Neumann como para el problema de control óptimo frontera límite, las aproximaciones numéricas por el método de los elementos finitos con triángulos de Lagrange de tipo 1. Se discretizan las ecuaciones variacionales elípticas que definen el estado del sistema y de su estado adjunto y además las funciones de costo respectivas.

El objetivo del presente trabajo es el de estudiar la convergencia de la familia de problemas de controles óptimos fronteras de tipo Neumann discretos cuando el parámetro *alpha* tiende a infinito. Se demuestra la convergencia del control óptimo discreto, del estado del sistema discreto y del estado adjunto discreto de la familia a los correspondientes del problema de control óptimo frontera de tipo Neumann límite discreto.

1 INTRODUCCIÓN

Sea un dominio acotado $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ con una frontera $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ regular compuesta por dos porciones de frontera Γ_1 y Γ_2 con $\operatorname{med}(\Gamma_1) > 0$. Se consideran los siguientes problemas elípticos con condiciones de frontera mixtas dados por:

$$-\Delta u = g \quad \text{en}\ \Omega\ ; \quad u = b \quad \text{sobre}\ \Gamma_1 \ ; \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = q \quad \text{sobre}\ \Gamma_2 \tag{1}$$

y

$$-\Delta u = g \quad \text{en}\ \Omega\ ; \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(u-b) \quad \text{sobre}\ \Gamma_1 \ ; \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = q \quad \text{sobre}\ \Gamma_2 \tag{2}$$

donde g es la energía interna en Ω, $b = Const. > 0$ es la temperatura sobre Γ_1 para el sistema (1) y la temperatura exterior para el sistema (2) respectivamente, q es el flujo de calor sobre Γ_2. En Gariboldi and Tarzia (2008) se consideran los siguientes problemas continuos de control óptimo frontera para los sistemas (1) y (2) que pueden representar el caso estacionario del problema de Stefan (Tabacman and Tarzia, 1989; Tarzia, 1988), a saber:

A) Hallar el control óptimo frontera de tipo Neumann $q_{op} \in Q$ de manera que:

$$J\left(q_{op}\right) = \min_{q \in Q} J\left(q\right) \tag{3}$$

donde el funcional de costo $J : Q \to \mathrm{R}_0^+$ viene dado por la siguiente expresión (Bergounioux, 1997; Lions, 1968; Tröltzsch, 2010)

$$J(q) = \frac{1}{2}\left\|u_q - z_d\right\|_H^2 + \frac{M}{2}\left\|q\right\|_Q^2 \tag{4}$$

con $M > 0$ y $z_d \in H$ dados, $u_q \in K$ es el estado del sistema definido por el problema elíptico mixto (1) cuya formulación variacional está dada por la siguiente ecuación variacional (Kinderlehrer and Stampacchia, 1980; Tarzia, 1981):

$$\begin{cases} a\left(u_q, v\right) = \left(g, v\right)_H - \int_{\Gamma_2} q v d\gamma, & \forall v \in V_0 \\ u_q \in K \end{cases} \tag{5}$$

y cuyo correspondiente estado adjunto $p_q \in V$ está definido por la ecuación variacional:

$$\begin{cases} a\left(p_q, v\right) = \left(u_q - z_d, v\right), & \forall v \in V_0 \\ p_q \in V_0 \end{cases} \tag{6}$$

donde:

$$V = H^1(\Omega), V_0 = \{v \in V, \quad v/\Gamma_1 = 0\}, K = \{v \in V, \quad v/\Gamma_1 = b\} = b + V_0, \tag{7}$$

$$H = L^2(\Omega), \quad Q = L^2(\Gamma_2), \quad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx, \quad (u,v) = \int_\Omega uv\, dx\,. \tag{8}$$

B) Hallar el control óptimo frontera de tipo Neumann $q_{\alpha_{op}} \in Q$ de manera que:

$$J_\alpha\left(q_{\alpha_{op}}\right) = \min_{q\in Q} J_\alpha(q) \tag{9}$$

donde el funcional de costo $J_\alpha : Q \to R_0^+$ viene dado por la siguiente expresión (Bergounioux, 1997; Lions, 1968; Tröltzsch, 2010):

$$J_\alpha(q) = \frac{1}{2}\left\|u_{\alpha q} - z_d\right\|_H^2 + \frac{M}{2}\|q\|_Q^2 \tag{10}$$

con $M > 0$ y $z_d \in H$ dados, $u_{\alpha q} \in V$ es el estado del sistema definido por el problema elíptico mixto (2) cuya formulación variacional está dada por la siguiente ecuación variacional:

$$\begin{cases} a_\alpha\left(u_{\alpha q}, v\right) = (g,v)_H - \int_{\Gamma_2} qv d\gamma + \alpha \int_{\Gamma_1} bv d\gamma, \quad \forall v \in V \\ u_{\alpha q} \in V \end{cases} \tag{11}$$

y cuyo correspondiente estado adjunto $p_{\alpha q} \in V$ está definido por la siguiente ecuación variacional:

$$\begin{cases} a_\alpha\left(p_{\alpha q}, v\right) = \left(u_{\alpha q} - z_d, v\right), \quad \forall v \in V \\ p_{\alpha q} \in V \end{cases} \tag{12}$$

donde:

$$a_\alpha(u,v) = a(u,v) + \alpha \int_{\Gamma_1} uv d\gamma\,. \tag{13}$$

En Gariboldi y Tarzia (2008) se estudió el límite cuando $\alpha \to \infty$ del problema de control óptimo frontera de tipo Neumann (9) y se demostró que:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left\|u_{\alpha q_{\alpha_{op}}} - u_{q_{op}}\right\|_V = 0, \quad \lim_{\alpha\to\infty}\left\|p_{\alpha q_{\alpha_{op}}} - p_{q_{op}}\right\|_V = 0, \tag{14}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left\|q_{\alpha_{op}} - q_{op}\right\|_Q = 0\,, \tag{15}$$

utilizando la teoría de las ecuaciones variacionales.

Se considera el método de los elementos finitos con triángulos de Lagrange de tipo 1 constituido por elementos finitos de clase C^0 siendo h el parámetro que tiende a cero (Brenner y Scott, 1994; Ciarlet, 1978). Se discretizan las ecuaciones variacionales elípticas que definen los estados del sistema (11) y (5), los estados adjuntos (12) y (6), y además los funcionales de costo (10) y (4) respectivamente. Por Tarzia (2012; 2013) (ver también Casas y Mateos, 2002; Casas y Raymond, 2006) existen únicos controles óptimos frontera de tipo Neumann $q_{h\alpha_{op}}$ y $q_{h_{op}}$, sistemas $u_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}}$ y $u_{hq_{h_{op}}}$, y estados adjuntos $p_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}}$ y $p_{hq_{h_{op}}}$ óptimos discretos y además se demuestran las correspondientes convergencias cuando $h \to 0$ y se dan los órdenes de convergencia, en función de h, $\forall z_d \in H$, utilizando la caracterización de los controles óptimos frontera de tipo Neumann a través de un punto fijo de un operador bajo ciertas hipótesis sobre el dato M.

El objetivo del presente trabajo es el de realizar el límite cuando $\alpha \to \infty$ de las soluciones discretas de los problemas de control óptimo frontera (9) y demostrar que convergen a las soluciones discretas del problema de control óptimo frontera (3).

En general, la solución de problemas elípticos con condiciones mixtas se encuentra en $H^r(\Omega)$ con $1 < r \le 3/2 - \varepsilon \; (\varepsilon > 0)$ pero existen numerosos ejemplos para los cuales las soluciones están en $H^r(\Omega)$ con $2 \le r$ que es lo que se supone en el presente trabajo (Azzam y Kreyszig, 1982 ; Lanzani, Capogna y Brown, 2008; Shamir, 1968).

2 DISCRETIZACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO

Se considera la siguiente discretización (Brenner y Scott, 1994; Ciarlet, 1978)

$$\begin{cases} \Omega \subset \mathrm{R}^n : \text{dominio poligonal acotado ; } b = \text{Const.}>0 \text{ sobre } \Gamma_1, \\ \tau_h : \text{triangulación regular de tipo no negativa constituida por elementos finitos,} \\ \qquad \text{afines equivalentes de clase } \mathrm{C}^0, \\ h > 0 : \text{parámetro de la aproximación de elementos finitos que tiende a cero,} \\ h = \text{lado mayor de todos los triángulos } T \in \tau_h. \end{cases}$$

Se aproximan V, V_0 y K por:

$$\begin{cases} V_h = \left\{ v_h \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) / \, v_h/T \in P_1(T), \forall T \in \tau_h \right\} \\ V_{0h} = \left\{ v_h \in V_h / \, v_h/\Gamma_1 = 0 \right\}; \quad K_h = b + V_{0h} \end{cases} \tag{16}$$

donde P_1 es el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 1.

El funcional de costo discreto $J_h : Q \to \mathrm{R}_0^+$, correspondiente al funcional de costo continuo (4) se define por la expresión siguiente:

$$J_h(q) = \frac{1}{2}\left\| u_{hq} - z_d \right\|_H^2 + \frac{M}{2}\left\| q \right\|_Q^2 \tag{17}$$

donde u_{hq} es el estado del sistema discreto definido como la solución de la ecuación variacional discreta siguiente (Kinderlehrer y Stampacchia, 1980; Tarzia, 1996; Tarzia, 1999):

$$\begin{cases} a\left(u_{hq}, v_h\right) = \left(g, v_h\right)_H - \int_{\Gamma_2} q v_h d\gamma, \quad \forall v_h \in V_{0h} \\ u_{hq} \in K_h \end{cases} \tag{18}$$

y su correspondiente estado adjunto discreto p_{hq} se define como la solución de la siguiente ecuación variacional discreta:

$$\begin{cases} a\left(p_{hq}, v_h\right) = \left(u_{hq} - z_d, v_h\right)_H, \quad \forall v_h \in V_{0h} \\ p_{hq} \in V_{0h}. \end{cases} \tag{19}$$

El correspondiente problema de control óptimo discreto consiste en hallar $q_{h_{op}} \in Q$ de manera que:

$$J_h\left(q_{h_{op}}\right) = \underset{q \in Q}{Min}\, J_h\left(q\right). \tag{20}$$

Análogamente, el funcional de costo discreto $J_{h\alpha} : Q \to \mathrm{R}_0^+$ está definido por la expresión siguiente:

$$J_{h\alpha}\left(q\right) = \frac{1}{2}\left\|u_{h\alpha q} - z_d\right\|_H^2 + \frac{M}{2}\left\|q\right\|_Q^2 \tag{21}$$

donde $u_{h\alpha q}$ es el estado del sistema discreto definido como la solución de la ecuación variacional discreta siguiente:

$$\begin{cases} a_\alpha\left(u_{h\alpha q}, v_h\right) = \left(g, v_h\right)_H - \int_{\Gamma_2} q v_h d\gamma + \alpha \int_{\Gamma_1} b v_h d\gamma, \quad \forall v_h \in V_h \\ u_{h\alpha q} \in V_h \end{cases} \tag{22}$$

y su correspondiente estado adjunto discreto se define como la solución de la siguiente ecuación variacional discreta:

$$\begin{cases} a_\alpha\left(p_{h\alpha q}, v_h\right) = \left(u_{h\alpha q} - z_d, v_h\right)_H, \quad \forall v_h \in V_h \\ p_{h\alpha q} \in V_h. \end{cases} \tag{23}$$

El correspondiente problema de control óptimo discreto consiste en hallar $q_{h\alpha_{op}} \in Q$ de manera que:

$$J_{h\alpha}\left(q_{h\alpha_{op}}\right) = \underset{q \in Q}{Min}\, J_{h\alpha}\left(q\right). \tag{24}$$

Teorema 1.
(i) Existen únicos $u_{hq} \in K_h$ *y* $p_{hq} \in V_{0h}$ *soluciones de las ecuaciones variacionales (18) y (19) respectivamente* $\forall g \in H, \forall q \in Q, b > 0$ *sobre* Γ_1.
(ii) Se tiene que J_h *es una aplicación* Q*- elíptica y por ende estrictamente convexa, es decir:*

$$(1\text{-}t)J_h(q_2) + tJ_h(q_1) - J_h(tq_1 + (1-t)q_2) = \frac{t(1-t)}{2}\left\| u_{hq_2} - u_{hq_1} \right\|_H^2 + M\frac{t(1-t)}{2}\left\| q_2 - q_1 \right\|_Q^2$$
$$\geq \; M\frac{t(1-t)}{2}\left\| q_2 - q_1 \right\|_Q^2, \quad \forall q_1, q_2 \in Q, \forall t \in [0,1]. \qquad (25)$$

(iii) Existe un único control óptimo $q_{h_{op}} \in Q$ *que satisface el problema de optimización discreto* (20).
(iv) J_h *es una aplicación diferenciable según Gateaux y su derivada* J_h' *está dada por la siguiente expresión:*

$$J_h'(q) = Mq - \gamma_0(p_{hq}), \quad \forall q \in Q, \quad \forall h > 0. \qquad (26)$$

(v) La condición de optimalidad está dada por:

$$J_h'\left(q_{h_{op}}\right) = 0 \Leftrightarrow q_{h_{op}} = \frac{1}{M}\gamma_0(p_{hq_{h_{op}}}). \qquad (27)$$

(vi) Si la constante M *verifica la siguiente desigualdad:*

$$\mathrm{M} > \frac{\left\| \gamma_0 \right\|^2}{\lambda^2} \qquad (28)$$

donde γ_0 *es el operador traza sobre* Γ *y* $\lambda > 0$ *es la constante de coercividad de la forma bilineal, simétrica y continua a, es decir:*

$$\lambda \left\| v \right\|_V^2 \leq a(v,v), \quad \forall v \in V_0, \qquad (29)$$

entonces el control óptimo discreto $q_{h_{op}} \in Q$ *puede ser obtenido como el único punto fijo del operador* W_h*, es decir:*

$$q_{h_{op}} = \frac{1}{M}\gamma_0(p_{hq_{h_{op}}}) \Leftrightarrow W_h\left(q_{h_{op}}\right) = q_{h_{op}} \qquad (30)$$

el cual está definido por:

$$W_h : Q \to Q \,/\, W_h(q) = \frac{1}{M}\gamma_0(p_{hq}). \qquad (31)$$

Demostración. Las partes (i) a (v) surgen de (Tarzia, 2012). Para la parte (vi) basta demostrar que el operador W_h es una contracción bajo la hipótesis (28).

Teorema 2.

(i) *Se tiene que existen únicos* $u_{h\alpha q} \in V_h$ *y* $p_{h\alpha q} \in V_h$ *soluciones de las ecuaciones variacionales (22) y (23) respectivamente* $\forall g \in H, \forall q \in Q$.

(ii) Se tiene que $J_{h\alpha}$ *es una aplicación* Q*- elíptica y por ende estrictamente convexa verificando una desigualdad análoga a la (25).*

(iii) Existe un único control óptimo $q_{h\alpha_{op}} \in Q$ *que satisface el problema de optimización discreto (24).*

(iv) $J_{h\alpha}$ *es una aplicación diferenciable según Gateaux y su derivada* $J'_{h\alpha}$ *está dada por la siguiente expresión:*

$$J'_{h\alpha}(q) = Mq - \gamma_0(p_{h\alpha q}), \quad \forall q \in Q, \quad \forall h > 0, \quad \forall \alpha > 0. \tag{32}$$

(v) La condición de optimalidad está dada por:

$$J'_{h\alpha}\left(q_{h\alpha_{op}}\right) = 0 \Leftrightarrow q_{h\alpha_{op}} = \frac{1}{M}\gamma_0(p_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}}). \tag{33}$$

(vi) Si la constante M *verifica la siguiente desigualdad*

$$\mathrm{M} > \frac{\|\gamma_0\|^2}{\lambda_\alpha^2} \tag{34}$$

entonces el control óptimo $q_{h\alpha_{op}}$ *puede ser obtenido como el único punto fijo del operador* $W_{h\alpha}$*, es decir:*

$$q_{h\alpha_{op}} = \frac{1}{M}\gamma_0(p_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}}) \Leftrightarrow W_{h\alpha}\left(q_{h\alpha_{op}}\right) = q_{h\alpha_{op}} \tag{35}$$

que se define por:

$$W_{h\alpha} : Q \to Q \,/\, W_{h\alpha}(q) = \frac{1}{M}\gamma_0(p_{h\alpha q}) \tag{36}$$

donde $\lambda_\alpha = \lambda_1 Min(1, \alpha)\ (\lambda_1 > 0)$ *es la constante de coercividad de la forma bilineal* a_α*, a saber:*

$$\lambda_\alpha \|v\|_V^2 \le a_\alpha(v, v), \quad \forall v \in V. \tag{37}$$

Demostración. Las partes (i) a (v) surgen de (Tarzia, 2013). Para la parte (vi) basta demostrar que el operador $W_{h\alpha}$ es una contracción bajo la hipótesis (34).

3 ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA DE LOS CONTROLES OPTIMOS DISCRETOS CUANDO $\alpha \to \infty$

Teorema 3.
Se tiene los siguientes límites:

i) $\lim_{\alpha \to +\infty} \left\| u_{h\alpha q} - u_{\alpha q} \right\|_V = 0 \, , \forall q \in Q, \forall h > 0 \, ,$ (38)

ii) $\lim_{\alpha \to +\infty} \left\| p_{h\alpha q} - p_{hq} \right\|_V = 0, \forall q \in Q, \forall h > 0 \, .$ (39)

Demostración. Los dos resultados se obtienen de los siguientes pasos para $q \in Q, h > 0$ fijos:

a) Se tienen las estimaciones siguientes:

$$\begin{cases} \left\| u_{h\alpha q} - u_{hq} \right\|_V \le D_1, & \forall \alpha > 0 \\ (\alpha - 1) \int_{\Gamma_1} \left(u_{h\alpha q} - b \right)^2 d\gamma \le D_2, & \forall \alpha > 0 \end{cases} .$$

b) De las acotaciones anteriores se deduce que:

$$\exists \eta_{hq} \in V \, / \begin{cases} u_{h\alpha q} \xrightarrow{w} \eta_{hq} & \text{en } V \text{ débil (en } H \text{ fuerte) cuando } \alpha \to +\infty \\ \eta_{hq} / \Gamma_1 = b \end{cases} ,$$

c) Utilizando la convergencia anterior se puede pasar al límite cuando $\alpha \to +\infty$, y por unicidad de la ecuación variacional (18) se obtiene que:

$$\eta_{hq} = u_{hq} \, .$$

d) Utilizando las propiedades a) y b) anteriores, y relacionando las ecuaciones variacionales (18) y (22), se deduce que:

$$u_{h\alpha q} \to u_{hq} \text{ en } V \text{ fuerte cuando } \alpha \to +\infty \, .$$

e) Se utiliza una metodología análoga a los pasos a) a d) para la obtención del límite cuando $\alpha \to +\infty$ para los estados adjuntos.

Teorema 4.
Se tiene los siguientes límites:

(i) $\lim_{\alpha \to +\infty} \left\| u_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}} - u_{hq_{h_{op}}} \right\|_V = 0 \, , \quad \forall h > 0 \, ,$ (40)

$$(ii) \quad \lim_{\alpha\to+\infty} \left\| p_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}} - p_{hq_{h_{op}}} \right\|_V = 0\,, \quad \forall h > 0\,, \tag{41}$$

$$(iii) \quad \lim_{\alpha\to+\infty} \left\| q_{h\alpha_{op}} - q_{h_{op}} \right\|_Q = 0\,, \quad \forall h > 0\,. \tag{42}$$

Demostración. Los tres resultados se obtienen de los siguientes pastos para $h > 0$ fijo:

a) Para el caso particular $q = 0$ se tienen las siguientes estimaciones:

$$\begin{cases} \left\| u_{h\alpha 0} - u_{h0} \right\|_V \le E_1\,, \quad \forall \alpha > 0 \\ (\alpha - 1) \int\limits_{\Gamma_1} \left(u_{h\alpha 0} - b \right)^2 d\gamma \le E_2, \quad \forall \alpha > 1 \end{cases}.$$

b) De la definición de control óptimo discreto (24) se obtienen las siguientes estimaciones:

$$\frac{1}{2}\left\| u_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}} - z_d \right\|_H^2 + \frac{M}{2}\left\| q_{h\alpha_{op}} \right\|_Q^2 \le \frac{1}{2}\left\| u_{h\alpha 0} - z_d \right\|_H^2 \le E_3\,, \quad \forall \alpha > 0\,.$$

c) De las acotaciones anteriores se deduce que:

$$\begin{cases} \left\| u_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}} \right\|_H \le E_4, \quad \forall \alpha > 0 \\ \left\| q_{h\alpha_{op}} \right\|_Q \le E_5, \quad \forall \alpha > 0 \end{cases}.$$

d) Utilizando la ecuación variacional (22) para el sistema óptimo se deducen las siguientes estimaciones:

$$\begin{cases} \left\| u_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}} - u_{hq_{h_{op}}} \right\|_V \le E_6, \quad \forall \alpha > 0 \\ (\alpha - 1) \int\limits_{\Gamma_1} \left(u_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}} - b \right)^2 d\gamma \le E_7, \quad \forall \alpha > 0 \end{cases}.$$

e) En forma análoga, utilizando la ecuación variacional (23) para el sistema adjunto óptimo se deducen las siguientes estimaciones:

$$\begin{cases} \left\| p_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}} - p_{hq_{h_{op}}} \right\|_V \le E_8\,, \quad \forall \alpha > 0 \\ (\alpha - 1) \int\limits_{\Gamma_1} p_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}}^2 d\gamma \le E_9, \quad \forall \alpha > 1 \end{cases}.$$

f) De las acotaciones anteriores, se deduce que:

- $\exists\, f_h \in Q \,/\, q_{h\alpha_{op}} \xrightarrow{w} f_h$ en Q débil cuando $\alpha \to +\infty$
- $\exists\, \eta_h \in V \,/ \begin{cases} u_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}} \xrightarrow{w} \eta_h & \text{en } V \text{ débil (en } H \text{ fuerte) cuando } \alpha \to +\infty \\ \eta_h / \Gamma_1 = b \end{cases}$
- $\exists\, \xi_h \in V \,/ \begin{cases} p_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}} \xrightarrow{w} \xi_h & \text{en } V \text{ débil (en } H \text{ fuerte) cuando } \alpha \to +\infty \\ \xi_h / \Gamma_1 = 0 \end{cases}$

g) Utilizando las tres convergencias dadas en f) se puede pasar al límite cuando $\alpha \to +\infty$, obteniéndose por unicidad de las ecuaciones variacionales (18) y (19) que:

$$\eta_h = u_{hf_h} \quad , \quad \xi_h = p_{hf_h} \,.$$

h) Utilizando (20) y (21) se puede pasar al límite cuando $\alpha \to +\infty$, obteniéndose por unicidad del control óptimo (20) que:

$$f_h = q_{h_{op}} \,.$$

i) Utilizando f) y g), se obtiene que:

$$\begin{cases} \eta_h = u_{hf_h} = u_{hq_{h_{op}}} \\ \xi_h = p_{hf_h} = p_{hq_{h_{op}}} \end{cases} .$$

j) Utilizando las ecuaciones variacionales (18) y (22) para los sistemas, y las ecuaciones variacionales (19) y (23) para los sistemas adjuntos, se obtienen las convergencias fuertes siguientes:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \left\| u_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}} - u_{hq_{h_{op}}} \right\|_V = 0 \,, \quad \forall h > 0 \\ \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \int_{\Gamma_1} \left(u_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}} - b \right)^2 d\gamma = 0, \quad \forall h > 0 \end{cases} ,$$

y

$$\begin{cases} \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \left\| p_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}} - p_{hq_{h_{op}}} \right\|_V = 0 \,, \quad \forall h > 0 \\ \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \int_{\Gamma_1} p_{h\alpha q_{h\alpha_{op}}}^2 \, d\gamma = 0, \quad \forall h > 0 \end{cases} .$$

k) Se puede pasar al límite cuando $\alpha \to +\infty$ en las definiciones de los funcionales de costos (17) y (21) obteniéndose:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \left\| q_{h\alpha_{op}} \right\|_Q = \left\| q_{h_{op}} \right\|_Q , \quad \forall h > 0 \,.$$

l) De f) y k) se deduce la convergencia fuerte de los controles óptimos, a saber:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\left\|q_{h\alpha_{op}}-q_{h_{op}}\right\|_Q=0,\quad \forall h>0\,.$$

AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por PICTO Austral 2008 No. 073, PIP Nº 0460 de CONICET-UA, Rosario, Argentina y AFOSR-SOARD Grant FA9550-10-1-0023.

REFERENCES

Azzam, A., and Kreyszig, E., On solutions of elliptic equations satisfying mixed boundary conditions, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 13: 254-262, 1982.

Bergounioux, M., Optimal control of an obstacle problem, *Applied Mathematics and Optimization*, 36 : 147-172, 1997.

Brenner, S., and Scott, L.R., *The mathematical theory of finite element methods*, Springer, New York, 1994.

Casas, E., and Mateos, M., Uniform convergence of the FEM. Applications to state constrained control problems, *Computational and Applied Mathematics*, 21: 67-100, 2002.

Casas, E., and Raymond, J.P., Error estimates for the numerical approximation of Dirichlet boundary control for semilinear elliptic equations, *SIAM Journal on Control and Optimization,* 45: 1586-1611, 2006.

Ciarlet, P.G., *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

Gariboldi, C.M., and Tarzia, D.A., Convergence of boundary optimal control problems with restrictions in mixed elliptic Stefan-like problems, *Advances in Differential Equations and Control Processes*, 1: 113-132, 2008.

Kinderlehrer, D., and Stampacchia, G., *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, New York, 1980.

Lanzani, L., Capogna, L., and Brown, R.M., The mixed problem in L^p for some two-dimensional Lipschitz domain*, Mathematische Annalen*, 342: 91-124, 2008.

Lions, J.L., *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.

Shamir, E., Regularization of mixed second order elliptic problems, *Israel Journal of Mathematics*, 6: 150-168, 1968.

Tabacman, E.D., and Tarzia, D.A., Sufficient and/or necessary condition for the heat transfer coefficient on Γ_1 and the heat flux on Γ_2 to obtain a steady-state two-phase Stefan problem, *Journal of Differential Equations*, 77: 16-37, 1989.

Tarzia, D.A., *Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre*, CLAMI-CONICET, No. 5, Buenos Aires, 1981.

Tarzia, D.A., An inequality for the constant heat flux to obtain a steady-state two-phase Stefan problem, *Engineering Analysis*, 5: 177-181, 1988.

Tarzia, D.A., Numerical analysis for the heat flux in a mixed elliptic problem to obtain a discrete steady-state two-phase Stefan problem, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33:

1257-1265, 1996.

Tarzia, D.A., Numerical analysis of a mixed elliptic problem with flux and convective boundary conditions to obtain a discrete solution of non-constant sign, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 15: 355-369, 1999.

Tarzia, D.A., Análisis numérico de un problema de control óptimo elíptico frontera de tipo Neumann, en Congreso XXXI MECOM, *Mecánica Computacional,* 31: 3563-3573, 2012.

Tarzia, D.A., Análisis numérico de un problema de control óptimo elíptico frontera con condiciones mixtas, en Congreso IV MACI 2013, *MACI,* 4: 702-705, 2013.

Tröltzsch, F., *Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications*, American Mathematical Society, Providence, 2010.