

## UN ENFOQUE DE DISEÑO ÓPTIMO DE UN SISTEMA DE EXTRACCIÓN DE AGUA DULCE EN ACUÍFEROS

Cecilia I. Stoklas<sup>a</sup> y Víctor H. Cortínez<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca. 11 de abril 461, B8000LMI Bahía Blanca, Argentina. [stoklas@frbb.utn.edu.ar](mailto:stoklas@frbb.utn.edu.ar), [vcortine@frbb.utn.edu.ar](mailto:vcortine@frbb.utn.edu.ar), <http://www.frbb.utn.edu.ar>*

<sup>b</sup>*CONICET*

**Palabras Claves:** Diseño óptimo, elementos finitos, acuíferos no confinados, intrusión salina.

**Resumen.** El agua subterránea presente en zonas costeras puede contaminarse con agua de mar cuando el volumen bombeado es superior a la recarga natural del sistema. De esta forma es posible que se produzca una intrusión salina en dichos acuíferos. Este problema puede evitarse calculando de forma apropiada el máximo caudal de agua que puede ser extraído. En tal sentido, en el presente trabajo, se desarrolla una herramienta computacional de diseño óptimo integrada con un proceso de simulación a los efectos de determinar el mayor rendimiento posible que puede tener el sistema de extracción. Tal rendimiento se mide en términos de la maximización del volumen de agua a extraer. El procedimiento de optimización está basado en una técnica de recocido simulado en combinación con el método de los elementos finitos (MEF). El modelo fue implementado en el programa de simulación por elementos finitos FlexPDE.

## 1 INTRODUCCIÓN

La necesidad de disponer de agua potable en cantidad y calidad es un factor de gran importancia a la hora de cubrir aspectos socioeconómicos. Sobre todo en estos tiempos donde se observa que las tasas de crecimiento tanto urbano como agrícola-ganadero sostienen un aumento progresivo. Es por ello que los acuíferos de agua dulce se han convertido en una de las opciones más convenientes para afrontar tal situación y en muchos casos representan el único recurso de abastecimiento.

Probablemente aquellos lugares que se ven más afectados por esta realidad correspondan a ciudades turísticas aledañas a zonas costeras, donde rápidamente en períodos estivales su población aumenta significativamente repercutiendo directamente en dicho recurso. Esta situación conduce a grandes extracciones de agua potable de forma no controlada que, sumado a condiciones climatológicas adversas tales como largos períodos de sequías, puede generar una disminución en la napa dando lugar al desarrollo de una intrusión salina. Este fenómeno varía de acuerdo al volumen de recarga del acuífero ya que en épocas de menor recarga el acuífero disminuye avanzando el frente de agua salada tierra adentro y en períodos de mayor recarga dicho frente retrocede hacia el mar. Por lo tanto esta dinámica propia del sistema puede alterarse cuando la tasa de extracción por bombeo de agua dulce es superior a la recarga, provocando un descenso de la napa. Consecuentemente puede producirse un ingreso de cuña salina al acuífero deteriorando la calidad del mismo, y si bien es posible revertir esta situación, su remediación puede llegar a ser lenta y costosa.

Para asegurar un suministro de agua potable sostenible en el tiempo, resulta necesaria la práctica de políticas dirigidas al control y gestión del agua subterránea que garanticen por ejemplo que el volumen de caudal extraído de agua cubra con las necesidades actuales y futuras, sujetas a la limitación de la no intrusión de agua salada en cada pozo de extracción y a otras restricciones relacionadas con la capacidad de bombeo. Además, para no sobreexplotar el sistema, el volumen total de extracción no debe superar la recarga natural del mismo.

En tal sentido los modelos de simulación numérica junto con el uso de técnicas de optimización han resultado ser herramientas eficientes para la predicción en el comportamiento de los sistemas naturales debido a acciones antrópicas y, consecuentemente, para la búsqueda de la mejor opción o solución al problema planteado.

De esta manera, a los efectos de determinar el mayor rendimiento posible que puede tener un sistema de extracción de agua dulce sin que la interfaz de agua dulce-salada alcance el fondo del pozo, se desarrolla una herramienta computacional de diseño óptimo integrada con un proceso de simulación basado en el método de elementos finitos (MEF).

Inicialmente el método consiste en determinar para cada pozo considerado la profundidad de dicha interfaz utilizando funciones de influencia resueltas mediante el MEF. Las mismas son obtenidas convenientemente a partir de la ecuación diferencial lineal del potencial de flujo propuesta por (Strack, 1976) para aguas subterráneas en acuíferos no confinados. Luego haciendo uso de un procedimiento de optimización se determina el mayor rendimiento posible que puede tener el sistema de extracción evaluando en cada búsqueda el cumplimiento de las restricciones del problema, es decir la ausencia de intrusión salina y la capacidad (o eficiencia) de bombeo de agua dulce por cada pozo.

El modelo computacional planteado es implementado en el programa de elementos finitos FlexPDE (PDE Solution Inc, 2005) y constituye una extensión del trabajo presentado por (Mantoglou et al. 2004b, a). La modificación consiste en la utilización de funciones de influencia para analizar la posición de la interfaz entre el agua dulce y salada. Esto hace al procedimiento más eficiente desde el punto de vista computacional. Finalmente se analizan algunos ejemplos para determinar las ventajas de la presente metodología.

## 2 MODELO DE FLUJO SUBTERRÁNEO

Se considera un acuífero subterráneo costero no confinado de acuerdo con el esquema mostrado en la [Figura 1](#). Para su modelización es posible considerar ciertas aproximaciones que son factibles de aplicar en el estudio de las aguas subterráneas y en problemas de intrusión salina. Las mismas suponen en primer lugar que en la zona donde se separa el agua dulce con el agua salada no se produce mezcla, esto quiere decir que se asume una superficie de separación o interfaz. Esta aproximación es razonable en problemas de escala regional, siendo la zona de transición relativamente pequeña en relación a la escala real del problema. En segundo lugar se asume que no existen pérdidas de carga del agua de mar tierra adentro ni tampoco gradientes verticales de carga. En tercer lugar se considera que el movimiento del flujo es horizontal (aproximación de Dupuit). De esta manera se define el problema sobre un dominio bidimensional integrando verticalmente la ecuación de flujo. Finalmente la posición de la interfaz se puede determinar asumiendo que el agua dulce “flota” sobre el agua salada que se encuentra detenida, es decir que para régimen estacionario es posible deducir la relación entre la altura piezométrica  $H$  con la profundidad de la interfaz agua dulce-salada  $E$  establecida por ([Ghyben, 1889](#); [Herzberg, 1901](#)) que se expresa de la siguiente manera:

$$S E = H - D \quad , \quad (1)$$

siendo  $D$  la profundidad del acuífero medido a partir de su base hasta el nivel medio del mar y  $S$  la siguiente relación entre las densidades de agua salada  $\rho_s$  y dulce  $\rho_d$ :

$$S = \frac{(\rho_s - \rho_d)}{\rho_d} \quad , \quad (2)$$

Con la hipótesis anterior, la ecuación para flujo subterráneo en acuíferos no confinados resulta ser la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K B \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K B \frac{\partial H}{\partial y} \right) + N - \sum_{i=1}^M Q_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) = 0 \quad , \quad (3)$$

donde  $K$  es la conductividad hidráulica,  $N$  la recarga superficial,  $M$  el número de pozos,  $\delta$  la función Delta de Dirac,  $Q_i$  la tasa de bombeo en cada pozo y  $B$  es la profundidad total del acuífero medida a partir de la napa freática calculada de la siguiente manera:

$$B = H - D + E \quad , \quad (4)$$

Debe observarse que la expresión (3) es una ecuación de difusión no lineal.

Basado en las aproximaciones anteriores ([Strack, 1976](#)) transformó la expresión (3) en una única ecuación diferencial lineal aplicable tanto para zonas donde se encuentra agua dulce como salada. De esta manera el problema se reduce a la siguiente ecuación gobernante:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + N - \sum_{i=1}^M Q_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) = 0 \quad , \quad (5)$$

donde  $\phi$  corresponde a un potencial de flujo.

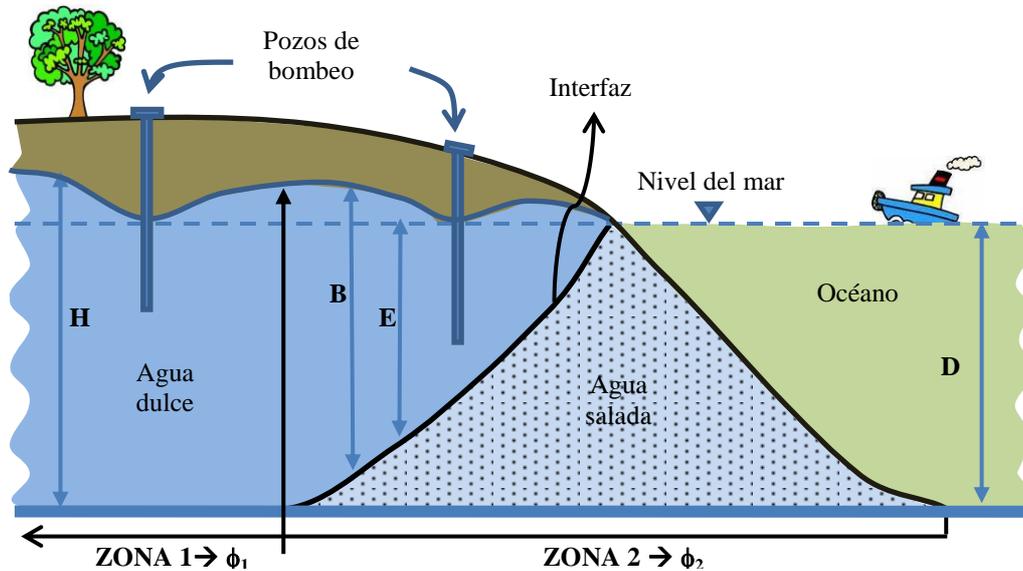


Figura 1: Sección transversal de un acuífero no confinado. Esquema de interfaz agua dulce-salada.

Existen dos zonas, separadas por el lugar geométrico donde la interfaz se corta con la base del acuífero (ver Figura 1) y que presentan características diferentes. En la zona 1 el comportamiento es netamente de un acuífero no confinado de agua dulce, mientras que la zona 2 abarca toda el área de transición de la interfaz agua dulce-salada. De esta manera el potencial se define de la siguiente forma:

$$\phi = \begin{cases} \frac{1}{2} [H^2 - (1+S)D^2] & \text{para la zona 1} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{S+1}{S} \right) (H-D)^2 & \text{para la zona 2} \end{cases}, \quad (6a,b)$$

Como condición de frontera se considera que en los puntos correspondientes al sector de la costa la profundidad de la interfaz agua dulce-salada es nula, mientras que en los bordes impermeables la derivada con respecto a la normal es nula (no existe flujo subterráneo):

$$K \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad (7)$$

siendo  $n$  la dirección perpendicular al borde.

La solución de la ecuación (5) para las condiciones de borde apropiadas puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\phi(x, y) = N\phi_0(x, y) + \sum_{i=1}^M Q_i \phi_i(x, y), \quad (8)$$

donde  $\phi_0$  y  $\phi_i$  corresponden a las funciones de influencia de cada pozo y vienen dadas mediante la solución de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial \phi_0}{\partial y} \right) + 1 = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) - \delta(x-x_i) \delta(y-y_i) = 0 \quad . \quad (10)$$

Una vez resueltas las ecuaciones (9) y (10), utilizando la expresión (1) junto con la (6b), es posible determinar la profundidad de la interfaz en la localización del pozo *j*-ésimo de la siguiente manera:

$$E_j = \sqrt{\frac{2}{S(S+1)} \left[ N\phi_0(x_j, y_j) + \sum_{i=1}^M Q_i \phi_i(x_j, y_j) \right]} \quad . \quad (11)$$

Debe observarse que esta expresión es solamente válida si el pozo se encuentra ubicado en la zona 2 y puede definirse de forma generalizada como se expresa a continuación:

$$E_j^* = \begin{cases} D & \text{si } E_j \geq D \\ E_j & \text{si } E_j \leq D \end{cases} \quad , \quad (12)$$

Lo que significa que si el valor de la ecuación (11) es superior al nivel medio del mar *D* la misma se encuentra en la zona 1 y se adopta igual a esta última. Caso contrario se aplica la expresión (11).

### 3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO

Para obtener la solución adecuada al problema planteado es necesario en primer lugar determinar las funciones de influencia  $\phi_0$  y  $\phi_i$  ( $i=1,2,\dots,M$ ) que intervienen en la expresión (11). Las correspondientes ecuaciones son resueltas mediante MEF.

Luego es posible formular el problema de optimización.

#### 3.1 Maximización del caudal a extraer

El problema de la determinación del caudal máximo de agua dulce posible de extraer por cada pozo, sin que dicho proceso produzca una intrusión salina puede ser formulado de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar : } Q_T = \sum_{j=1}^M Q_j \beta_j \quad , \quad (13)$$

siendo  $Q_j = Q_{max} \alpha_j$

$$\text{Sujeto a } \begin{cases} 0 \leq \alpha_j \leq 1 \\ \beta_j = \begin{cases} 1 & \text{si } Q_j \geq Q_{min} \\ 0 & \text{si } Q_j \leq Q_{min} \end{cases} \\ E_j^* \geq E_P \quad \text{si } \beta_j = 1 \end{cases} \quad , \quad (14)$$

donde  $Q_T$  es la función objetivo a maximizar correspondiente al volumen total de extracción de agua dulce de *M* pozos existentes,  $Q_j$  son los caudales a extraer de cada pozo,  $\alpha_j$  corresponde a las variables de diseño,  $E_P$  la profundidad máxima del pozo medida desde el nivel del mar,  $Q_{max}$  es el caudal máximo de extracción que depende de la capacidad de las bomba,  $Q_{min}$  es un caudal mínimo debajo del cual la construcción del pozo no resulta eficiente y  $\beta_j$  es un indicador. Si su valor es 0 el pozo no se construirá.

La primera restricción determina el rango de búsqueda de las variables de diseño. Debe notarse que corresponden a asumir el caudal de cada pozo como una cantidad positiva menor

que el caudal máximo establecido  $Q_{max}$ . La segunda indica si el pozo será o no construido y finalmente la tercera establece que la intrusión salina no debe alcanzar el fondo de los pozos.

De esta manera el problema de diseño planteado se reduce a un proceso de búsqueda de las variables de diseño  $\alpha_j$ , las que se obtendrán mediante el método de “Recocido Simulado”. Es claro que las variables óptimas serán aquellas que maximicen la función (13). Este proceso es muy rápido gracias a la simplicidad para la evaluación de las restricciones.

En tal sentido debe observarse que una vez obtenidas las funciones de influencia la evaluación de la intrusión salina se realiza analíticamente mediante la expresión (11). Por otra parte la determinación de tales funciones requiere resolver numéricamente  $M+I$  problemas, donde  $M$  es el número de pozos. Esto resulta diferente al enfoque utilizado por (Mantoglou et al. 2004b, a) quienes obtienen la solución numérica de la ecuación (5) para cada escenario de extracción, lo cual en general implica la resolución computacional de un mayor número de casos y por consiguiente el tiempo de calculo resulta mayor que el del método aquí propuesto.

### 3.2 Método de “Recocido Simulado” (Simulated Annealing)

El método de “Recocido Simulado”, en inglés Simulated Annealing (SA) por su analogía con el proceso físico de enfriamiento de metales, se trata de una técnica heurística de optimización (Kirkpatrick et al., 1983; Stoklas, C.I., 2011; Stoklas y Cortínez, 2012) basada en una generación aleatoria de soluciones factibles, cuya principal característica es la de encontrar una buena aproximación al valor óptimo global de una función evitando la convergencia local en problemas de gran escala. En la Figura 2 se muestra el correspondiente algoritmo, donde  $X$  es el conjunto de variables de diseño  $\alpha_j$ ,  $T_E$  es la tolerancia de error de la función  $Q_T$  definida en (13). Por otra parte el parámetro  $\gamma$  se calcula en la forma:

$$\gamma = \left( \frac{T_i}{T_{max}} \right)^G, \quad (15)$$

donde  $T_i$  es el número de iteración  $i$ -ésima,  $T_{máx}$  es el número total de iteraciones y  $G$  corresponde a un parámetro de ajuste mayor a 1. A medida que el algoritmo avanza,  $\gamma$  va aumentando de manera tal que la probabilidad de aceptar aquellas soluciones factibles que no mejoren la función objetivo va disminuyendo.

<p><b>Paso 1.</b> Inicializar Variables de Diseño:  <math>X_{max}=X_0</math>, <math>X_{corriente}=X_0</math>, <math>Q_{Tmax}=Q_T(X_0)</math>, <math>Q_{Tcorriente}=Zp(X_0)</math></p> <p><b>Paso 2.</b> Repetir <math>iter</math> veces</p> <p><b>2.1</b> Calcular <math>X' \in N(X)</math> (entorno de <math>X</math>) y evaluar el cambio en la función objetivo  <math>\Delta = Q_T(X') - Q_{Tcorriente}</math></p> <p><b>2.2</b> Decidir si <math>X'</math> es aceptada  si <math>\Delta &gt; 0</math> ir a <b>2.3</b>  si no generar una variable aleatoria <math>p \in (0,1)</math>  si <math>p &lt; \exp\left(\frac{\gamma\Delta}{ Q_{Tcorriente} T_E}\right)</math> ir a <b>2.3</b>  si no ir a <b>2.1</b></p> <p><b>2.3</b> Actualizar <math>X_{corriente}=X'</math> y <math>Q_{Tcorriente}=Q_T(X')</math>.  Decidir si corresponde al valor máximo:  Si <math>Q_T(X') &gt; Q_{Tmax}</math> ir a <b>2.4</b>  Si no, ir a <b>2.1</b></p> <p><b>2.4</b> Actualizar <math>X_{max}=X'</math> y <math>Q_{Tmax}=Q_T(X')</math> ir a <b>2.1</b></p>
---

Figura 2: Algoritmo de “recocido simulado”.

Si bien el esquema que se muestra en la [Figura 2](#) es solo explicativo, en el mismo puede notarse que el procedimiento utiliza dos variables iniciales de prueba,  $X_{max}$  y  $X_{corriente}$  así como las correspondientes evaluaciones de la función objetivo,  $Q_{Tmax}$  y  $Q_{Tcorriente}$ .  $X_{max}$  almacena el valor máximo obtenido hasta el momento y  $X_{corriente}$  el último valor aceptado.

El procedimiento comienza inicializando tales variables y el proceso de búsqueda consiste en una iteración de los pasos que se comentan a continuación.

Se busca un valor de prueba de las variables de diseño  $X'$  cercano al vector  $X_{corriente}$  (de manera aleatoria). Se evalúa la función objetivo en este valor de prueba y se la compara con el valor  $Q_{Tcorriente}$ . Si la función objetivo mejora (se hace mayor) la variable  $X'$  sustituye a  $X_{corriente}$ . Sin embargo aun cuando la función objetivo empeore (disminuya) todavía puede aceptarse la solución de prueba con cierta probabilidad. Este último paso es el que impide que la búsqueda quede atrapada en un máximo local. Por supuesto como tal probabilidad se reduce con el transcurso de las iteraciones, las excursiones ascendentes van disminuyendo, lo que asegura que luego de un número de iteraciones adecuado la búsqueda se dirija hacia un máximo local, presumiblemente coincidente (o cercano al global).

Claro está que la función objetivo correspondiente a las variables  $X_{corriente}$  se comparan en cada caso con la función objetivo que le corresponde a  $X_{max}$ , actualizando esta última a medida que se van encontrando valores mayores.

#### 4 EJEMPLO NUMÉRICO

El modelo computacional propuesto se aplica a un caso hipotético de una ciudad turística situada en cercanías al mar que necesita abastecer de agua potable a una población, que en época estival triplica su cantidad. Como ejemplo se estima una población permanente de 6000 habitantes. Para ello se proyecta la construcción de una batería de 9 pozos ubicados estratégicamente para la extracción de agua dulce en un área de 16 km<sup>2</sup> aproximadamente, sobre un suelo conformado por una capa de arena y otra de mezcla de arenas y grava. Los valores asumidos de conductividad hidráulica ( $K$ ) son de 25 y 10 m/d respectivamente. Por otra parte se estima que la precipitación media anual supera los 700 mm. Tales cuantificaciones se ilustran en la [Figura 3](#).

Se desea determinar el volumen máximo que puede bombearse en cada uno de los pozos a los efectos de no contaminar la napa de agua dulce con agua de mar. Para ello, si bien la capacidad de extracción puede variar entre 0 y 1500 m<sup>3</sup>/d, se establece que si el pozo  $j$ -ésimo bombea una cantidad inferior a 100 m<sup>3</sup>/d el mismo no será considerado por resultar antieconómico. Asimismo se fija una perforación máxima de 15 m por cada estación de bombeo.

En tal sentido se analiza la construcción de dichos pozos planteando dos problemas de diseño. El primero de ellos (A) consiste en determinar el volumen bombeado de agua potable suponiendo que todas las bombas deben extraer el mismo caudal, mientras que en el segundo diseño (B) se suponen volúmenes diferentes para cada pozo.

Para ambos diseños se realizan y comparan los siguientes enfoques alternativos:

##### ALTERNATIVA (A)

1. Diseño de referencia: Diseñar la construcción de los 9 pozos de forma tal que, con un consumo promedio de 300 lt/día, se llegue a cubrir con la demanda total en períodos estivales;
2. Búsqueda exhaustiva del volumen máximo necesario.

## ALTERNATIVA (B)

3. Diseño de referencia factible;
4. Diseño Optimizado: Método de “recocido simulado” (empleando 10, 100, 500 y 1000 iteraciones).

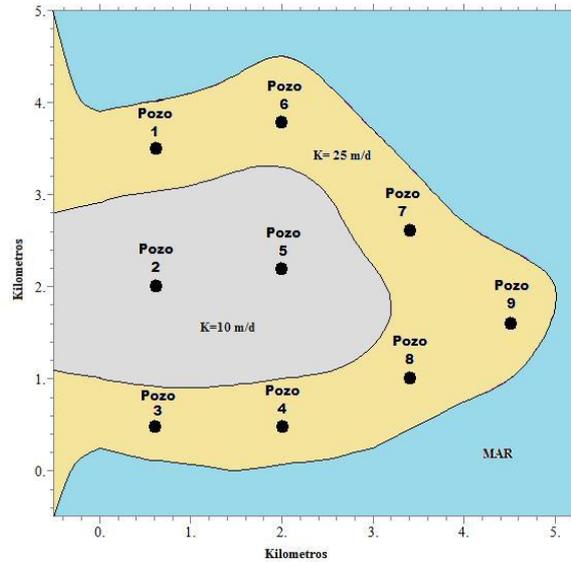


Figura 3: Representación del área de estudio.

El enfoque 1 de la alternativa (A), plantea un diseño que garantiza el abastecimiento de agua potable en períodos estivales de 5400 m<sup>3</sup>/día. Sin embargo el mismo no cumple con la limitante ambiental en el pozo 9, como puede observarse en la [Tabla 1](#) indicado con las siglas *IS* (Intrusión Salina). En el segundo enfoque se recurre a una búsqueda exhaustiva (tomando un  $\Delta\alpha=0.05$ ) del volumen máximo que debe tener cada pozo para poder cubrir con dicha demanda sin que se produzca intrusión. De esta forma se plantea la siguiente expresión:

$$Q_T = \alpha Q_{\max} \sum_{j=1}^M \beta_j \quad , \quad (16)$$

Nuevamente se observa en la [Tabla 1](#) que si bien dicho enfoque cumple con las restricciones del problema no llega a cubrir con el volumen mínimo requerido.

Pozo	Diseño para abastecimiento		Búsqueda Aleatoria	
	$Q_j$ (m <sup>3</sup> /d)	$E_j$ (m)	$Q_j$ (m <sup>3</sup> /d)	$E_j$ (m)
1	600	35	410,5	35
2	600	35	410,5	35
3	600	35	410,5	35
4	600	35	410,5	35
5	600	35	410,5	35
6	600	35	410,5	35
7	600	35	410,5	35
8	600	35	410,5	35
9	600	IS	410,5	15
<b>Totales</b>	<b>5400 (m<sup>3</sup>/d)</b>		<b>3694,5 (m<sup>3</sup>/d)</b>	

Tabla 1: Comparación de los valores obtenidos en con la alternativa de diseño A.

Seguidamente en la [Tabla 2](#) se muestran los valores obtenidos correspondientes a la alternativa (B), donde el tercer enfoque corresponde a un diseño arbitrario y factible ya que verifica las restricciones del problema como también la demanda necesaria, y se lo utiliza a los efectos de ser comparado con el método propuesto en el presente trabajo (enfoque 4).

Si bien ambos diseños cumplen con la restricción ambiental, es decir verifican la no intrusión salina en cada uno de los pozos, el desarrollo del enfoque basado en el método de optimización “recocido simulado” implica un mayor volumen de caudal total extraído, siendo aproximadamente del orden del 47% con respecto al diseño de referencia.

Nº de pozo	Diseño de referencia		Método de Recocido Simulado (SA)	
	$Q_i$ (m <sup>3</sup> /d)	$E_i$ (m)	$Q_i$ (m <sup>3</sup> /d)	$E_i$ (m)
1	500	35	1164	24
2	600	35	1500	19
3	500	35	967	25
4	400	35	854	21
5	1400	23	1295	26
6	400	35	552	35
7	700	35	583	35
8	700	29	644	31
9	200	29	363	18
<b>Totales</b>	<b>5400 (m<sup>3</sup>/d)</b>		<b>7922 (m<sup>3</sup>/d)</b>	

Tabla 2: Comparación de los valores obtenidos con la alternativa de diseño B.

A los efectos de demostrar la eficiencia del método SA, este último es comparado con otro enfoque de optimización basado en una búsqueda aleatoria de las variables de diseño, es decir un simple método de prueba y error. Para ello se realizaron distintas iteraciones cuyos valores obtenidos se indican en la siguiente [Figura 4](#).

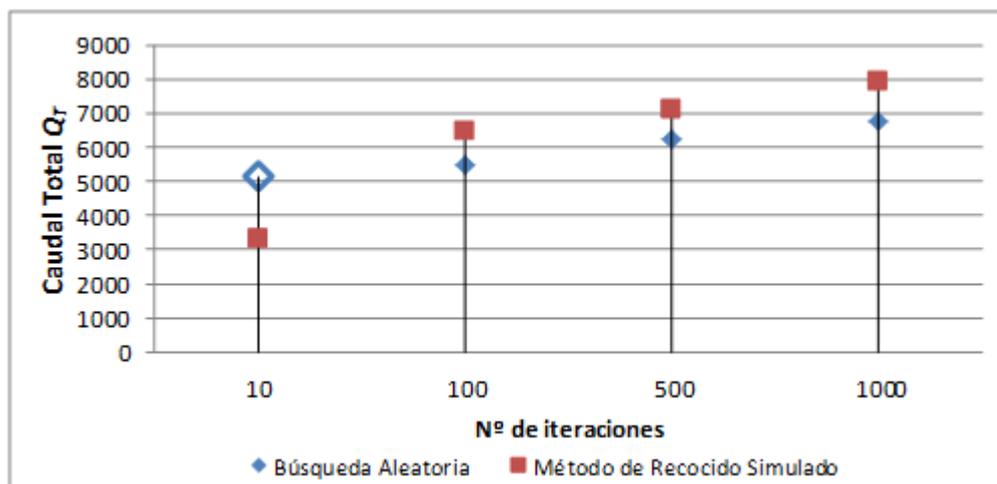


Figura 4: Comparación de los valores obtenidos para diferentes iteraciones.

Como puede observarse en la figura el marcador  $\diamond$  indica que la búsqueda aleatoria realizada de 10 iteraciones no es suficiente para poder llegar a una solución factible, es decir no verificó la restricción ambiental. Sin embargo para la misma cantidad de iteraciones con el método de SA sí se obtuvo una solución que cumple con la limitación ambiental cuyo valor total es de 3306 m<sup>3</sup>/d, pero no logra cubrir la demanda prevista. No obstante ello, en todos los casos el empleo de este último método resultó ser más eficiente que una búsqueda por prueba

y error. Los resultados ampliados de esta comparación para cada una de las iteraciones se muestran en la [Tabla 3](#) donde los valores nulos indican la anulación del pozo en la solución final.

N° de Iteración	Búsqueda Aleatoria								Método de recocido simulado							
	10		100		500		1000		10		100		500		1000	
N° de pozo	$Q_j$ (m <sup>3</sup> /d)	$E_i$ (m)														
1	671	35	979	35	442	35	1201	27	180	35	1103	29	755	35	1164	24
2	169	35	348	35	1330	35	1053	35	898	35	1430	35	1370	35	1500	19
3	1259	IS	1012	31	1039	23	928	31	163	35	753	35	1071	18	967	25
4	1065	IS	410	35	838	26	755	30	356	35	239	35	813	25	854	21
5	0	0	692	35	564	35	932	35	686	35	1221	35	1021	35	1295	26
6	635	35	777	29	628	35	346	35	163	35	579	35	616	35	552	35
7	230	35	745	35	860	28	244	35	166	35	417	35	760	32	583	35
8	250	35	270	35	224	35	882	17	380	35	734	28	561	35	644	31
9	868	IS	261	26	307	23	390	16	314	23	0	0	149	31	363	18
<b>Totales</b>	<b>5147</b>		<b>5494</b>		<b>6232</b>		<b>6731</b>		<b>3306</b>		<b>6476</b>		<b>7116</b>		<b>7922</b>	

Tabla 3: Valores finales obtenidos en cada iteración.

Por otra parte, se realizó además una comparación entre los dos enfoques de la alternativa (B) para distintas secuencias aleatorias de búsqueda de las variables de diseño a los efectos de poder determinar el comportamiento de la función objetivo para ambos casos. Los resultados obtenidos se indican en la [Figura 5](#), donde es posible observar que el método SA converge generalmente con mayor rapidez.

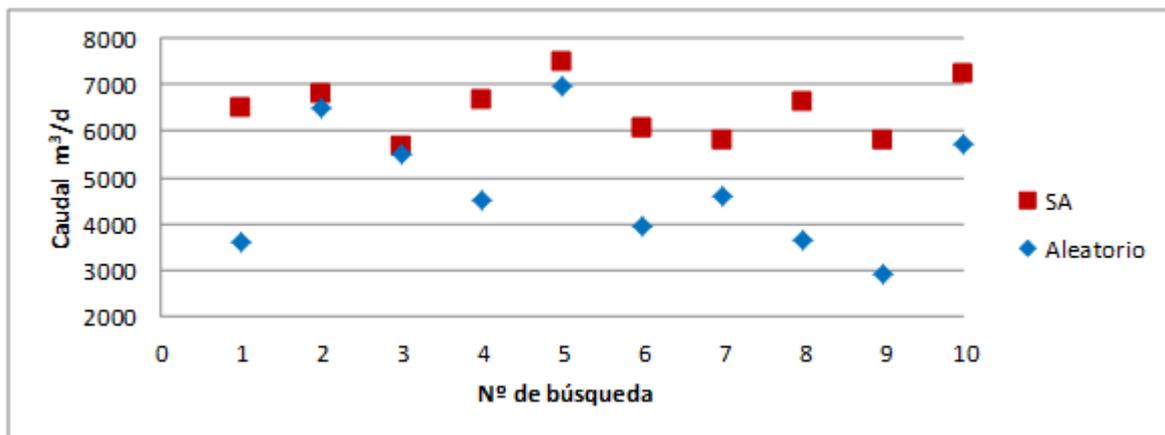


Figura 5: Comparación entre los dos enfoques de diseño para diferentes valores iniciales.

En la [Figura 6](#) se muestra la salida gráfica del nivel de la superficie freática, calculada con el MEF. La misma corresponde a la solución óptima obtenida con el método de “recocido simulado”.

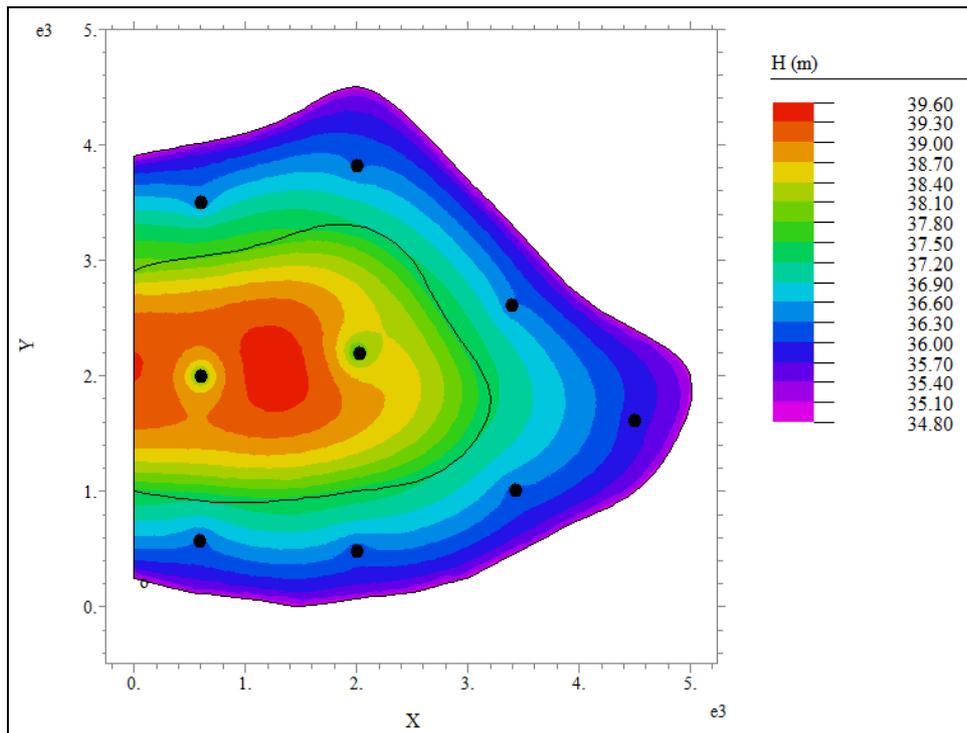


Figura 6: Variación de los niveles freáticos (H) sobre el área de estudio.

En ella puede observarse que la superficie freática (H) máxima, ubicada en el centro de la región, se encuentra a 4.6 m por encima del nivel del mar, y se deprime en cada localización de los pozos que bombean agua. Estos hundimientos denominados conos de descenso son graficados mediante cortes transversales, en las Figuras 7a (pozos 1, 2 y 3), 7b (pozos 4, 5 y 6), 7c (pozos 7 y 8) y 7d (pozo 9).

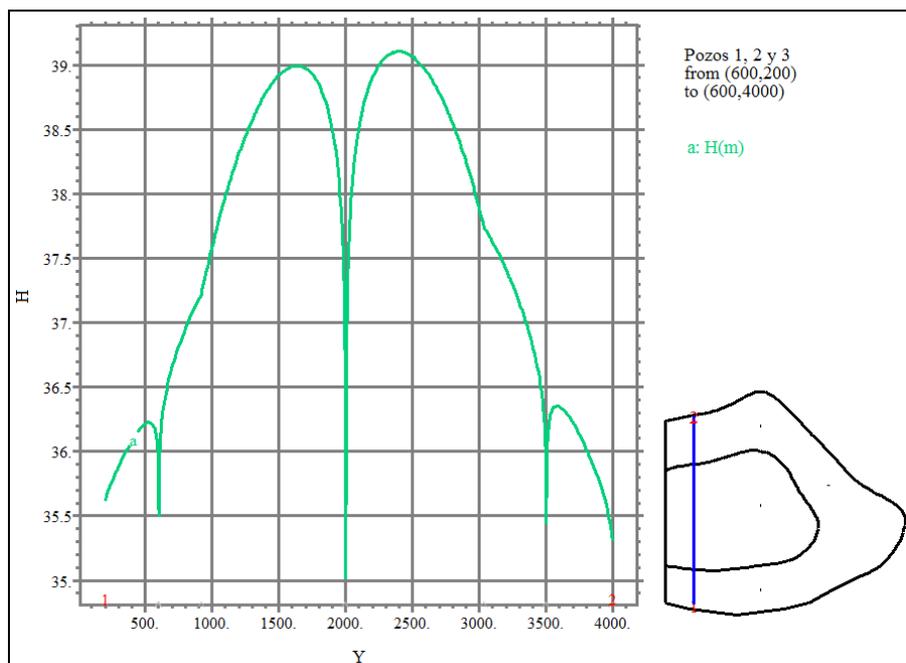


Figura 7a: Corte transversal del cono de descenso de los pozos 1, 2 y 3.

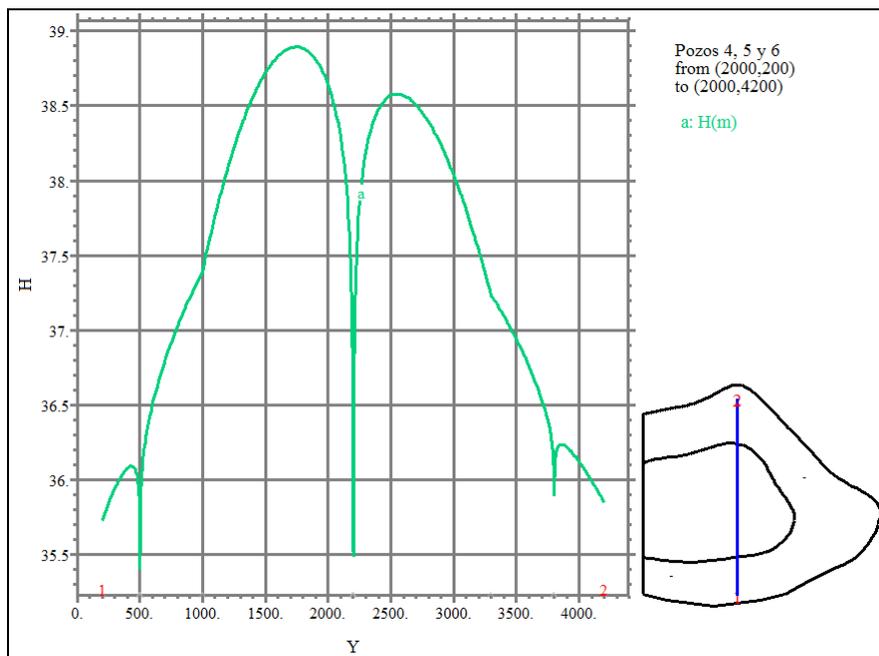


Figura 7b: Corte transversal del cono de descenso de los pozos 4, 5 y 6.

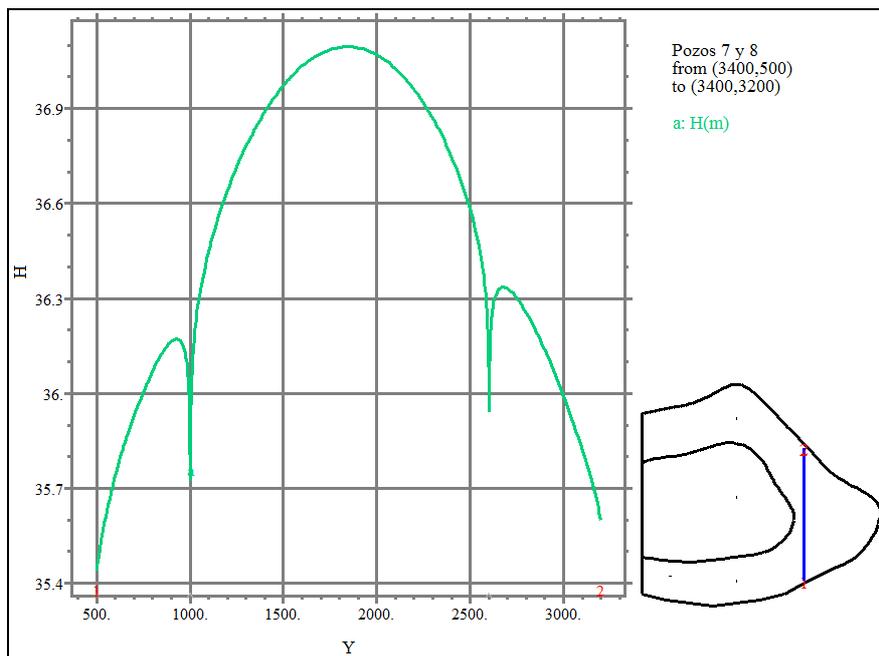


Figura 7c: Corte transversal del cono de descenso de los pozos 7 y 8.

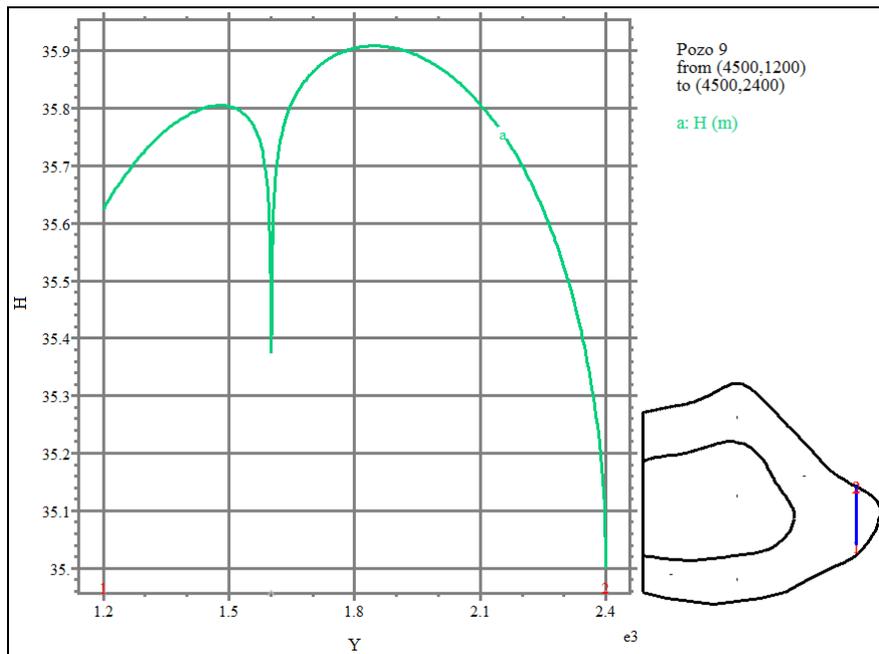


Figura 7d: Corte transversal del cono de descenso del pozo 9.

En la [Figura 8](#) se grafica la distribución del campo vectorial normalizado del flujo del agua subterránea, es decir se muestra solamente la dirección del flujo. El mismo se obtiene al dividir el siguiente vector de flujo  $\vec{q}$  por su magnitud:

$$\vec{q} = \left( -K \frac{\partial \phi}{\partial x}; -K \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) , \tag{17}$$

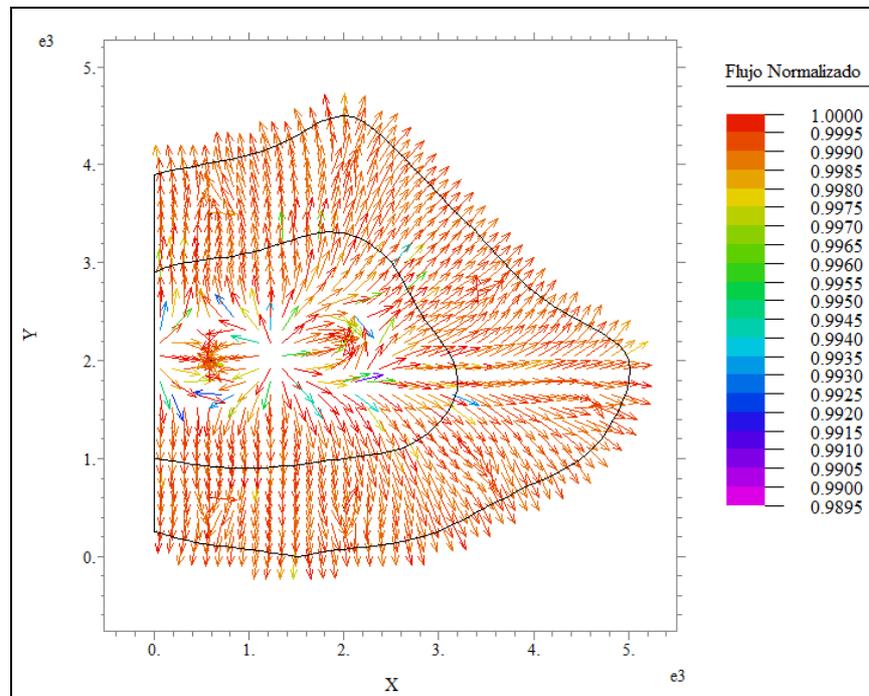


Figura 8: Campo vectorial normalizado del flujo de agua.

## 5 CONCLUSIONES

Se desarrolló un modelo computacional para el diseño óptimo del volumen total de extracción de agua potable en una zona costera, sin que se produzca una intrusión salina dentro del acuífero de agua dulce. Este enfoque maximiza el volumen bombeado y sirve como herramienta de planificación y gestión para los gestores del recurso hídrico.

El procedimiento se basó en el uso de coeficientes de influencia obtenidos a partir de la ecuación de potencial de flujo, resueltas mediante el método de elementos finitos. La expresión obtenida para la posición de la interfaz agua dulce-salada (11) permite calcular rápidamente las restricciones del problema planteado. Tal enfoque ha sido combinado con la técnica de “recocido simulado” a los efectos de establecer las variables de diseño óptimas.

Se ha demostrado que dicha metodología se comporta muy eficientemente.

El presente enfoque supone una mejora al propuesto por (Mantoglou et al., 2004b) y es aplicable a otros casos de diseño como por ejemplo determinar la mejor ubicación de los pozos o bien aumentar el número de éstos.

Asimismo la metodología empleada es extrapolable para acuíferos confinados como también para otros enfoques de diseño como por ejemplo la determinación del máximo beneficio económico con el mayor caudal total de extracción, respetando restricciones ambientales.

## 6 AGRADECIMIENTOS

La presente investigación se ha realizado en el marco del proyecto “Modelos matemáticos en Ingeniería Ambiental: Problemas Directos e Inversos” (CIMTA, Universidad Tecnológica Nacional). Asimismo forma parte del trabajo de tesis desarrollado por C.I. Stoklas, bajo la dirección del Dr. V.H. Cortínez, para obtener el título de Dr. en Ingeniería en la Facultad Regional de Bahía Blanca de la Universidad Tecnológica Nacional.

## REFERENCIAS

- FlexPDE 5.08 User Manual, Copyright ©, PDE Solutions Inc, [www.pdesolutions.com](http://www.pdesolutions.com), 2005.
- Ghyben, B.W., Nota in verband met de voorgenomen put boring nabij Amsterdam. *The Hague. K. Inst. Ing. Tydschrift*, 8–22, 1889.
- Herzberg, A., Die Wasserversorgung einiger Nordseebäder. *Journal für Gas-beleuchtung und Wasserversorgung*, 44:815–819, 842–844, 1901.
- Kirkpatrick, S. Gelatt, C. D. y Vecchi, M. P. Optimization by Simulated Annealing. *Science*, 220:4598-1983.
- Mantoglou, A. and Giannouloupoulos, P., Sustainable yield of coastal aquifers: simulation, optimization and application to Santorini island. *Protection and restoration of the environment VII*, Mykonos, 2004a.
- Mantoglou, A., Papantoniou, M. and Giannouloupoulos, P. Management of coastal aquifers based on nonlinear optimization and evolutionary algorithms. *Journal of Hydrology*, 297:209–228, 2004b.
- Stoklas, C.I. Un enfoque de optimización para el control de vertido de efluentes urbanos en aguas poco profundas. *Tesis de Magíster en Ingeniería Ambiental. Universidad Tecnológica Nacional*, 2011.
- Stoklas, C.I. and Cortínez, V.H. Un enfoque de optimización para el control de vertido de efluentes urbanos en ríos. *Mecánica Computacional*, 30:3577-3594, 2011.
- Strack, O.D.L., A single potential solution for regional interface problems in coastal aquifers. *Water Resources Research*, 12:1165-1174, 1976.