

## **APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS VOLÚMENES FINITOS AL CÁLCULO DE LA RADIACIÓN TÉRMICA EN CAVIDADES CILÍNDRICAS**

**Rebollo, Daniel; Bocca, José Carlos; Rodriguez, Carlos Augusto**

*Universidad Nacional de San Juan, Facultad de Ingeniería, Departamento de Electromecánica.  
Avenida Libertador San Martín (Oeste) 1109 - CPA: J5400ARL - San Juan - Argentina.  
[drebollo.de.fi.unsj@gmail.com](mailto:drebollo.de.fi.unsj@gmail.com)*

**Palabras claves:** Radiación Térmica, Coordenadas Cilíndricas, Volúmenes Finitos.

**Resumen.** En este trabajo se ha simulado numéricamente un proceso de transferencia de calor por radiación térmica en una cavidad cilíndrica rellena con un medio que absorbe, emite y dispersa anisotrópicamente la radiación térmica. Se ha desarrollado un código computacional basado en el método de los volúmenes finitos.

En trabajos anteriores se analizó el proceso de transferencia de calor por radiación térmica con dispersión anisotrópica en cavidades multidimensionales de forma arbitraria en coordenadas cartesianas con diferentes configuraciones térmicas y variadas condiciones de borde.

En este trabajo se extiende al análisis a una cavidad tridimensional en coordenadas cilíndricas, rellena con un medio gris absorbente, emisor y anisotrópicamente dispersante. Se han desarrollado cuatro códigos independientes para resolver problemas en geometrías (i) unidimensionales a lo largo del radio, (ii) bidimensionales independientes de la altura del cilindro, (iii) bidimensionales con simetría axial independiente del ángulo azimutal y (iv) cilíndrica tridimensional.

Las superficies de la cavidad son opacas o transparentes, grises, difusas e isotérmicas. Se consideran tres tipos de emisiones, (i) emisión difusa desde la frontera, (ii) emisión desde un medio isotérmico y (iii) incidencia externa difusa. Se analiza la influencia del coeficiente de absorción, coeficiente de dispersión, dimensiones de la cavidad y reflectividad de las paredes. Se han considerado cuatro funciones de dispersión anisotrópicas bien conocidas ( $F_1$ ,  $F_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ), las cuales fueron calculadas usando la expansión en serie de los polinomios de Legendre.

Se hizo un exhaustivo y detallado análisis de error y los resultados obtenidos fueron comparados con los resultados disponibles.

## 1 INTRODUCCIÓN

En la ingeniería existen muchos ejemplos de aparatos y dispositivos de forma cilíndrica en los cuales se necesita calcular el transporte radiante. Esta situación ha sido frecuentemente considerada por los investigadores en aplicaciones prácticas de conversión de energía, en las que la conducción y la convección de calor ocurren simultáneamente con una cantidad significativa de radiación térmica. Ejemplos concretos de estos sistemas son los motores de combustión interna, turbinas térmicas y hornos industriales. Por ejemplo, en hornos que queman combustibles fósiles, el dióxido de carbono y el vapor de agua, formados como productos de la combustión, absorben y emiten cantidades significativas de radiación térmica. La importancia de la radiación térmica también puede ser apreciable en las cámaras de combustión de los motores, en los hornos de fundición de vidrio, explosiones nucleares, propulsión de cohetes, fenómenos ambientales y procesos de enfriamiento en dispositivos electrónicos. En todos estos fenómenos la radiación térmica juega un rol muy importante por lo que existe un gran interés en desarrollar modelos de análisis que permitan obtener resultados en forma rápida, precisa y económica. Además de la absorción y la emisión, la dispersión también es importante en la radiación térmica, como en el caso de la luz solar absorbida por una nube de polvo o dispersada por la atmósfera, la dispersión de la luz de las estrellas por el polvo interestelar, la propagación de las ondas de radio en la atmósfera y como herramientas de diagnóstico de gases.

Existe una gran cantidad de trabajos relacionados al estudio de la radiación térmica en geometrías cilíndricas, la mayoría de ellos son simulaciones numéricas donde se aplica una gran variedad de métodos numéricos. Estos métodos se caracterizan por su capacidad de manejar geometrías unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales; buena precisión para la mayoría de las condiciones físicas de medio participante, dispersión isotrópica o anisotrópica, medio gris o espectral, medio isotérmico o no isotérmico; facilidad de aplicación, de generalización y flexibilidad en la elección de los diferentes órdenes de aproximación; compatibilidad con métodos numéricos aplicados a la resolución de otros modos de transferencia de calor y facilidad de programación y bajo costo de computación. El método de los volúmenes finitos cumple con todas las condiciones detalladas anteriormente por lo que se ha transformado en uno de los métodos más usados y con mayor futuro. En el método de los volúmenes finitos la ecuación integral de conservación de la intensidad de radiación térmica se obtiene integrando la ecuación gobernante de la transferencia radiante sobre volúmenes de control y ángulos sólidos discretos. Se usan varios tipos de funciones de interpolación para la intensidad. La formulación captura la aproximación de difusión para medios fuertemente atenuantes y no está tan afectada por el efecto de los rayos como el método de las ordenadas discretas. Este método es totalmente compatible con el método de los volúmenes finitos usado para resolver problemas de dinámica de fluidos computacional y transferencia de calor por conducción y convección.

A continuación se hace una revisión bibliográfica de los trabajos publicados en donde se han considerado problemas de transporte radiante en coordenadas cilíndricas. Comenzando en los inicios de los 90, se puede citar el trabajo de [Tsai y Özişik \(1990\)](#) quienes investigaron los efectos de la variación espacial de los coeficientes de absorción y dispersión en la absorción y la dispersión anisotrópica de la radiación en cilindros huecos y llenos utilizando las aproximaciones  $S_4$  y  $S_6$  del método de las ordenadas discretas. [Chui et al. \(1992\)](#) fueron los primeros en utilizar el método de volúmenes finitos para resolver los problemas de radiación en cavidades cilíndricas rellenas con un medio gris, absorbente, emisor y dispersante, proponiendo una transformación de coordenadas para el caso especial de radiación con simetría axial al reducir la solución completa en una única dirección azimutal. [Jamaluddin y Smith \(1992\)](#) utilizaron el método de las ordenadas discretas para resolver la ecuación de la

transferencia radiante en cavidades cilíndricas tridimensionales sin simetría axial rellenas con un medio absorbente, emisor y dispersante. [Jendoubi y Lee \(1992\)](#) aplicaron el método de las ordenadas discretas para comparar problemas en coordenadas cartesianas y cilíndricas con similares condiciones de borde, demostrando que la complejidad en coordenadas cilíndricas se encuentra en la derivada angular adicional, transformando el problema bidimensional en uno virtualmente tridimensional. [Jendoubi et al. \(1993\)](#) resolvieron la ecuación de la transferencia radiante con el método de las ordenadas discretas en una cavidad cilíndrica bidimensional con simetría axial considerando un medio absorbente, emisor y anisotrópicamente dispersante para los casos de incidencia difusa desde la pared, emisión del medio isotérmico e incidencia externa difusa y colimada. [Hsu y Ku \(1994\)](#) aplicaron el método YIX para resolver la formulación integral del transporte radiante en una cavidad cilíndrica con simetría axial con un medio no homogéneo producto de la combustión turbulenta. [Moder et al. \(1996\)](#) utilizaron el método de los volúmenes finitos definiendo las direcciones de radiación en términos de coordenadas angulares, medidas en una base vectorial cartesiana, con el inconveniente de tener solapamientos en los ángulos de control en las direcciones azimutales. [Kim y Baek \(1997\)](#) aplicaron el método de los volúmenes finitos para estudiar la transferencia de calor radiante en cavidades cilíndricas, llenas o huecas, conteniendo un medio absorbente, emisor y dispersante, definiendo el vector de dirección unitario en una base vectorial cartesiana eliminaron la dificultad en el tratamiento de las derivadas angulares propias del método de las ordenadas discretas. [Baek y Kim \(1997\)](#) modificaron el método de las ordenadas discretas para el tratamiento de cavidades cilíndricas bidimensionales con simetría axial pudiendo especificar los ángulos de control en forma arbitraria independientemente del problema considerado. [Murthy y Mathur \(1998\)](#) extendieron el método de los volúmenes finitos para el tratamiento de la transferencia radiante en geometrías con simetría axial usando una malla no estructurada poliédrica. [Liu et al. \(2000\)](#) desarrollaron una versión no estructurada del método de los volúmenes finitos aplicable a cualquier geometría bidimensional, cartesiana o cilíndrica, con simetría axial, o tridimensional, en el cual el dominio angular se puede discretizar usando la estrategia del método de las ordenadas discretas (cuadraturas de Gauss) o la metodología propia del método de los volúmenes finitos (discretización azimutal). [Nunes et al. \(2000\)](#) presentaron dos modelos numéricos para resolver el transporte radiante en cavidades de forma irregular con simetría axial, el método N-bounce y la aproximación función fuente, ambos métodos basados en el método del factor de intercambio discreto con la capacidad de manejar obstáculos internos u obstrucciones. [Chen y Sutton \(2003\)](#) presentaron un método de integración directa modificado para resolver la transferencia radiante en una cavidad cilíndrica rellena con un medio emisor, absorbente y dispersante, el cual elimina un problema de singularidad presente en la integración de la ecuación de la transferencia radiante. [Kim y Guo \(2003\)](#) aplicaron el método de las ordenadas discretas en coordenadas cilíndricas en estado transitorio con el objeto de simular aplicaciones de pulsos, extremadamente cortos, de láser en la piel. [Ben Salah et al. \(2004\)](#) aplicaron el método de los volúmenes finitos para resolver la ecuación de la transferencia radiante en una geometría cilíndrica bidimensional con simetría axial rellena con un medio gris, absorbente, emisor y dispersante, obteniendo expresiones explícitas para los coeficientes de los términos de discretización angular. [Kim y Baek \(2004\)](#) analizaron el problema inverso de radiación en la superficie en una cavidad cilíndrica bidimensional con simetría axial, utilizando el método de intercambio de energía para calcular los flujos de calor radiante en cada superficie, y un algoritmo genético híbrido para minimizar la función objetivo, expresada por el error entre los flujos de calor estimados y medidos en la superficie considerada. [Tian y Chiu \(2005\)](#) aplicaron el método de los volúmenes finitos para resolver la ecuación de la transferencia radiante en un dominio cilíndrico bidimensional con simetría axial en las que las direcciones de intensidad se definen en una base vectorial cartesiana eliminando el problema de solapado de los ángulos de control debido a la falta de

alineación de los ángulos sólidos y las caras del volumen de control. Ben Salah et al. (2006) estudiaron numéricamente la transferencia radiante en una cavidad de forma irregular con simetría axial usando el método de los elementos finitos basados en volúmenes de control. Kim (2008) revisó el método de los volúmenes finitos para el cálculo de la transferencia radiante en una cavidad cilíndrica, bidimensional, con simetría axial, rellena con un medio absorbente, emisor y dispersante, presentando una formulación definida sobre una base vectorial cilíndrica y la compara con la comúnmente usada, definida en una base vectorial cartesiana. Kim y Baek (2009) resolvieron un problema de radiación inversa en un medio con simetría axial que absorbe, emite y dispersa la radiación térmica, estimando la distribución de temperatura en la frontera a partir de algunas cantidades radiantes medidas. Mishra et al. (2010) analizaron la transferencia de calor por conducción relativista, no basada en la ecuación de Fourier clásica, y radiación combinadas, en un medio absorbente, emisor y dispersante, contenido en una pared cilíndrica (unidimensional) con perturbaciones instantáneas de las temperaturas de las paredes de la cavidad, utilizando el método de los volúmenes finitos para resolver el problema radiante y el método de las diferencias finitas para resolver la ecuación hiperbólica de la energía. Ben Nejma et al. (2010) calcularon numéricamente la generación de entropía producida en la radiación térmica en un gas absorbente, emisor y no gris, en una cavidad cilíndrica, utilizando el modelo estadístico de banda estrecha k-correlacionado para el tratamiento del gas no gris. Mishra et al. (2011) y Mishra y Hari Krishna (2011) estudiaron el transporte radiante con y sin conducción, en una cavidad cilíndrica concéntrica finita conteniendo un medio absorbente, emisor y dispersante, consideraron tres configuraciones térmicas diferentes, resolvieron el problema radiante con el método de las ordenadas discretas modificado y la ecuación de la energía con el método de lattice Boltzmann. Hunter et al. (2011) resolvieron la ecuación de la transferencia radiante en estado no estacionario, para un medio participante, en una cavidad cilíndrica con simetría axial, utilizando tanto el método de las ordenadas discretas como el de los volúmenes finitos para ser aplicado en tubos receptores de energía solar. Huang et al. (2011) utilizaron el método de los volúmenes finitos para resolver la transferencia radiante en un foto-reactor relleno con un medio participante en el cual la intensidad lumínica no es uniforme. Chaabane et al. (2011a, b) aplicaron el método de lattice Boltzmann para resolver la ecuación de la energía en un problema de conducción y radiación combinados, en estado no estacionario, en una cavidad cilíndrica bidimensional, rellena con un medio absorbente, emisor y dispersante, mientras que el problema radiante lo resolvieron utilizando el método de los elementos finitos basados en volúmenes de control, con y sin generación de calor. Grissa et al. (2012) analizaron el problema inverso de la transferencia radiante en una cavidad bidimensional, sin simetría axial, con el objeto de estimar las emisividades en las fronteras y las propiedades radiantes de un medio absorbente, emisor y anisotrópicamente dispersante, utilizando el método de los elementos finitos basados en volúmenes de control.

De la revisión bibliográfica presentada se desprende que existe un marcado interés en desarrollar herramientas computacionales que permitan predecir el transporte radiante en geometrías cilíndricas multidimensionales. Estas herramientas computacionales pueden ser usadas para facilitar el cálculo y diseño de dispositivos industriales, análisis y estudio de fenómenos ambientales y en todas las situaciones en la que estén involucrado el transporte radiante.

## 2 FORMULACIÓN MATEMÁTICA

### 2.1 Ecuación de la transferencia radiante

La ecuación de la transferencia radiante para un medio gris, absorbente, emisor y dispersante es (Modest, 1993; Siegel y Howell, 1992; Brewster, 1992; Kim, 1990; Chui, 1990; Chai, 1994)

$$\mathbf{s} \cdot \nabla i = -\beta i + S \quad (1)$$

donde  $i(\mathbf{r}, \mathbf{s})$  es la intensidad de radiación térmica,  $\mathbf{r}$  es el vector de posición en el sistema de coordenadas adoptado,  $\mathbf{s}$  es el vector de dirección,  $\beta = \kappa + \sigma$  es el coeficiente de extinción y  $S$  el término fuente, dado por:

$$S = \kappa i_b + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\omega=0}^{4\pi} i \Phi d\omega \quad (2)$$

donde  $\kappa$  coeficiente de absorción,  $\sigma$  es el coeficiente de dispersión,  $i_b$  es la intensidad de radiación térmica perteneciente al cuerpo negro,  $\Phi$  es la función de dispersión y  $\omega$  es el ángulo sólido.

## 2.2 Función de dispersión

La función de dispersión expresada como una serie de polinomios de Legendre, es (Kim, 1990; Dombrosky, 1996; Modest, 1993; Rebollo, 2007, 2008a, 2009a)

$$\Phi(\theta^l, \theta^k) = 1 + \sum_{m=1}^M A_m P_m(\cos \theta^l) P_m(\cos \theta^k) \quad (3)$$

donde  $\theta$  es el ángulo polar,  $k$  representa la dirección incidente,  $l$  representa la dirección emitida,  $A_m$  son los coeficientes de la serie de Legendre y  $P_m$  son los polinomios de Legendre.

Para poder calcular la función de dispersión es necesario conocer los coeficientes  $A_m$ , los cuales están relacionados a los coeficientes de dispersión de Mie  $a_n$  y  $b_n$  por medio de un conjunto de ecuaciones (Modest, 1993), y se encuentran tabulados en los trabajos de Kim (1990), An et al. (2005), Byun et al. (2004) y Hao et al. (2003).

## 2.3 Divergencia de la energía radiante

El flujo de calor en la dirección  $\mathbf{s}$  se relaciona con la intensidad  $i$  de la siguiente manera (Brewster, 1992; Chai, 1994; Chui, 1990; Kim, 1990; Modest, 1993; Siegel y Howell, 1992)

$$\mathbf{q}_r = \int_{\omega=0}^{4\pi} i \mathbf{s} d\omega \quad (4)$$

así, la divergencia de la energía radiante se puede escribir como

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_r = \kappa \left( 4\gamma T^4 - \int_{\omega=0}^{4\pi} i d\omega \right) \quad (5)$$

donde  $\gamma$  es la constante de Stefan–Boltzmann y  $T$  es la temperatura absoluta.

## 2.4 Discretización de la ecuación de la transferencia radiante

La ecuación de la transferencia radiante (1-2) se debe integrar tanto en el volumen espacial como en el angular (Chai, 1994; Chai et al., 1995; Chui, 1990; Chui y Raithby, 1993; Trivc et al., 2004), es decir:

$$\int_{V_p} \int_{\omega^l} (\mathbf{s}^l \cdot \nabla i_p^l) d\omega dV = \int_{V_p} \int_{\omega^l} (-\beta i_p^l + S_p^l) d\omega dV \quad (6)$$

en la que  $V_p$  es el volumen del volumen de control, aplicando el teorema de Gauss se obtiene:

$$\int_S \int_{\omega^l} i_s^l (\mathbf{s}^l \cdot d\mathbf{S}) d\omega = \int_{V_p} \int_{\omega^l} (-\beta i_p^l + S_p^l) d\omega dV \quad (7)$$

donde  $S$  es la superficie del volumen de control.

El lado izquierdo de la ecuación (7) se puede reemplazar por una sumatoria de integrales a lo largo de las caras del volumen de control  $P$ , mientras que el lado derecho corresponde a una doble integral de una función escalar, por lo que se puede escribir que:

$$\sum_f \int_f \int_{\omega^l} i_f^l (s^l \cdot dS_f) d\omega = (-\beta i_P^l + S_P^l) \omega^l V_P \quad (8)$$

Recordando que el valor de  $i_f^l$  prevalece a lo largo de toda la cara del volumen de control, se puede escribir que:

$$\sum_f i_f^l \int_{\omega^l} (s^l \cdot S_f) d\omega = (-\beta i_P^l + S_P^l) \omega^l V_P \quad (9)$$

donde la función fuente se calcula como

$$S_P^l = \kappa i_{bP} + \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{k=1}^{n_d} i_P^k \bar{\Phi}^{lk} \omega^k \quad (10)$$

donde  $\bar{\Phi}^{lk}$  es la energía promedio dispersada desde el ángulo de control  $k$  hacia el ángulo de control  $l$ , la cual se calcula como:

$$\bar{\Phi}^{lk} = \frac{\int_{\omega_k} \int_{\omega_l} \Phi(s^k, s^l) d\omega^k d\omega^l}{\omega^k \omega^l} \quad (11)$$

Llamando a la integral sobre el ángulo sólido de la ecuación (9) como:

$$\int_{\omega^l} (s^l \cdot S_f) d\omega = D_f^l A_f \quad (12)$$

donde  $A_f$  es el valor del área de la cara y  $D_f^l$  es la integral en el ángulo sólido del producto escalar entre la dirección del haz y la normal unitaria exterior a la cara. Finalmente, se obtiene la ecuación discreta de la transferencia radiante:

$$\sum_f i_f^l D_f^l A_f = (-\beta i_P^l + S_P^l) \omega^l V_P \quad (13)$$

Para resolver la vinculación entre los valores de la intensidad radiante en el centro del volumen de control  $i_P^l$  y sus valores en las caras del volumen de control  $i_f^l$  se utiliza el esquema Step, idéntico al esquema UpWind usado en convección.

Finalmente, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas para cada dirección, que al ser resuelta, proporciona el campo de intensidades de radiación:

$$a_P^l i_P^l + \sum_N a_N^l i_N^l = R_P^l \quad (14)$$

## 2.5 Condición de frontera radiante

En este trabajo se consideran superficies radiantes grises, opacas o transparentes, difusas e isotérmicas. La condición de borde para esta situación se puede escribir como (Chai, 1994; Chui, 1990; Kim, 1990):

$$i_w^l = i_{\text{ext}} + \varepsilon_w i_{bw} + \frac{\rho_w H_w}{\pi} \quad (15)$$

donde el subíndice  $w$  representa la pared,  $\varepsilon$  es la emisividad,  $\rho$  la reflectividad,  $i_b$  es la intensidad de radiación del cuerpo negro, la cual depende de la cuarta potencia de la

temperatura absoluta de la pared, y  $H$  es la irradiación hemisférica, es decir, el flujo de calor radiante incidente en la pared. Estos últimos se calculan como:

$$i_{bw} = \frac{\gamma T_w^4}{\pi} \quad (16)$$

$$H_w = \int_{\mathbf{s}^k \cdot \mathbf{n}_w < 0} i_w^k |\mathbf{s}^k \cdot \mathbf{n}_w| d\omega^k \quad (17)$$

donde  $\mathbf{n}$  es la normal unitaria a la pared. La ecuación (15) muestra que en la superficie pueden existir tres componentes, la incidencia externa difusa, la emisión debida al estado térmico de la superficie y la parte reflejada de la intensidad incidente sobre la superficie.

$\sigma$ [m <sup>-1</sup> ]	$r_{\text{ext}}$ [m]	Solución			Error %		
		$S_6$	Exacta	MVF	$S_6$ -Ex	MVF-Ex	$S_6$ -MVF
0,7	1	0,630505	0,636839	0,636965	0,99	0,02	1,02
	5	0,092803		0,092489			0,34
	10	0,010720	0,010452	0,010448	2,56	0,04	2,54
0,8	1	0,721582	0,727408	0,727499	0,80	0,01	0,82
	5	0,150245		0,150455			0,14
	10	0,023542	0,023259	0,023240	1,22	0,08	1,28
0,9	1	0,839541	0,844174	0,844160	0,55	0,00	0,55
	5	0,294015		0,295147			0,39
	10	0,073396	0,073336	0,073296	0,08	0,05	0,14

Tabla 1: Radiación incidente  $G(r)$  [W/m<sup>2</sup>] del cilindro sólido en  $r=r_{\text{ext}}/2$  con frontera transparente y  $i_{\text{ext}}(\mu)=1\text{W/m}^2$  sr.

$\sigma$ [m <sup>-1</sup> ]	$r_{\text{ext}}$ [m]	Solución			Error %		
		$S_6$	Exacta	MVF	$S_6$ -Ex	MVF-Ex	$S_6$ -MVF
0,7	1	0,816584	0,819473	0,817580	0,35	0,23	0,12
	5	0,680391		0,668741			1,71
	10	0,662740	0,663331	0,637616	0,09	3,88	3,79
0,8	1	0,864265	0,866527	0,865175	0,26	0,16	0,11
	5	0,729167		0,720334			1,21
	10	0,709251	0,709789	0,689818	0,08	2,81	2,74
0,9	1	0,923651	0,924929	0,924165	0,14	0,08	0,06
	5	0,805184		0,799749			0,68
	10	0,780808	0,781243	0,768319	0,06	1,65	1,60

Tabla 2: Radiación incidente  $G(r)$  [W/m<sup>2</sup>] del cilindro sólido en  $r=r_{\text{ext}}$  con frontera transparente y  $i_{\text{ext}}(\mu)=1\text{W/m}^2$  sr.

En todos los problemas analizados en este trabajo, se supone que las superficies de la cavidad son opacas o transparentes, grises y difusas. La rugosidad de la superficie y la deposición de productos de la combustión hacen que esta suposición sea válida en muchas aplicaciones de la ingeniería.

## 2.6 Formulación en coordenadas cilíndricas

La formulación matemática de la ecuación (13) de la transferencia radiante presentada anteriormente está dada en forma tensorial, vectorial y direccional, es decir, independiente del sistema de coordenadas adoptado. Aquí se da una descripción muy breve de la formulación matemática para el caso particular de coordenadas cilíndricas, una descripción más detallada se puede encontrar en los trabajos de Chui et al. (1992), Kim y Baek (1997), Ben Salah et al. (2004) y Kim (2008).

$\sigma$ [m <sup>-1</sup> ]	$r_{\text{ext}}$ [m]	Solución			Error %		
		$S_6$	Exacta	MVF	$S_6$ -Ex	MVF-Ex	$S_6$ -MVF
0,7	1	1,289640	1,298940	1,298598	0,72	0,03	0,69
	5	2,182758		2,185378			0,12
	10	2,262108	2,276860	2,237103	0,65	1,75	1,11
0,8	1	0,959169	0,964758	0,964548	0,58	0,02	0,56
	5	1,875275		1,878267			0,16
	10	1,978000	1,990130	1,961717	0,61	1,43	0,82
0,9	1	0,543147	0,545307	0,545410	0,40	0,02	0,42
	5	1,374945		1,377128			0,16
	10	1,522666	1,530480	1,514480	0,51	1,05	0,54

Tabla 3: Flujo de calor radiante neto  $q(r)$  [W/m<sup>2</sup>] del cilindro sólido en  $r=r_{\text{ext}}$  con frontera transparente y  $i_{\text{ext}}(\mu)=1$  W/m<sup>2</sup> sr.

$\sigma$ [m <sup>-1</sup> ]	$S_6$ -R	MVF-R	$E_{\text{rel}}$
$3r/4$	0,468708	0,463690	1,07
$0,2+9r/20$	0,452524	0,447717	1,06
$0,4+3r/20$	0,438191	0,433607	1,05
0,5	0,431747	0,427270	1,04
$0,6-3r/20$	0,425805	0,421438	1,03
$0,8-9r/20$	0,415520	0,411362	1,00
$1-3r/4$	0,407567	0,403602	0,97
$3r/8+r^2/2$	0,484055	0,479038	1,04
$0,4-9r/40+r^2/2$	0,450650	0,446022	1,03
$0,6-21r/40+r^2/2$	0,436768	0,432338	1,01
$1-9r/8+r^2/2$	0,415245	0,411200	0,97

Tabla 4: Reflectividad hemisférica [W/m<sup>2</sup>] del cilindro sólido en  $r=r_{\text{ext}}$  con frontera transparente,  $i_{\text{ext}}(\mu)=1$ W/m<sup>2</sup> sr y dispersión isotrópica.

Las ecuaciones de la transferencia radiante (1-2), para un sistema de coordenadas cilíndricas, viene dada por

$$\mu \frac{\partial i}{\partial r} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial i}{\partial \varphi_0} + \xi \frac{\partial i}{\partial z} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial i}{\partial \phi} = -\beta i + \kappa i_b + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\omega=0}^{4\pi} i \Phi d\omega \quad (18)$$

en la que la intensidad radiante  $i=(\mathbf{r}, \mathbf{s})$  se expresa como  $i=(r, \varphi_0, z, \theta, \phi)$  donde  $(r, \varphi_0, z)$  son las coordenadas del sistema cilíndrico,  $(\theta, \phi)$  el ángulo polar y azimutal de la dirección radiante y  $(\mu, \eta, \xi)$  los cosenos directores de la dirección radiante expresados como  $\mu = \sin \theta \cos \phi$ ,  $\eta = \sin \theta \sin \phi$  y  $\xi = \cos \theta$ .

Debe quedar claro que  $\phi$  es el ángulo azimutal relativo referido al sistema cilíndrico,  $\varphi_r$  es el ángulo azimutal relativo al sistema cartesiano y  $\varphi_0$  es el ángulo azimutal medido desde el eje  $x$ , y están relacionados de la siguiente manera  $\phi = \varphi_r - \varphi_0$ . En el cálculo de las integrales sobre

el ángulo sólido, se debe tener en cuenta que en el sistema de coordenadas cilíndrico, a diferencia del sistema de coordenadas cartesiano, cambia el ángulo entre la dirección radial y la dirección radiante con el ángulo azimutal. En el sistema cartesiano los ángulos entre las direcciones espaciales y las direcciones radiantes se mantienen constantes.

$\sigma$ [m <sup>-1</sup> ]	S <sub>6</sub> -R	MVF-R	E <sub>rel</sub>
3r/4	0,445810	0,465532	4,42
0,2+9r/20	0,432647	0,449544	3,91
0,4+3r/20	0,421450	0,435416	3,31
0,5	0,416603	0,429073	2,99
0,6-3r/20	0,412265	0,423222	2,66
0,8-9r/20	0,405181	0,413103	1,96
1-3r/4	0,400336	0,405268	1,23
3r/8+r <sup>2</sup> /2	0,458570	0,480941	4,88
0,4-9r/40+r <sup>2</sup> /2	0,431130	0,447862	3,88
0,6-21r/40+r <sup>2</sup> /2	0,420409	0,434153	3,27
1-9r/8+r <sup>2</sup> /2	0,405276	0,412924	1,89

Tabla 5: Reflectividad hemisférica [W/m<sup>2</sup>] del cilindro sólido en  $r=r_{ext}$  con frontera transparente,  $i_{ext}(\mu)=1W/m^2$  sr y dispersión anisotrópica hacia adelante.

$\sigma$ [m <sup>-1</sup> ]	S <sub>6</sub> -R	MVF-R	E <sub>rel</sub>
3r/4	0,475870	0,463977	2,50
0,2+9r/20	0,458903	0,448012	2,37
0,4+3r/20	0,443747	0,433892	2,22
0,5	0,436880	0,427553	2,13
0,6-3r/20	0,430509	0,421716	2,04
0,8-9r/20	0,419352	0,411631	1,84
1-3r/4	0,410530	0,403856	1,63
3r/8+r <sup>2</sup> /2	0,491929	0,479334	2,56
0,4-9r/40+r <sup>2</sup> /2	0,456960	0,446308	2,33
0,6-21r/40+r <sup>2</sup> /2	0,442239	0,432629	2,17
1-9r/8+r <sup>2</sup> /2	0,418971	0,411479	1,79

Tabla 6: Reflectividad hemisférica [W/m<sup>2</sup>] del cilindro sólido en  $r=r_{ext}$  con frontera transparente,  $i_{ext}(\mu)=1W/m^2$  sr y dispersión anisotrópica hacia atrás.

Para el caso de simetría axial, el problema radiante es independiente del ángulo azimutal  $\phi_0$  del sistema de coordenadas y la ecuación (18) se simplifica notablemente, resultando

$$\mu \frac{\partial i}{\partial r} + \xi \frac{\partial i}{\partial z} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial i}{\partial \phi} = -\beta i + \kappa i_b + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\omega=0}^{4\pi} i \Phi d\omega \tag{19}$$

en la que la intensidad radiante se expresa como  $i=(r, z, \theta, \phi)$  donde  $(r, z)$  son las coordenadas del sistema cilíndrico bidimensional con simetría axial.

Para el problema unidimensional, cilindro de longitud infinita, el problema se simplifica aún más al ser independiente de la altura y la ecuación (19) se reduce a

$$\mu \frac{\partial i}{\partial r} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial i}{\partial \phi} = -\beta i + \kappa i_b + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\omega=0}^{4\pi} i \Phi d\omega \tag{20}$$

donde la intensidad radiante se expresa ahora como  $i=(r, \theta, \phi)$  donde  $(r)$  es la única coordenada del sistema cilíndrico.

Toda la formulación matemática presentada en este trabajo está basada en la suposición de comportamiento gris del medio participante, es decir, independiente de la longitud de onda de la radiación térmica. En trabajos previos (Rebollo, 2008b, 2009b; Rebollo et al. 2010a; Rebollo y Rodriguez, 2011) se han presentados diferentes modelos para el tratamiento de gases no grises, los cuales no han sido implementados, por el momento, en este trabajo en geometrías cilíndricas.

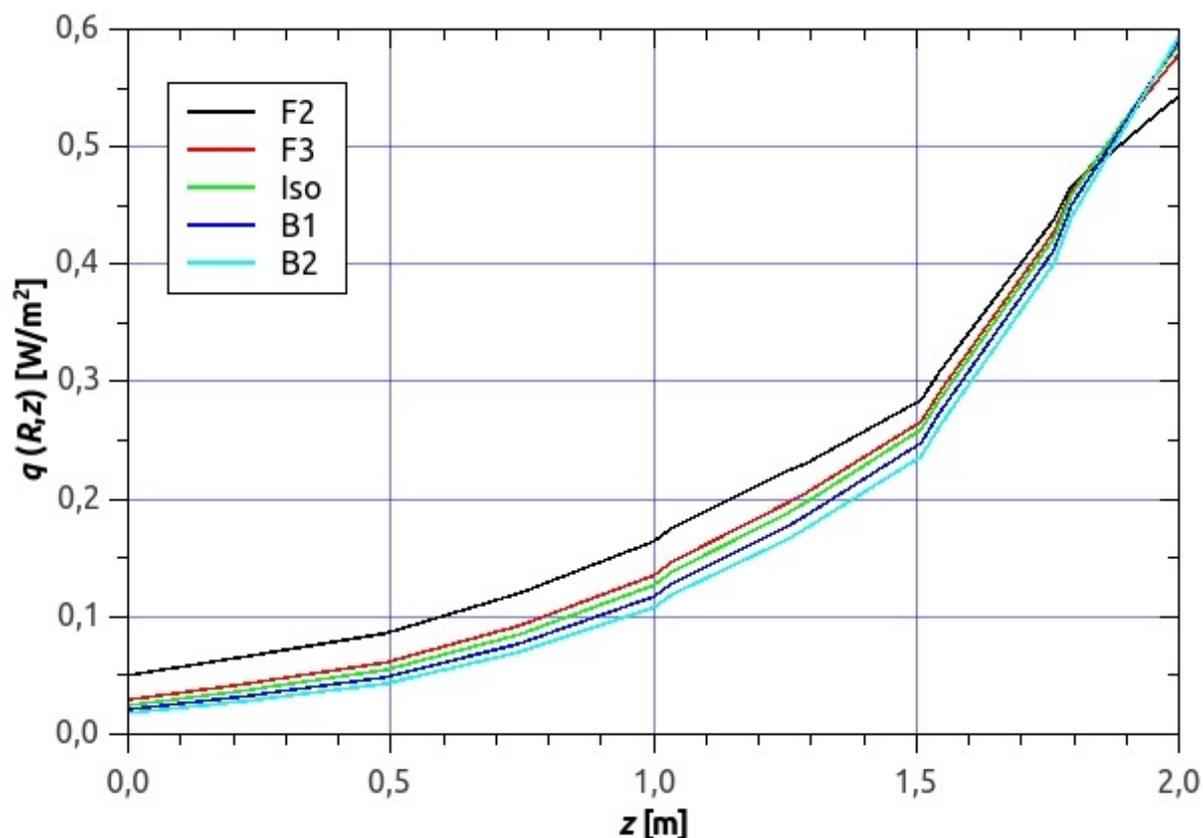


Figura 1: Efecto de la función de dispersión anisotrópica en el flujo de calor radiante a lo largo de la pared lateral para el caso de incidencia externa difusa en la pared superior.

### 3 RESULTADOS Y DISCUSIONES

En esta sección se hace una descripción muy breve de las configuraciones analizadas en este trabajo, las cuales fueron propuestas por algunos autores hace ya algún tiempo, y reproducidas a lo largo de los años en muchos trabajos publicados, por lo que se han transformado en configuraciones clásicas en el análisis de la transferencia radiante. Se presentan los resultados obtenidos al reproducir estas diferentes configuraciones térmicas, se hace un muy breve análisis de resultados y se comparan resultados mostrando algunos errores.

Todos los resultados están expresados en el sistema internacional para facilitar la comparación con los publicados originalmente.

#### 3.1 Incidencia difusa externa

Esta situación corresponde al caso de una cavidad de paredes transparentes sometida a una radiación difusa externa, este problema no ha sido muy estudiado, solo se han encontrado dos trabajos en la literatura, el correspondiente a Tsai y Özişik (1990) en una geometría cilíndrica unidimensional, y el de Jendoubi et al. (1993) en una geometría bidimensional con simetría

axial, quienes además, consideraron el caso de incidencia externa colimada. La incidencia externa colimada ya fue tratada en trabajos previos en sistemas cartesianos (Rebollo et al., 2010), pero todavía no fue implementada en este trabajo para coordenadas cilíndricas.

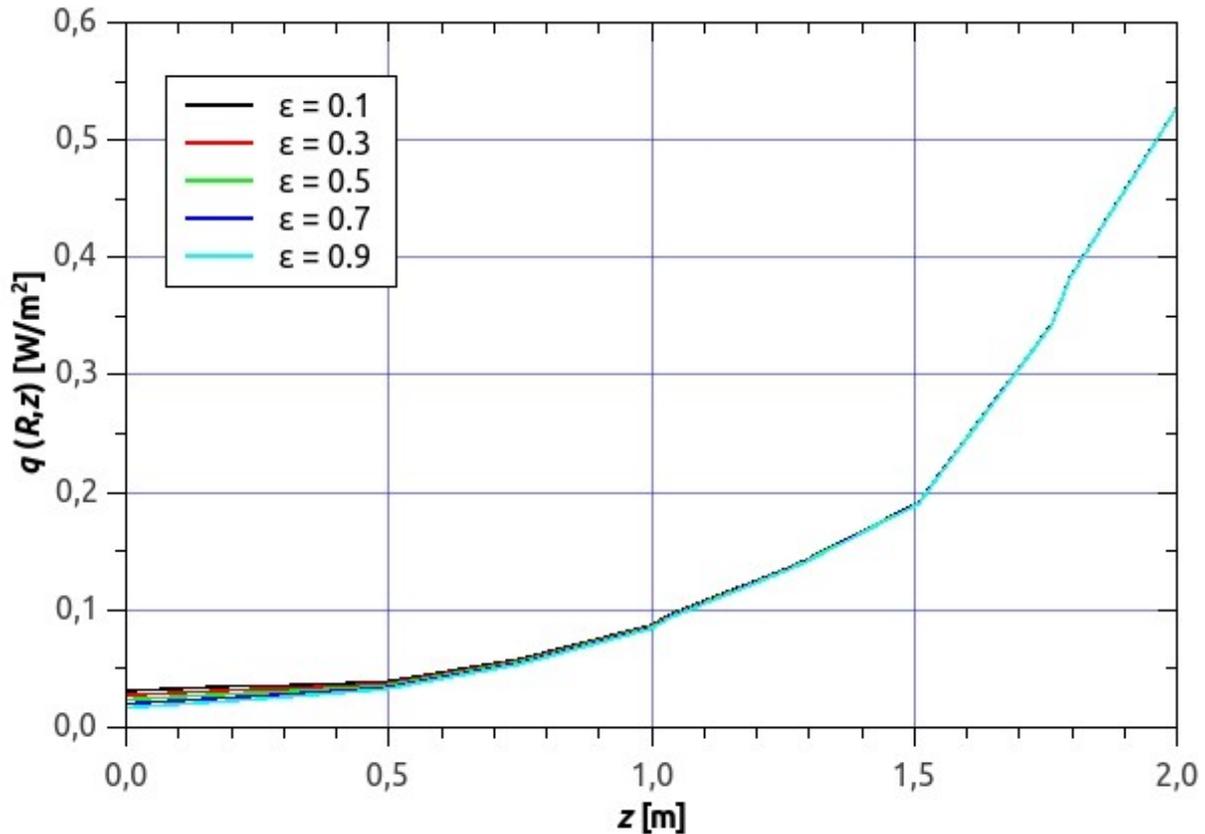


Figura 2: Efecto de la emisividad de la pared inferior en el flujo de calor radiante a lo largo de la pared lateral para el caso de incidencia externa difusa en la pared superior, dispersión isotrópica y  $\omega=0,7$ .

Tsai y Özişik (1990) consideran una geometría unidimensional correspondiente a un cilindro lleno o hueco, en donde la intensidad de radiación térmica solo es función del radio y del coseno director del ángulo formado por la dirección de avance de la intensidad y la dirección del radio  $i(r,\mu)$ . En este trabajo solo se presentan resultados correspondientes al cilindro lleno, el caso del cilindro hueco será considerado en trabajos posteriores. Consideraron una radiación externa unitaria  $i_{\text{ext}}(\mu)=1 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ sr})$  sobre el radio exterior, paredes transparentes  $\rho_{\text{ext}}=0$  y medio y paredes frías  $i_{b,\text{med}}=i_{b,\text{ext}}=0$  y un coeficiente de extinción  $\beta=1 \text{ m}^{-1}$ .

Las Tablas 1 a 6 muestran los resultados de Tsai y Özişik (1990) obtenidos con el método de las ordenadas discretas MOD de orden  $S_6$ , los resultados obtenidos en este trabajo con el MVF, y los errores relativos correspondientes. Las Tablas 1 y 2 muestran la radiación incidente  $G \text{ [W}/\text{m}^2]$  en el radio medio y sobre la superficie exterior, respectivamente mientras que en la Tabla 3 se presenta el flujo de calor radiante neto  $q \text{ [W}/\text{m}^2]$  sobre la superficie exterior, todos para dispersión isotrópica. En las Tablas 4 a 6 se muestra el efecto de la variación del coeficiente de dispersión en la reflectividad, es decir, el flujo de calor saliente  $q_{\text{ext}}/\pi$ , en la superficie exterior del cilindro  $r_{\text{ext}}=1\text{m}$  para dispersión isotrópica, anisotrópica hacia adelante y anisotrópica hacia atrás, respectivamente.

Si se compara los errores relativos entre las soluciones  $S_6$  y MVF, dados en las Tablas 1 a 3,

se observa que los máximos errores corresponden al 2,54%, 3,79% y 1,11%. Se advierte además que, en todos los casos dados en la [Tabla 1](#) y en la mitad de los casos correspondientes a las [Tablas 2 y 3](#), los errores entre la solución exacta y el MVF son menores a los errores entre la solución  $S_6$  y la exacta. En la [Tabla 4](#) se puede apreciar que el error está alrededor del 1.0%, y en las [Tablas 5 y 6](#), se observa que los mayores errores, 4,42%, 4,88% y 2,50%, 2,56%, corresponden la mayor velocidad de crecimiento del coeficiente de dispersión con el radio, tanto lineal como cuadrática. Además, se puede destacar que para las [Tablas 4 a 6](#) el error disminuye con la reducción de la velocidad de crecimiento del coeficiente de dispersión, correspondiendo el mínimo a la máxima velocidad de reducción.

[Jendoubi et al. \(1993\)](#) estudiaron una cavidad bidimensional de radio  $R=1\text{m}$  y altura  $H=2R$  con simetría axial, sometida a una radiación externa difusa en su pared superior  $i_{\text{sup}}=1\text{ W/m}^2\text{ sr}$ , las paredes son consideradas transparentes  $\epsilon_{\text{lat}}=\epsilon_{\text{sup}}=\epsilon_{\text{inf}}=1$  pero sin incidencia externa  $i_{\text{inf}}=i_{\text{lat}}=0$  y, el medio y las paredes, son consideradas frías  $i_{b,\text{med}}=i_{b,\text{sup}}=i_{b,\text{inf}}=0$ .

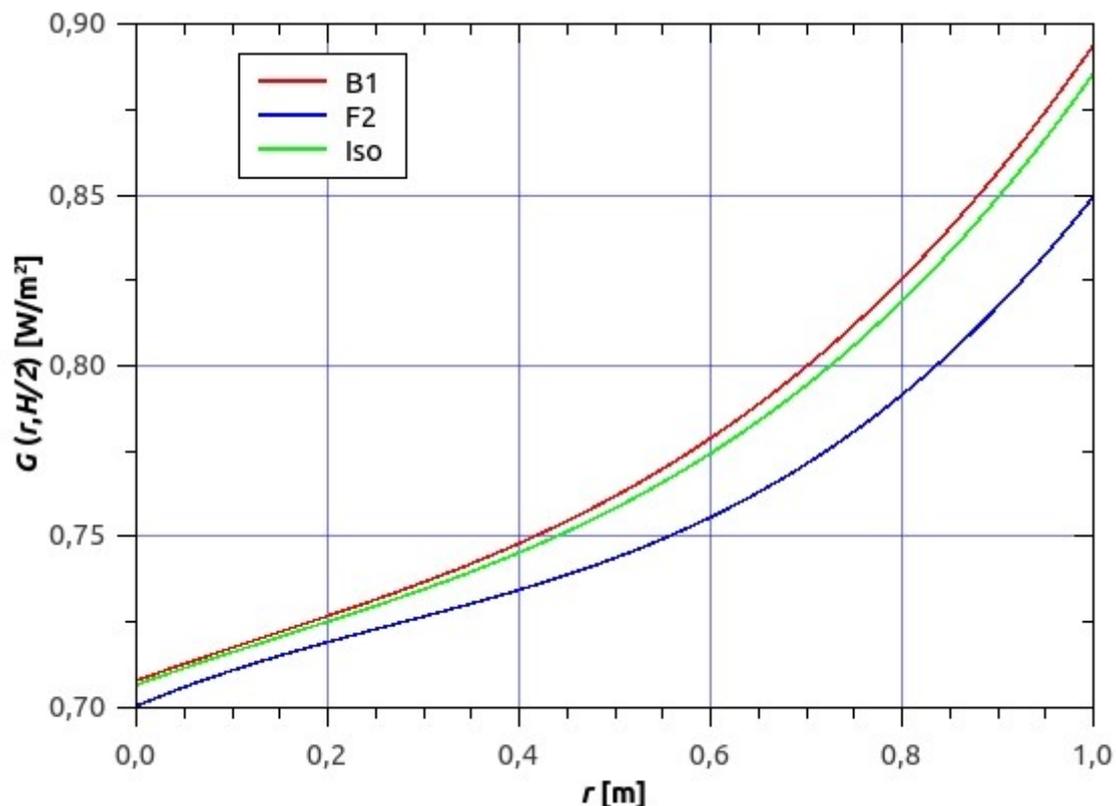


Figura 3: Efecto de la función de dispersión anisotrópica sobre la radiación incidente, en el plano medio, para incidencia difusa desde la pared lateral y  $\omega=1,0$ .

La [Figura 1](#) muestra el efecto de la función de dispersión en el flujo de calor radiante  $q$  [ $\text{W/m}^2$ ] a lo largo de la pared lateral para un medio puramente dispersante  $\kappa=0$ ,  $\sigma=1\text{ m}^{-1}$ . Se observa que los mayores valores de flujo de calor, junto a la pared inferior, corresponden a la función de dispersión F2, mientras que los menores valores corresponden a la función de dispersión B2, junto a la pared superior ocurre lo contrario. Se aprecia que el cruce de las curvas se encuentra en la coordenada 1,85 m aproximadamente y que la curva correspondiente a dispersión isotrópica se encuentra entre las curvas correspondientes a las funciones de dispersión hacia adelante (F2 y F3) y las curvas correspondientes a las funciones de dispersión hacia atrás (B1 y B2).



función de dispersión anisotrópica sobre el flujo de calor  $q$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ], a lo largo de la pared lateral, para incidencia difusa desde la pared lateral en un medio puramente dispersante  $\kappa=0$ ,  $\sigma=\beta=1\text{m}^{-1}$ ,  $\omega=1$  y paredes negras  $\varepsilon=1$ . En primer lugar se destaca la simetría respecto a la altura media, se aprecia además, el notable incremento en las proximidades de las paredes inferior y superior respecto a la zona central. Los mayores valores de flujo de calor corresponden a las funciones de dispersión hacia adelante F2 y F3, las menores a las funciones de dispersión hacia atrás B1 y B2, mientras que los valores intermedios corresponden al medio isotrópico.

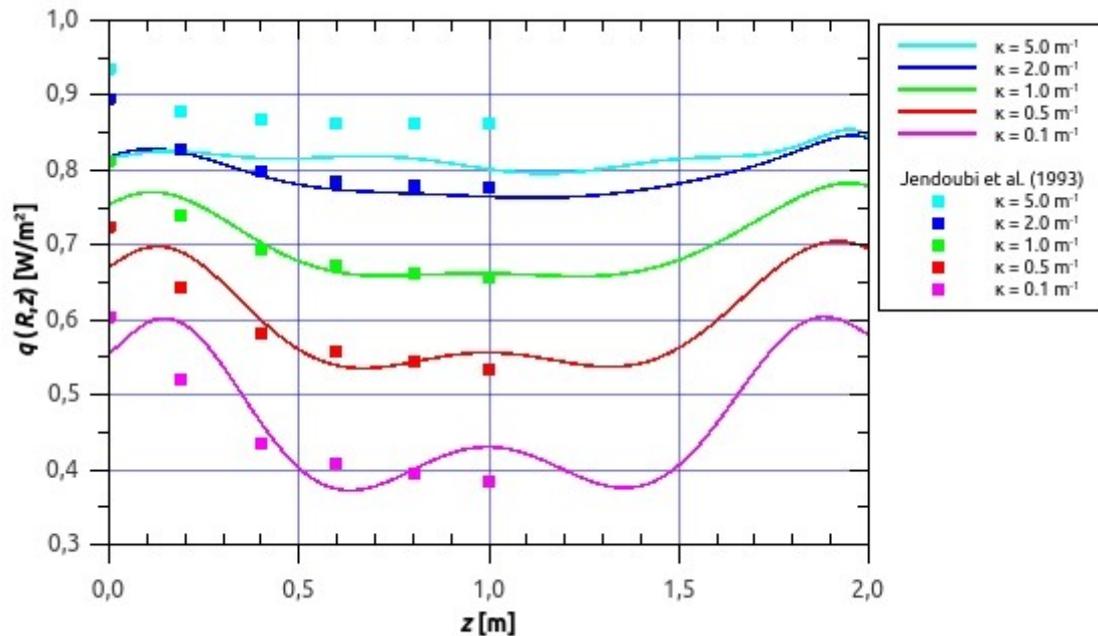


Figura 5: Efecto del coeficiente de absorción en el flujo de calor a lo largo de la pared lateral para incidencia difusa desde la pared lateral, F3 y  $\omega=0,5$ .

El efecto de la variación del coeficiente de absorción en el flujo de calor, a lo largo de la pared lateral, para incidencia difusa desde la pared lateral, función de dispersión hacia adelante F3 y un medio emisor, absorbente y dispersante  $\kappa=\sigma=0,5\text{m}^{-1}$ ,  $\beta=1\text{m}^{-1}$ ,  $\omega=0,5$  con paredes negras  $\varepsilon=1$  se presenta en la Figura 5. Se aprecia nuevamente la simetría respecto a la altura media, los mayores valores de flujo de calor en las proximidades de las paredes inferior y superior, y los mayores valores del flujo de calor corresponden al medio con mayor coeficiente de absorción.

### 3.3 Emisión desde un medio isotérmico

Esta configuración es la que ha recibido mayor atención en la literatura por ser quizás, muy similar a la encontrada en aplicaciones industriales como en hornos y calderas. Se distinguen dos situaciones físicamente diferenciadas, medio emisor, absorbente ( $\kappa>0$ ) pero no dispersante ( $\sigma=0$ ,  $\beta=\kappa$ ,  $\omega=0$ ) y el medio emisor, absorbente y dispersante ( $\beta=\sigma+\kappa$ ,  $\omega=\sigma/\beta$ ). Para el caso de medio puramente dispersante ( $\kappa=0$ ,  $\beta=\sigma$ ,  $\omega=1$ ) no se encontraron trabajos publicados. Para todas estas situaciones se cumple que  $E_{b,\text{med}}=\pi i_{b,\text{med}}=\gamma T^4=1$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ],  $i_{b,\text{med}}=1/\pi$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ] y  $i_{b,\text{inf}}=i_{b,\text{sup}}=i_{b,\text{lat}}=0$ . El medio emisor, absorbente y no dispersante, fue estudiado por Chui et al. (1992), Jendoubi et al. (1993), Hsu y Ku (1994), Baek y Kim (1997), Kim y Baek (1997) en un cilindro hueco y lleno, Ben Salah et al. (2004) y Kim (2008). El caso del medio emisor, absorbente y dispersante fue estudiado por Jendoubi et al. (1993) y Chen y Sutton (2003). En

todos los casos lo hicieron usando cavidades bidimensionales de radio  $R=0,5\text{m}$  y  $R=1\text{m}$  y altura  $H=2R$  con simetría axial.

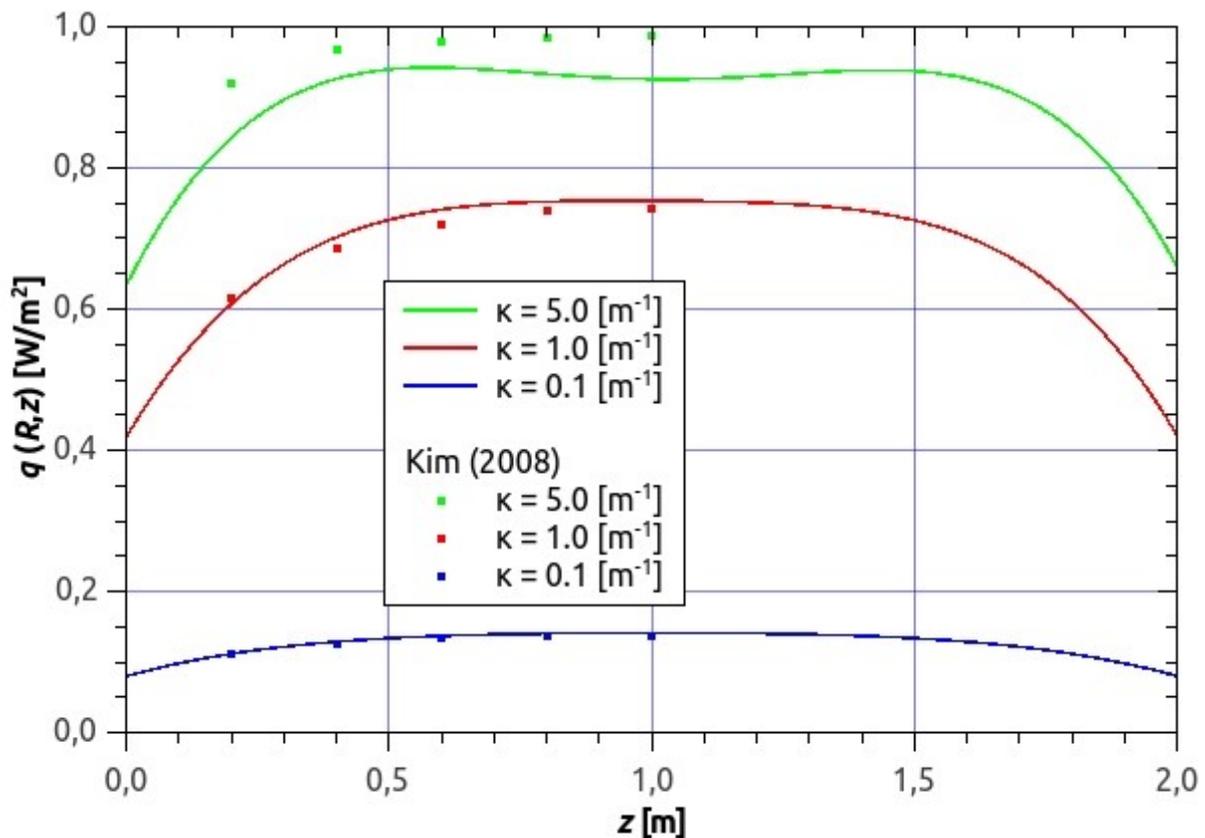


Figura 6: Efecto del coeficiente de absorción en el flujo de calor radiante a lo largo de la pared lateral para emisión desde un medio isotérmico no dispersante.

La Figura 6 muestra el efecto del coeficiente de absorción en el flujo de calor radiante  $q$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ] a lo largo de la pared lateral, para emisión desde un medio isotérmico  $E_{b,\text{med}}=1$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ], no dispersante  $\sigma=0$ ,  $\beta=\kappa$ ,  $\omega=0$  con paredes negras  $\varepsilon=1$ . Se aprecia la simetría respecto a la altura media, menores valores del flujo de calor en las proximidades de las paredes inferior y superior, y un incremento del flujo de calor con el coeficiente de absorción.

En la Figura 7 se puede apreciar el efecto de la función de dispersión en la radiación incidente  $G$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ] a lo largo de la pared lateral, para emisión desde un medio isotérmico  $E_{b,\text{med}}=1$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ], emisor y dispersante  $\kappa=0,2\text{m}^{-1}$ ,  $\sigma=0,8\text{m}^{-1}$ ,  $\beta=1\text{m}^{-1}$  y  $\omega=0,8$  con paredes negras  $\varepsilon=1$ . Se observa, como ya se destacó en casos anteriores, la simetría respecto a la altura media, la reducción de la radiación incidente en las proximidades de las paredes inferior y superior, y la dificultad de distinguir las curvas unas de otras. Los valores muy próximos de la radiación incidente, para las distintas funciones de dispersión, se debe a que el medio emite en forma isotrópica, perdiéndose el efecto de anisotropía de la dispersión. Para poder ver una diferencia mayor en la radiación incidente se debería aumentar el coeficiente de dispersión pero esto reduciría el poder emisor del medio ya que el coeficiente de extinción debe ser constante por definición en el trabajo original.

La Figura 8 muestra el efecto del albedo de dispersión en la radiación incidente  $G$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ] a lo largo de la pared lateral, para emisión desde un medio isotérmico  $E_{b,\text{med}}=1$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ] y dispersión anisotrópica hacia adelante F2. Se observa que el aumento del albedo de dispersión reduce la radiación incidente, debido a la reducción de la emisión desde el medio hacia la

superficie.

En la Figura 9 se muestra el efecto del albedo de dispersión en el flujo de calor  $q$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ] a lo largo de la pared lateral, para emisión desde un medio isotérmico  $i_{b,\text{med}}=1$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ], isotrópico y paredes reflectantes  $\varepsilon=0,5$ . Como en el caso de la radiación incidente anterior, se observa que el flujo de calor disminuye con el albedo de dispersión.

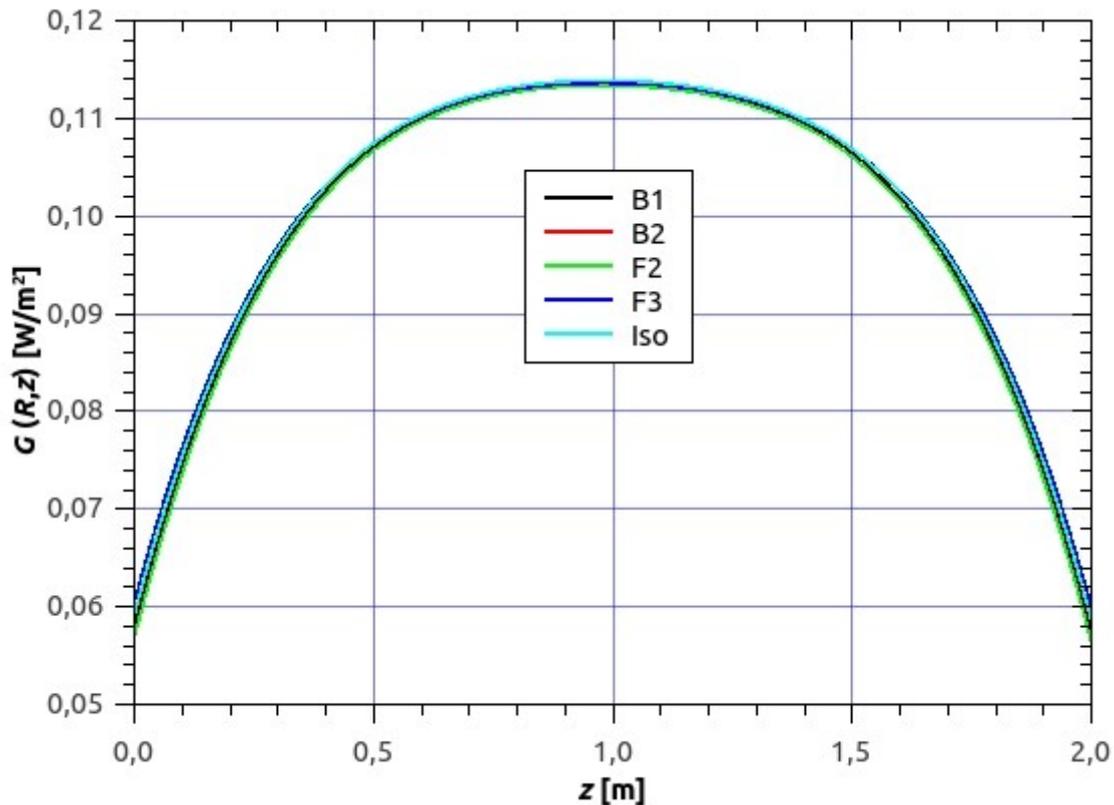


Figura 7: Efecto de la función de dispersión en la radiación incidente a lo largo de la pared lateral para emisión desde un medio isotérmico y  $\omega=0,8$ .

La Figura 10 muestra el efecto del albedo de dispersión en la radiación incidente  $G$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ] a lo largo del eje central, desde un medio isotérmico  $i_{b,\text{med}}=1$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ], isotrópico y paredes reflectantes  $\varepsilon=0,5$ . Se observa nuevamente que el aumento del albedo de dispersión reduce la radiación incidente.

En la Figura 11 se puede observar el efecto del albedo de dispersión en la radiación incidente  $G$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ] a lo largo del radio, en el plano medio  $H/2$ , desde un medio isotérmico  $i_{b,\text{med}}=1$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ], isotrópico y paredes reflectantes  $\varepsilon=0,5$ . Se aprecia, nuevamente, que el incremento del albedo de dispersión reduce la radiación incidente y que los mayores valores de la radiación incidente se encuentran en el eje de la cavidad.

### 3.4 Emisión difusa simultanea desde la pared lateral y un medio isotérmico

Esta configuración térmica es una combinación de las dos últimas, en donde el medio y la pared lateral son emisores difusos,  $i_{b,\text{med}}=i_{b,\text{lat}}=1$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ] y  $i_{b,\text{inf}}=i_{b,\text{sup}}=0$ . Esta situación fue estudiada por Chen y Sutton (2003) en una cavidad tridimensional cilíndrica  $R=0,5\text{m}$  y altura  $H=2R$ . Se reproducen solo dos casos, en los que la pared lateral, en toda su longitud, emite en un rango del ángulo azimutal  $0 < \varphi_0 < \pi$  para un caso y  $0 < \varphi_0 < \pi/2$  para el otro.

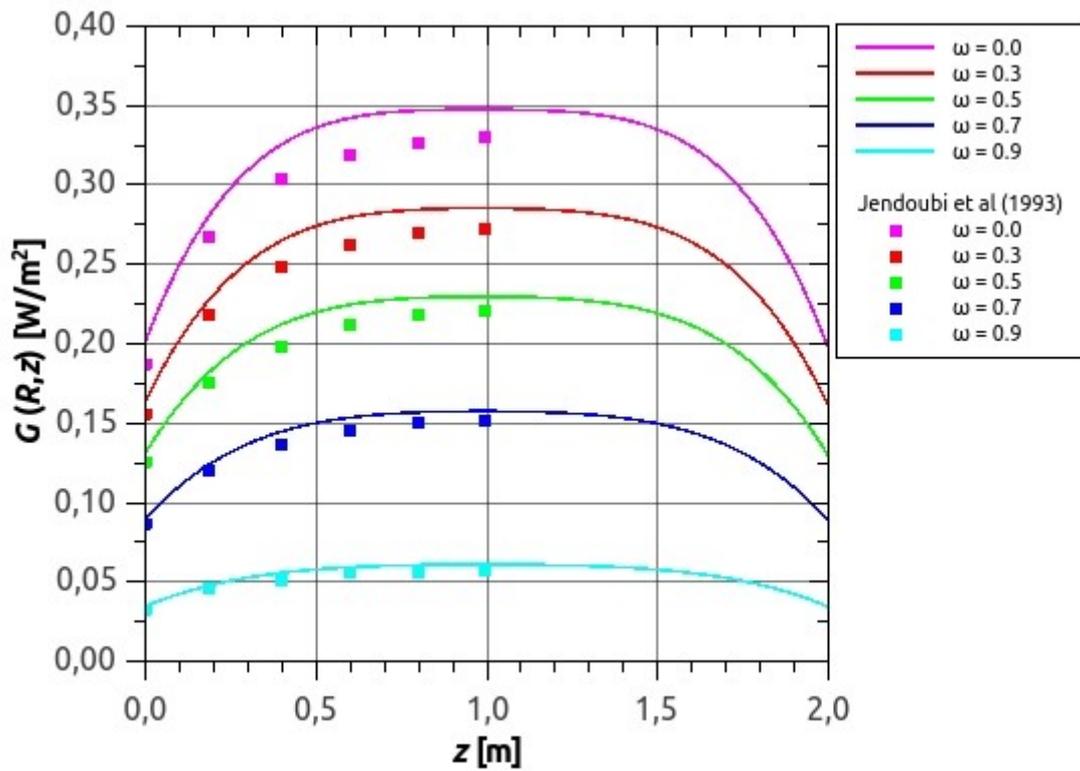


Figura 8: Efecto del albedo de dispersión en la radiación incidente a lo largo de la pared lateral para emisión desde un medio isotérmico y F2.

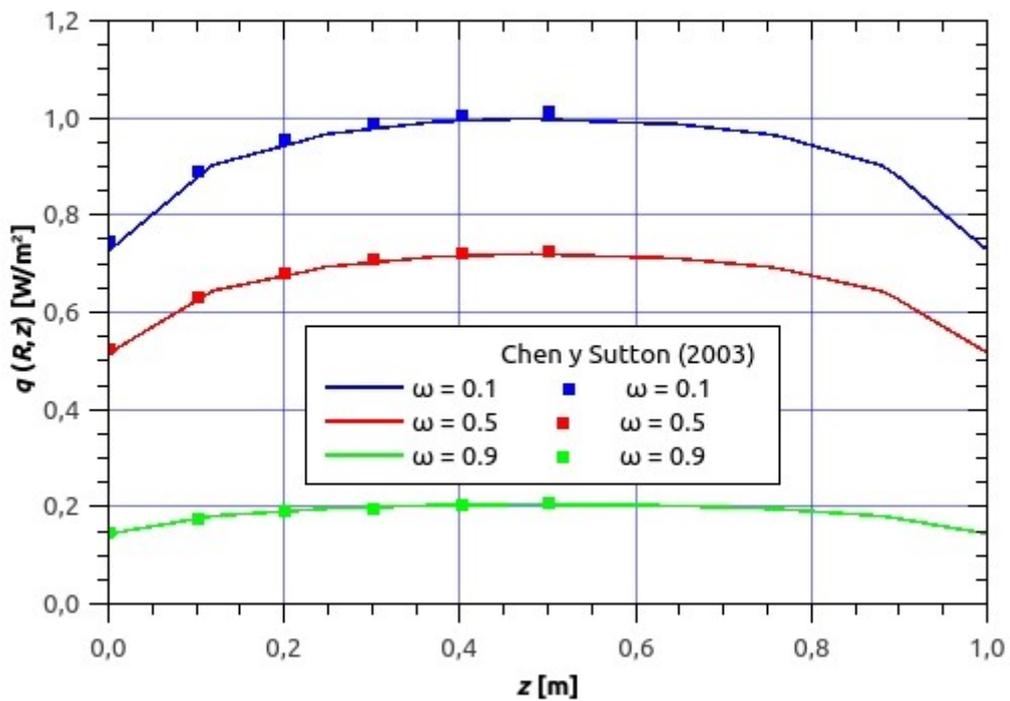


Figura 9: Efecto del albedo de dispersión en el flujo de calor a lo largo de la pared lateral para emisión desde un medio isotérmico, isotrópico y paredes reflectantes  $\epsilon=0,5$ .

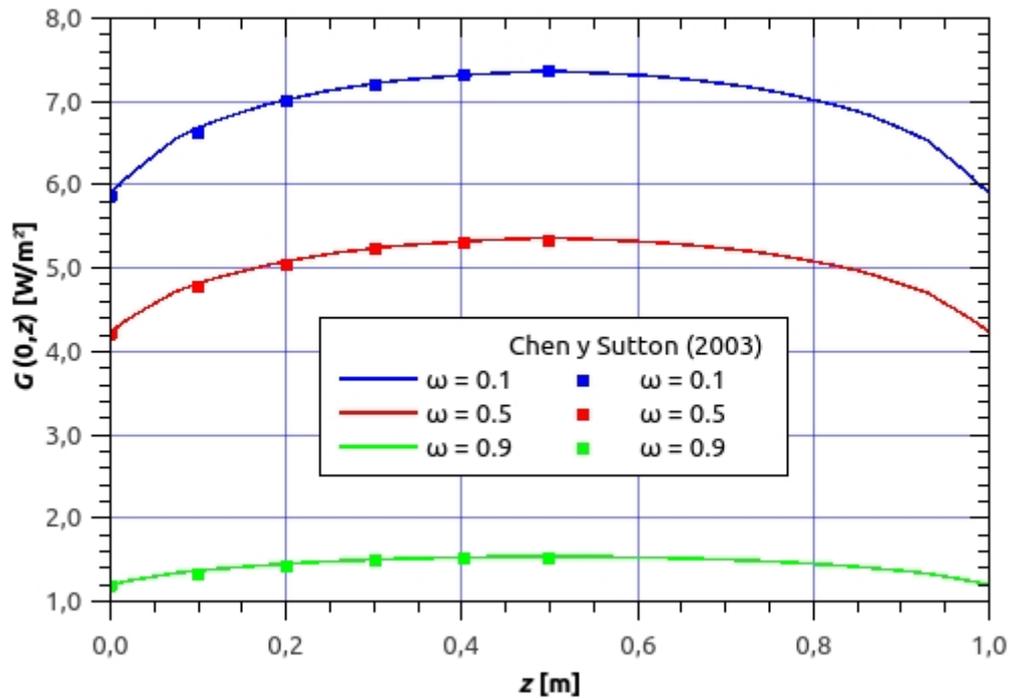


Figura 10: Efecto del albedo de dispersión en la radiación incidente a lo largo del eje central desde un medio isotérmico, isotrópico y paredes reflectantes  $\epsilon=0,5$ .

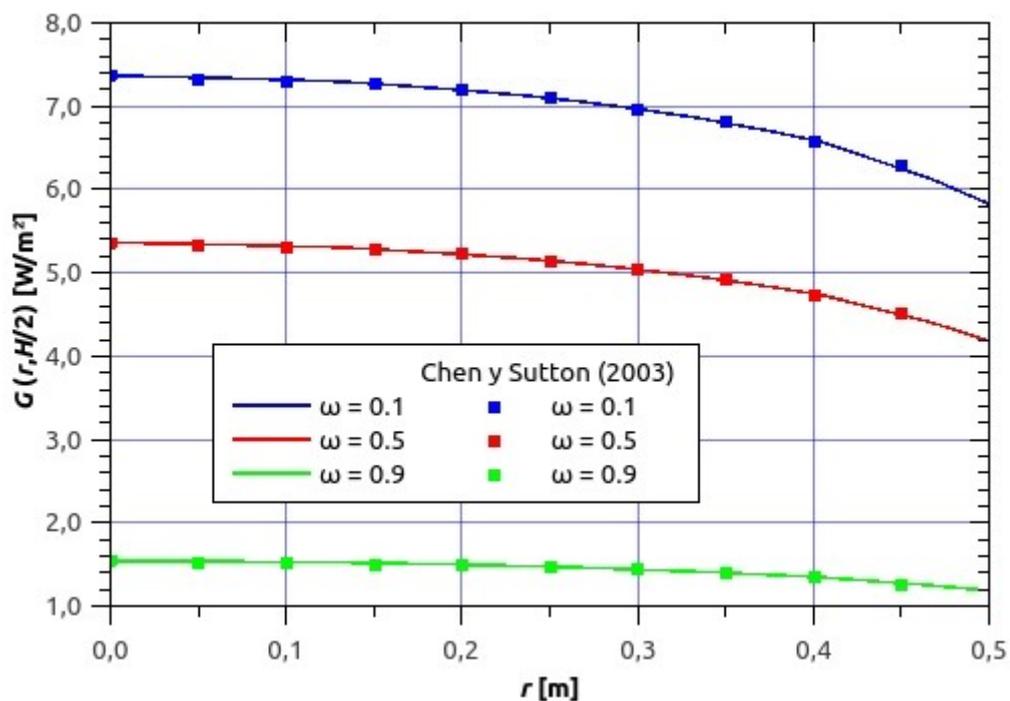


Figura 11: Efecto del albedo de dispersión en la radiación incidente a lo largo del radio, en el plano medio, desde un medio isotérmico, isotrópico y paredes reflectantes  $\epsilon=0,5$ .

La Figura 12 muestra el efecto del rango angular de la pared lateral emisora en la radiación incidente  $G$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ] a lo largo de una circunferencia de radio medio  $R/2$  en el plano medio  $H/2$ ,

desde un medio emisor, absorbente y dispersante  $\kappa=\sigma=0,5\text{m}^{-1}$ ,  $\beta=1\text{m}^{-1}$ ,  $\omega=0,5$ , isotrópico y con paredes negras  $\varepsilon=1$ . Se aprecia que los mayores valores de la radiación incidente corresponden, lógicamente, al rango  $0<\varphi_0<\pi$  y se mantienen por encima del valor correspondiente a  $0^\circ$  inicial hasta aproximadamente los  $180^\circ$  y luego se reducen por debajo del valor en el inicio del rango. Para el caso de  $0<\varphi_0<\pi/2$  se observa algo similar entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$  para el primer tramo de valores mayores y entre  $90^\circ$  y  $360^\circ$  para los valores menores.

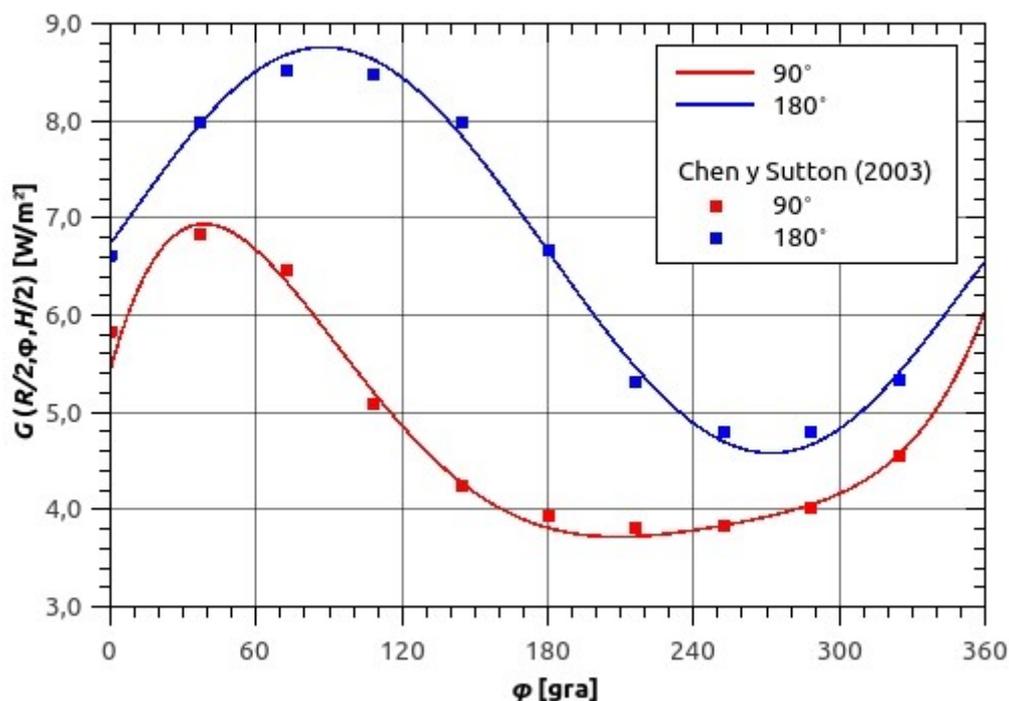


Figura 12: Efecto del rango angular de la pared lateral emisora en la radiación incidente a lo largo de una circunferencia de radio medio en el plano medio, desde un medio isotérmico e isotrópico con  $\varepsilon=1,0$  y  $\omega=0,5$ .

#### 4 CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un código computacional para el cálculo de la transferencia radiante en cavidades cilíndricas multidimensionales con paredes grises, difusas y reflectantes, rellenas con un medio gris absorbente, emisor y anisotrópicamente dispersante.

El código computacional consta de cuatro módulos independientes que permiten resolver problemas radiantes en paredes cilíndricas infinitas, en una sección circular o anular infinita, en una sección longitudinal con simetría axial finita y en una cavidad cilíndrica tridimensional.

Se ha utilizado el método de los volúmenes finitos para resolver las ecuaciones de la transferencia radiante junto con una expansión de los polinomios de Legendre para tener en cuenta los efectos de la dispersión anisotrópica.

Se han reproducido una gran cantidad de configuraciones geométricas y térmicas existentes en la literatura y se han evaluado la influencia de los parámetros radiantes más importantes.

Los resultados obtenidos fueron comparados con los resultados existentes en la literatura, donde se han usado métodos numéricos diferentes para resolver la ecuación de la transferencia radiante.

De la comparación de resultados se puede concluir que las herramientas computacionales desarrolladas en este trabajo proporcionan resultados con un grado de precisión aceptable.

Se ha verificado la capacidad del método de los volúmenes finitos para resolver problemas de radiación térmica siendo totalmente confiable y seguro para resolver las configuraciones térmicas analizadas en este trabajo.

## REFERENCIAS

- An W., Ruan L. M., Qi H., Liu L. H., Finite element method for radiative heat transfer in absorbing and anisotropic scattering media, *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 96, 409-422, 2005.
- Baek S. W., Kim M. Y., Modification of the discrete-ordinates method in an axisymmetric cylindrical geometry, *Numer. Heat Transfer B*, 31, pp. 313–326, 1997.
- Ben Nejma F., Mezgar A., Charrada K., Radiative entropy generation in a cylindrical enclosure, *European Conference of Chemical Engineering ECCE'10, European Conference of Civil Engineering ECCIE'10, European Conference of Mechanical Engineering ECME'10, European Conference of Control ECC'10*, Pages 67-70, Puerto de la Cruz, Tenerife, November 2010.
- Ben Salah M., Askri F., Jemni A., Ben Nasrallah S., Numerical analyses of radiative heat transfer in any arbitrarily-shaped axisymmetric enclosures, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 97, Issue 3, Pages 395-414, February 2006.
- Ben Salah M., Askri F., Slimi K., Ben Nasrallah S., Numerical resolution of the radiative transfer equation in a cylindrical enclosure with the finite-volume method, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 47, pp. 2501–2509, 2004.
- Brewster M. Q., *Thermal radiative transfer and properties*, John Wiley & Sons, 1992.
- Byun D., Lee C., Baek S. W., Radiative heat transfer in discretely heated irregular geometry with an absorbing, emitting, and anisotropically scattering medium using combined Monte-Carlo and finite volume method, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, 47, 4195-4203, 2004.
- Chaabane R., Askri F., Ben Nasrallah S. B., Transient combined conduction and radiation in a two-dimensional participating cylinder in presence of heat generation, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, Volume 79, Pages 693-698, July 2011.
- Chaabane R., Askri F., Ben Nasrallah S., Application of the lattice Boltzmann method to transient conduction and radiation heat transfer in cylindrical media, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 112, Issue 12, Pages 2013-2027, August 2011.
- Chai J. C. K., *A finite volume method for radiation heat transfer*, PhD Thesis, 1994.
- Chai J. C., Lee H. S., Patankar S. V., Finite Volume Method for Radiation Heat Transfer, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, vol. 8, no. 3, pp. 419-425, 1994.
- Chai J. C., Parthasarathy G., Lee H. S., Patankar S. V., Finite Volume Radiative Heat Transfer Procedure for Irregular Geometries, *Journal of Thermophysics and Heat Mass Transfer*, vol. 9, no. 3, pp. 410-415, 1995.
- Chen X. L., Sutton W. H., Radiative transfer in finite cylindrical media using transformed integral equations, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 77, Issue 3, Pages 233-271, 15 March 2003.
- Chui E. H. K., *Modeling of radiative heat transfer in participating media by the finite volume method*, PhD Thesis, 1990.
- Chui E. H., Raithby G. D., Computation of radiant heat transfer on a non-orthogonal mesh using the finite-volume method, *Numerical Heat Transfer, Part B*, vol. 23, no. 3, pp. 269-288, 1993.
- Chui E.H., Raithby G.D., Hughes P.M.J., Prediction of radiative transfer in cylindrical enclosures with the finite volume method, *J. Thermophys. Heat Transfer*, 6, pp. 605–611, 1992.

- Dombrovsky L. A., *Radiation heat transfer in disperse system*, Begell House, 1996.
- Grissa H., Askri F., Ben Salah M., Ben Nasrallah S., Efficient inverse radiation analysis in a participating cylindrical medium, *High Temperatures - High Pressures*, Volume 41, Issue 1, Pages 23-37, 2012.
- Hao J., Ruan L., Tan H., Effect of anisotropic scattering on radiative heat transfer in two-dimensional rectangular media, *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 78, 151-161, 2003.
- Hsu P. F., Ku J. C., Radiative heat transfer in finite cylindrical enclosures with nonhomogeneous participating media, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Volume 8, Issue 3, Pages 434-440, July 1994
- Huang Q., Liu T., Yang J., Yao L., Gao L., Evaluation of radiative transfer using the finite volume method in cylindrical photoreactors, *Chemical Engineering Science*, Volume 66, Issue 17, Pages 3930-3940, 1 September 2011.
- Hunter B., Huai X., Guo Z., A comparison of the discrete ordinates method and finite volume method for radiative heat transfer analysis, *ASME 2011 International Mechanical Engineering Congress and Exposition IMECE 2011*, Volume 4, Issue PARTS A AND B, Pages 819-829, Denver, CO, November 2011.
- Jamaluddin, A.S., Smith, P.J. , Discrete-ordinates solution of radiative transfer equation in nonaxisymmetric cylindrical enclosures, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Volume 6, Issue 2, Pages 242-245, April 1992.
- Jendoubi S., Lee H. S. , Kim T. K., Discrete-ordinates solutions for radiatively participating media in a cylindrical enclosure, *J. Thermophys. Heat Transfer*, 7, pp. 213–219, 1993.
- Jendoubi S., Lee H. S., Comparisons of cylindrical and rectangular media radiative transfer solutions using the S-N discrete ordinates method, *AIAA 27th Thermophysics Conference*, Nashville, TN, July 6-8, 1992.
- Kim K. W., Baek S. W., Alternative sensitivity methods for inverse radiation problems in a two-dimensional cylindrical enclosure, *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, Volume 55, Issue 5, Pages 361-378, 2009.
- Kim K. W., Baek S. W., Inverse surface radiation analysis in an axisymmetric cylindrical enclosure using a hybrid genetic algorithm, *Numerical Heat Transfer; Part A: Applications*, Volume 46, Issue 4, Pages 367-381, 20 August 2004.
- Kim K., Guo Z., Discrete ordinates method for transient radiation transfer in cylindrical enclosures, *Proceedings of the ASME Summer Heat Transfer Conference*, Pages 69-76, Las Vegas, NV, July 2003.
- Kim M. Y., Assessment of the axisymmetric radiative heat transfer in a cylindrical enclosure with the finite volume method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 51, Issue 21-22, Pages 5144-5153, October 2008.
- Kim M. Y., Baek S. W., Analysis of radiative transfer in cylindrical enclosures using the finite volume method, *J. Thermophys. Heat Transfer*, 11, pp. 246–252, 1997.
- Kim T. K., *Radiation and combined mode heat transfer analysis in absorbing, emitting, and Mie-anisotropic scattering media using the s-n discrete ordinates method*, Ph. D. Thesis, University of Minnesota, 1990.
- Liu J., Shang H. M., Chen Y. S., Development of an unstructured radiation model applicable for two-dimensional planar, axisymmetric, and three dimensional geometries, *J. Quantitat. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 66 (6), pp. 17–33, 2000.
- Mishra S. C., Hari Krishna C., Analysis of radiative transport in a cylindrical enclosure-An application of the modified discrete ordinate method, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 112, Issue 6, Pages 1065-1081, April 2011.
- Mishra S. C., Krishna C. H., Kim M. Y., Analysis of conduction and radiation heat transfer in a 2-D cylindrical medium using the modified discrete ordinate method and the lattice

- boltzmann method, *Numerical Heat Transfer; Part A: Applications*, Volume 60, Issue 3, Pages 254-287, January 2011.
- Mishra S. C., Stephen A., Kim, M. Y., Analysis of non-fourier conduction-radiation heat transfer in a cylindrical enclosure, *Numerical Heat Transfer; Part A: Applications*, Volume 58, Issue 12, Pages 943-962, January 2010.
- Moder J. P., Chai J. C., Parthasarathy G., Lee H. S., Patankar S. V., Nonaxisymmetric radiative transfer in cylindrical enclosures, *Numer. Heat Transfer B*, 30, pp. 437–452, 1996.
- Modest M. F., Radiative heat transfer, Mc Graw-Hill, 1993.
- Murthy J. Y., Mathur S. R., Radiative heat transfer in axisymmetric geometries using an unstructured finite-volume method, *Numer. Heat Transfer B*, 33, pp. 397–416, 1998.
- Nunes E. M., Modi V., Naraghi M. H. N., Radiative transfer in arbitrarily-shaped axisymmetric enclosures with anisotropic scattering media, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 43, Issue 18, Pages 3275-3285, 15 September 2000.
- Rebollo D., Análisis de la radiación térmica con dispersión anisotrópica de Mie en cavidades bidimensionales mediante el método de los volúmenes finitos, *XVIII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones*, Tandil, Buenos Aires, Argentina, Noviembre del 2009a.
- Rebollo D., Análisis de la radiación térmica con dispersión anisotrópica en placas planas, *I Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica*, Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina, Octubre del 2008a.
- Rebollo D., Olivera M., Romero C., Simulación numérica de la radiación térmica no gris del vapor de h<sub>2</sub>O en un medio plano, *II Segundo Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica*, San Juan, Argentina, Noviembre del 2010a.
- Rebollo D., Rodrigo R., Campo A., “Análisis de la radiación térmica colimada en un medio plano infinito”, *XXI Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Buenos Aires, Argentina, Noviembre del 2010b.
- Rebollo D., Rodriguez C., Análisis de la radiación térmica no gris del dióxido de carbono en un medio plano no isotérmico, *XIX Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF 2011)*, Noviembre del 2011, Rosario, Argentina.
- Rebollo D., Simulación Numérica de la Radiación Térmica con Dispersión Anisotrópica de Mie mediante el Método de los Volúmenes Finitos, *XVI Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones*, Córdoba, Argentina, Octubre del 2007.
- Rebollo D., Simulación numérica de la radiación térmica de gases no grises en cavidades multidimensionales, *XVII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones*, San Luis, Argentina, Noviembre del 2008b.
- Rebollo D., Simulación numérica de la radiación térmica de gases no grises en un medio plano, *XVIII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones*, Tandil, Buenos Aires, Argentina, Noviembre del 2009b.
- Siegel R., Howell J. R., *Thermal Radiation Heat Transfer*, Taylor & Francis, 1992.
- Tian W. T., Chiu K. S., A two-dimensional scheme for axisymmetric radiative heat transfer using the finite-volume method, *Numer. Heat Transfer B*, 47, pp. 199–211, 2005.
- Trivc D. N., O’Brien T. J., Amon C. H., Modeling the radiation of anisotropically scattering media by coupling Mie theory with finite volume method, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, 47, 5765-5780, 2004.
- Tsai, J.R., Özişik, M.N., Radiation in cylindrical symmetry with anisotropic scattering and variable properties, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 33, Issue 12, Pages 2651-2658, December 1990.
- Kim M. Y., Baek S. W., Modeling of radiative heat transfer in an axisymmetric cylindrical enclosure with participating medium, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 90, Issues 3–4, Pages 377–388, 1 February 2005.