

SISTEMA DIFERENCIAL COMPLETO DE SEGUNDO ORDEN PARA LOS CORRIMIENTOS FLEXIONAL Y AXIAL DE BARRAS ESBELTAS.

Carlos P. Filipich^{a,b} y Claudia A. Egidí^a

*^aDepartamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca,
Argentina, cegidi@uns.edu.ar*

*^bCIMTA, FRBB, Universidad Tecnológica Nacional, 11 de Abril 461, (8000) Bahía Blanca,
Argentina, cfilipich@gmail.com*

Palabras claves: segundo orden, hiperestáticos, iteración.

Resumen. Cuando el planteo del equilibrio se efectúa en la configuración del cuerpo deformado, considerando cómo se modifica la acción de las cargas aplicadas, nos introducimos en la denominada teoría de segundo orden.

Una extensión respecto de las expresiones que reporta comúnmente la bibliografía afín que los autores han desarrollado, se presenta en este trabajo. La novedad consiste en que el sistema diferencial combina las funciones de flexión y de deformación axial contrariamente a la de uso divulgado donde sólo se modifica la flexional manteniéndose la ecuación diferencial para la deformación axial similar a la clásica aceptada en la teoría de primer orden.

Como se sabe, la resolución de entramados hiperestáticos por medio de la teoría de segundo orden, conduce a un proceso iterativo para encontrar los esfuerzos característicos de la estructura bajo estudio. Diversos ejemplos numéricos se comparan con las clásicas teorías de primero y segundo orden observándose ciertas diferencias de coincidencia entre los esfuerzos característicos respectivos.

Análogamente a la teoría clásica de segundo orden el presente desarrollo permite por vía indirecta, conocer las cargas críticas de una estructura de barras. Evidentemente dicho límite se presenta cuando el proceso iterativo diverge.

1 INTRODUCCIÓN

El sistema diferencial completo de 2° orden que presentaremos, en general no lineal, con algunas aplicaciones numéricas, se basa sencillamente en utilizar la que se denomina teoría de 2° orden. Es decir plantear el equilibrio en la configuración deformada en reposo de una barra esbelta. En tanto, como es evidente, esta es la situación real ya que cualquier sistema estructural en equilibrio lo está en su configuración deformada. La teoría clásica de 1^{er} orden en cambio, recurriendo a las hipótesis de que las deformaciones del sistema son relativamente pequeñas, plantea las condiciones de equilibrio en la configuración indeformada o de referencia. Esta teoría sumamente divulgada, da lugar entre otras virtudes, a los denominados métodos de rigidez para resolver hiperestáticos de cualquier grado.

Entendemos por deformaciones los desplazamientos y giros de ejes y secciones y no las específicas que darían lugar al tensor clásico o lineal de deformación.

Una vez planteadas de forma genérica las condiciones de equilibrio en la configuración deformada, impondremos la hipótesis de desplazamientos y giros de pequeña magnitud relativa. Adicionando, que las cargas aplicadas al sistema de barras delgadas no modifican ni su magnitud, ni su punto de aplicación, ni su dirección ni sentido durante la deformación, llegaremos a un sistema diferencial en el corrimiento transversal del eje de la barra (flexional) y el axial en sentido de dicho eje. Debido a la esbeltez de las piezas tratadas la influencia de la deformación por corte es despreciada.

Cabría una discusión respecto de las cargas distribuidas. Exigimos que su magnitud se mantenga durante la deformación. Esto es: en general la longitud del eje se modificará respecto de la inicial en la configuración de referencia. Correspondientemente la magnitud debería modificarse para que conservemos las resultantes invariantes. Las hipótesis de pequeñas deformaciones “afortunadamente” conducen a que las integrales sobre el dominio deformado equivalen a integrar sobre el dominio de referencia. Esta discusión ampliamente abordada a Mecánica del Continuo, da lugar a los denominados vectores tensión de Piola-Kirchhoff, ver por ejemplo [Filipich y Rosales, 2000](#).

Otro ítem de este trabajo, consiste en calcular, por vía inversa, partiendo del sistema diferencial de equilibrio, la energía de deformación almacenada por el sistema de barras. Veremos que aparecen términos que no son intuitivamente evidentes. Ahora bien disponiendo de la expresión de energía potencial elástica nos pone frente a la facilidad -por ejemplo por medio del Teorema de Hamilton- de deducir las ecuaciones completas de movimiento de 2° orden. Los autores dejan este desarrollo para una oportunidad futura.

Por último algunos ejemplos numéricos serán resueltos y comparados con la Teoría Clásica de primer orden. El sistema diferencial de equilibrio se presentará de forma tal que una simple consideración o eliminación de términos permite acceder a cualquiera de las tres teorías.

2 PLANTEO DEL PROBLEMA

Sea la barra esbelta de sección uniforme de la [Figura 1](#) que se deforma en el plano. El módulo E de elasticidad es constante (material homogéneo). Denominamos como Ω , J y L al área de la sección transversal, al momento de inercia de la sección respecto al eje baricéntrico perpendicular al plano de deformación y a la longitud de la pieza, respectivamente.

Como dijimos $0 \leq x \leq a$.

Planteamos el equilibrio global del tramo AP en la configuración deformada dada por los corrimientos $u(x)$ y $v(x)$.

La estática plana exige que la suma de fuerzas actuantes en el tramo según dos direcciones ortogonales cualesquiera y la suma de momentos respecto de algún punto del plano se anulen,

para garantizar el equilibrio.

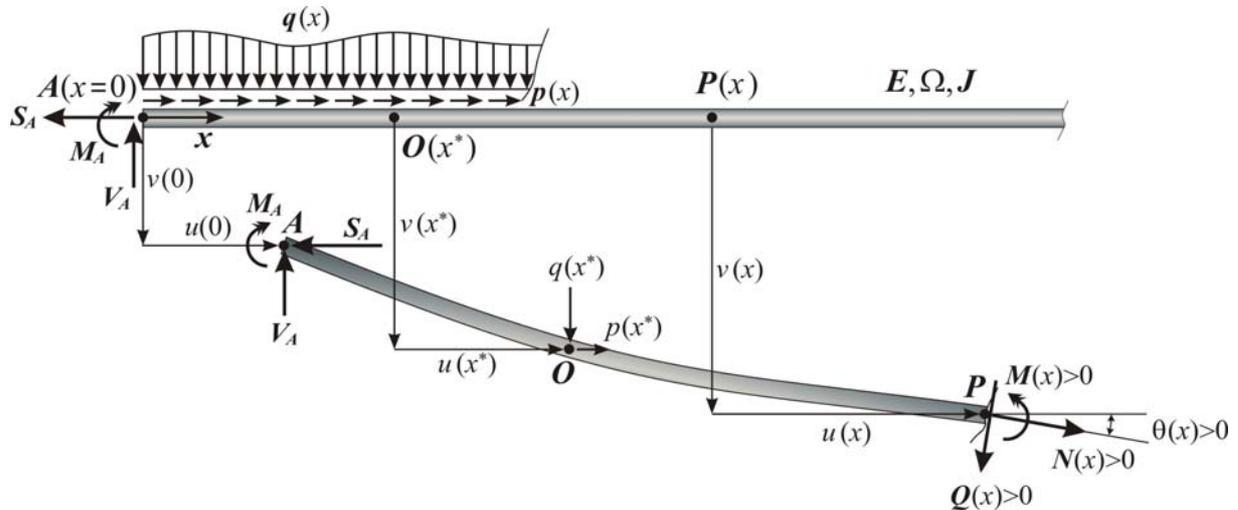


Figura 1: Barra esbelta y su deformación plana.

Sea entonces (con $0 \leq x^* \leq x$) por conveniencia:

- Suma según dirección x :

$$-S_A + \int_0^x p(x^*) dx^* + N(x) \cos \theta(x) - Q(x) \sin \theta(x) = 0 \tag{1}$$

- Suma según dirección perpendicular a x :

$$-V_A + \int_0^x q(x^*) dx^* + N(x) \sin \theta(x) - Q(x) \cos \theta(x) = 0 \tag{2}$$

- Suma de momentos respecto de P:

$$M_A - S_A [v(x) - v(0)] + V_A [x + u(x) - u(0)] + \int_0^x p(x^*) [v(x) - v(x^*)] dx^* - \int_0^x q(x^*) [x - x^* + u(x) - u(x^*)] dx^* - M(x) = 0 \tag{3}$$

Debe observarse que $N(x)$ y $Q(x)$ se definen como lo hace la Resistencia de Materiales pero sobre una sección de la configuración deformada. La del momento flector $M(x)$ está dada por (3). Es sencillo hallar las expresiones del esfuerzo normal $N(x)$ y del esfuerzo de corte $Q(x)$. En efecto. Sumando miembro a miembro la ecuación (1) multiplicada por $\cos \theta(x)$ y la ecuación (2) multiplicada por $\sin \theta(x)$ obtenemos que:

$$N(x) - [S_A - R_p(x)] \cos \theta(x) - [V_A - R_q(x)] \sin \theta(x) = 0 \tag{4}$$

Asimismo restando la ecuación (1) multiplicada por $\sin \theta(x)$ de la ecuación (2) multiplicada por $\cos \theta(x)$ obtenemos:

$$Q(x) + [S_A - R_p(x)] \sin \theta(x) - [V_A - R_q(x)] \cos \theta(x) = 0 \tag{5}$$

Indicamos por $R_p(x)$ y $R_q(x)$ a las resultantes de cargas p y q en el tramo AP .

En cuanto a las expresiones de $\theta(x)$, $\cos\theta(x)$ y $\sin\theta(x)$ puede encontrarse una explicación fundamentada por ejemplo en Filipich y Rosales, 2000. Sin embargo geoméricamente para desplazamientos y giros pequeños observamos que si $\left|\frac{v(x)}{a}\right| \ll 1$, $\left|\frac{u(x)}{a}\right| \ll 1$, $|v_x(x)| \ll 1$, $|u_x(x)| \ll 1$, etc., entonces:

$$\theta(x) \cong v_x(x) \quad ; \quad \cos\theta(x) \cong 1 \quad ; \quad \sin\theta(x) \cong \frac{v_x(x)}{1+u_x(x)} \cong v_x(x) \quad (6)$$

donde $(\bullet)_x \equiv \frac{d(\bullet)}{dx}$, etc.

A los efectos prácticos podría aceptarse que $1+u_x(x) \cong 1$, sin embargo decidimos continuar el desarrollo con las expresiones (6), en tanto no se produzca un producto de derivadas que entonces descartaremos; luego $(1+u_x(x))^{-1} \cong 1-u_x(x)$ por lo cual aceptaremos que $\sin\theta(x) \cong v_x(x)$.

3 SISTEMA DIFERENCIAL COMPLETO DE 2º ORDEN

Como dijimos las ecuaciones (1) y (2) (ó (4) y (5)) y la (3) garantizan el equilibrio *global* del tramo genérico AP deformado. Es muy simple obtener las ecuaciones de equilibrio *local*. Para ello considerando las expresiones (6), y derivando las expresiones (1), (2) y (3) una vez respecto a x obtenemos:

$$N_x - (Q \cdot v_x)_x = -p(x) \quad (7)$$

$$Q_x - (N \cdot v_x)_x = -q(x) \quad (8)$$

$$M_x - Q(1+u_x) = 0 \quad (9)$$

Obsérvese que las ecuaciones tienen una semejanza formal a las formas de equilibrio local de barras curvas gruesas (ver Filipich, 2012) (si bien las presentes son más complicadas).

A continuación deduciremos el sistema diferencial completo de equilibrio de segundo orden, en función de los corrimientos flexional y axial. Para conseguir esto, es necesario proponer las denominadas ecuaciones constitutivas. Es decir la relación entre el esfuerzo normal $N(x)$ y el momento flector $M(x)$ con dichos corrimientos y sus derivadas. Utilizamos las funciones lineales clásicas de Resistencia de Materiales (ver por ejemplo Filipich, 2012), o sea:

$$N = N(x) = E\Omega u_x(x) \quad (a) \quad (10)$$

$$M = M(x) = -EJ\theta_x(x) = -EJv_{xx}(x) \quad (b)$$

Ahora bien, para hallar el sistema diferencial de equilibrio completo de segundo orden y presentarlo en forma similar a las divulgadas ecuaciones de las elásticas de la teoría de primer orden, procedemos como sigue:

Derivamos dos veces respecto a x la expresión (3) y derivamos una vez la ecuación (4), teniendo en cuenta las expresiones (6) y luego las constitutivas (10). Las derivaciones indicadas eliminan constantes de integración que de todas maneras reaparecerán al integrar el sistema diferencial. Los productos entre derivadas de los corrimientos se descartan, debido a

las hipótesis de pequeñez. Este procedimiento equivale al planteo del equilibrio local en un elemento infinitesimal de viga deformada.

Por último, previamente a expresar el sistema, destacamos que en la presentación del mismo aparecerán 2 **factores de inclusión** \mathcal{D} y \mathcal{C} que afectan a ciertos términos, con el único propósito de que si $\mathcal{D} = \mathcal{C} = 1$ tenemos la teoría de segundo orden completa, si $\mathcal{C} = 0$ y $\mathcal{D} = 1$ tendremos la teoría de segundo orden clásica y si $\mathcal{D} = \mathcal{C} = 0$ tendremos las ecuaciones diferenciales que gobierna la teoría clásica de equilibrio de primer orden. O sea:

$$EJv_{xxxx} - \mathcal{D} \{ [S_A - R_p(x)]v_{xx} - p(x)v_x \} + \mathcal{C} \{ [V_A - R_q(x)]u_{xx} - q(x)u_x \} = q(x) \quad (11)$$

$$E\Omega u_{xx} - \mathcal{C} \{ [V_A - R_q(x)]v_{xx} - q(x)v_x \} = -p(x) \quad (12)$$

No debe sorprender en esta teoría de segundo orden completa que en las ecuaciones de equilibrio (11) y (12) los esfuerzos S_A y V_A en $x=0$ de cada barra, así como las cargas p y q , afecten a diversas derivadas de los desplazamientos. De forma semejante, la teoría clásica de segundo orden considera únicamente el efecto de S_A y p .

Los factores \mathcal{D} y \mathcal{C} también los utilizaremos en las expresiones de las condiciones de borde y en la energía de deformación.

La diferencia importante que se observa entre las teorías de primero y segundo orden, es, que cuando los factores de inclusión no son ambos nulos ($\mathcal{C} \neq 0$ y/o $\mathcal{D} \neq 0$), las ecuaciones de equilibrio dependen de S_A y V_A que son esfuerzos extremos (ver Figura 1). Si la vinculación del extremo A permite imponer S_A y/o V_A (datos) el sistema es de resolución directa. En los casos donde S_A y/o V_A dependen de la deformación, las teorías de segundo orden deberán resolverse por iteración. Los ejemplos del ítem 6 aclararán esta situación.

4 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN Y CONDICIONES DE BORDE

Aceptando la validez del Teorema de mínima energía para problemas de equilibrio (o equivalentemente el Teorema de Hamilton para equilibrio dinámico), tendremos una energía total W para una deformación genérica, de forma tal que la variación primera nula conduce al sistema (11) y (12) y lo que es muy importante a la automaticidad del planteo de las Condiciones de Borde.

Sea la Figura 2, donde indicamos los esfuerzos extremos positivos.

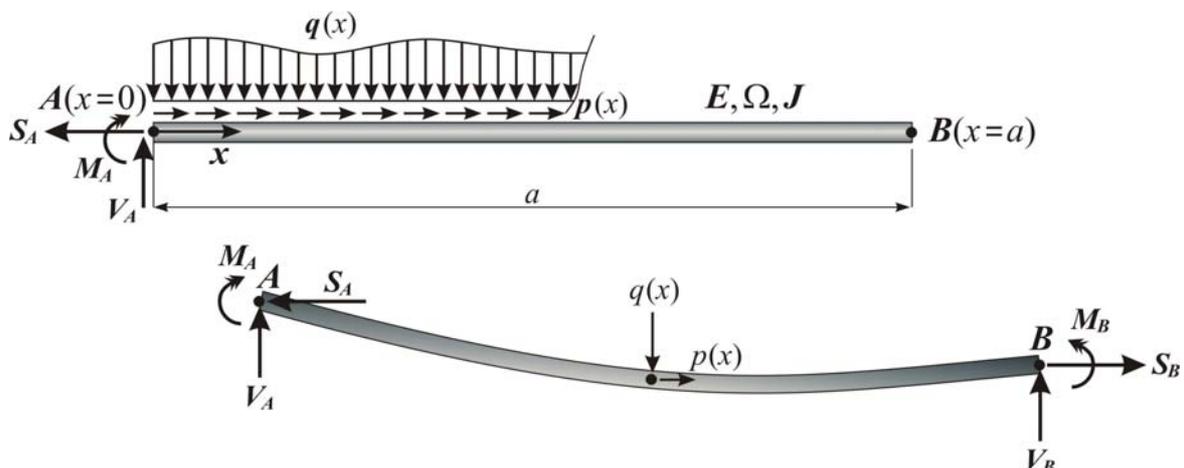


Figura 2: Cargas distribuidas y esfuerzos extremos.

O sea, si U es la energía de deformación, se define como energía total W a:

$$W \equiv U + S_A u(0) + V_A v(0) - M_A v_x(0) - S_B u(a) + V_B v(a) + M_B v_x(a) - \int_0^a (q(x)v(x) + p(x)u(x)) dx \quad (13)$$

Para cada tramo la condición de equilibrio es la variación primera de W nula:

$$\delta W = 0 \quad (14)$$

Para encontrar la expresión de U a partir del sistema procedemos simbólicamente como sigue, imponiendo que:

$$\delta U = \int_0^a [ec. (11) \delta v - ec. (12) \delta u] dx \quad (15)$$

Donde δu y δv son variaciones admisibles de los corrimientos u y v respectivamente. Integrando sucesivamente por partes y admitiendo que las Condiciones de Borde se verifican idénticamente y teniendo en cuenta la condición (14) y la expresión (13) deducimos que:

$$2U = \int_0^a \left\{ E J v_{xx}^2 + E \Omega u_x^2 - 2C [V_A - R_q(x)] u_x v_x + D [S_A - R_p(x)] v_x^2 \right\} dx \quad (16)$$

Por otro lado la Condición de Borde de una barra aislada (ver Figura 2) es:

$$\begin{aligned} & \left| E J v_{xx} \delta v_x \right|_0^a - \left| E J v_{xxx} \delta v \right|_0^a + \left| E \Omega u_x \delta u \right|_0^a - C \left| [V_A - R_q(x)] (u_x \delta v + v_x \delta u) \right|_0^a + \\ & + D \left| [S_A - R_p(x)] v_x \delta v \right|_0^a + S_A \delta u(0) + V_A \delta v(0) - M_A \delta v_x(0) - \\ & - S_B \delta u(a) + V_B \delta v(a) + M_B \delta v_x(a) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

La Condición de Borde (17) es en general efectivamente la suma de una serie de trabajos virtuales, siempre y cuando las variaciones δv , δu y δv_x no sean independientes. Cuando, en cambio, son independientes debe factorizarse cada uno y surgen automáticamente las diversas Condiciones de Borde. Como veremos a continuación, en un problema de varias barras unidas por un nudo deberán adicionarse las denominadas condiciones de continuidad.

5 CONDICIONES DE CONTINUIDAD

Para fijar la idea de continuidad presentamos un nudo donde acceden dos barras; todavía consideramos que sobre dicho nudo está actuando una carga concentrada y un momento. Para simplificar suponemos que se trata de dos barras ortogonales entre sí (ver Figura 3). El equilibrio del nudo da lugar a:

$$\begin{aligned} S_{B_1} + V_{A_2} + F &= 0 & (a) \\ V_{B_1} + S_{A_2} + H &= 0 & (b) \\ M_{B_1} - M_{A_2} + \mu &= 0 & (c) \end{aligned} \quad (18)$$

Por supuesto la convención de positividad de F , H y μ es arbitraria, pero una vez aceptada se debe respetar en las deducciones futuras.

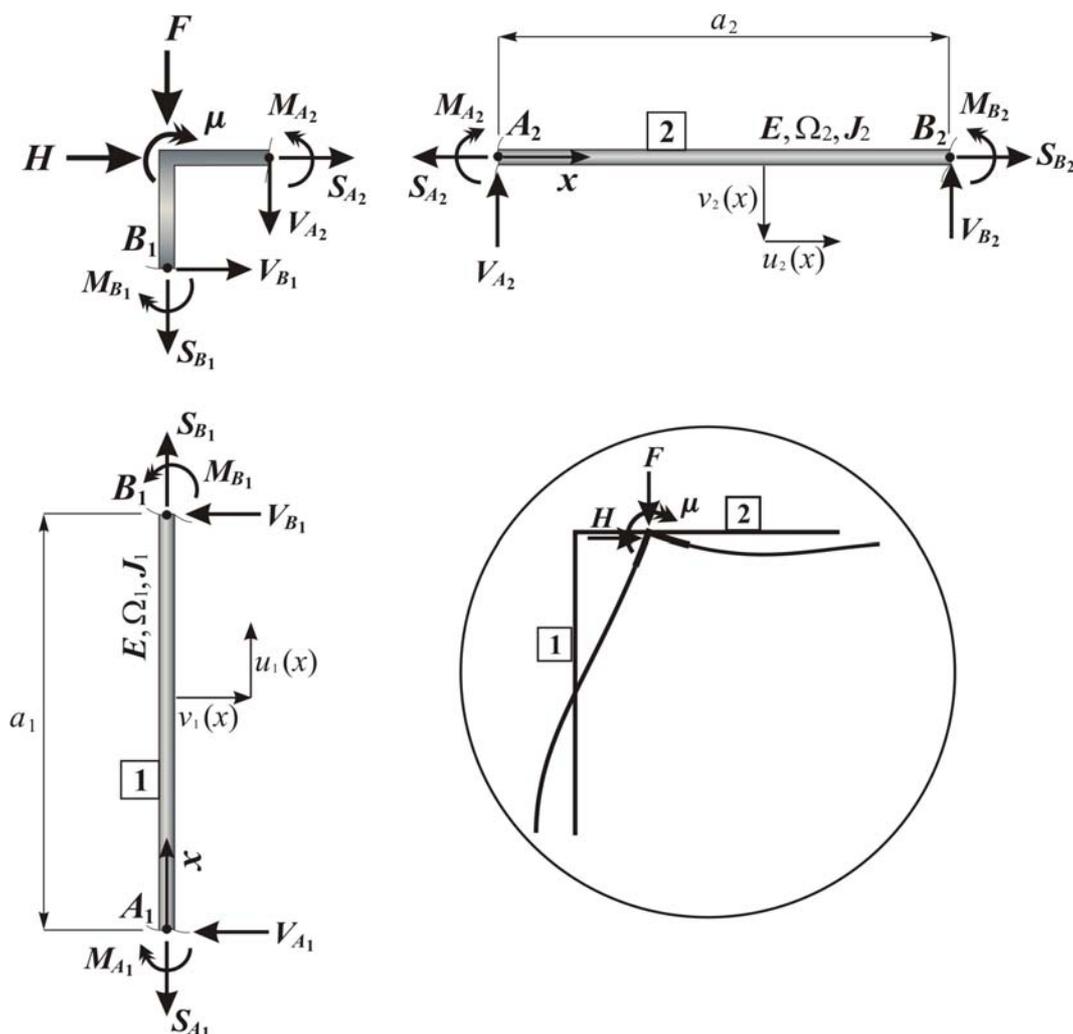


Figura 3: Detalle de un nudo de pórtico con dos barras.

Las Condiciones de Continuidad de cada nudo donde acceden n barras son $3(n - 1)$ de tipo geométrico y siempre 3 ecuaciones de equilibrio. En este ejemplo ilustrativo las tres geométricas son:

$$\begin{aligned}
 v_1(a_1) &= u_2(0) & (a) \\
 u_1(a_1) &= -v_2(0) & (b) \\
 v_{1,x}(a_1) &= v_{2,x}(0) & (c)
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Las variaciones admisibles, deben verificar formalmente a las (19); así:

$$\begin{aligned}
 \delta v_1(a_1) &= \delta u_2(0) & (a) \\
 \delta u_1(a_1) &= -\delta v_2(0) & (b) \\
 \delta v_{1,x}(a_1) &= \delta v_{2,x}(0) & (c)
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Considerando las (20) y las (18) planteamos las Condiciones de Continuidad utilizando las Condiciones de Borde (17) para ambas barras.

- Factor de (20a):

$$-E J_1 v_{1,xxx}(a_1) - C[V_{A_1} - R_{q_1}(a_1)]u_{1,x}(a_1) + D[S_{A_1} - R_{p_1}(a_1)]v_{1,x}(a_1) - H - E\Omega_2 u_{2,x}(0) + C V_{A_2} v_{2,x}(0) = 0 \quad (21)$$

- Factor de (20b):

$$E\Omega_1 u_{1,x}(a_1) - C[V_{A_1} - R_{q_1}(a_1)]v_{1,x}(a_1) + F - E J_2 v_{2,xxx}(0) - C V_{A_2} u_{2,x}(0) + D S_{A_2} v_{2,x}(0) = 0 \quad (22)$$

- Factor de (20c):

$$E J_1 v_{1,xx}(a_1) - \mu - E J_2 v_{2,xx}(0) = 0 \quad (23)$$

Se ha tenido en cuenta que toda vez que en las (21) y (22) aparecen $R_{q_2}(0)$ y $R_{p_2}(0)$, y recordando la definición, serán nulas. En tanto $R_{q_1}(a_1)$ y $R_{p_1}(a_1)$ indican las resultantes totales de carga $-q_1$ y p_1 sobre la barra 1. Sus valores dependerán de la funciones para las cargas distribuidas.

Un razonamiento análogo vale, como anticipamos, para nudos donde acceden cualquier número de barras con inclinación arbitraria.

Con esta descripción de las Condiciones de Continuidad se han aclarado todas las ecuaciones que conforman el sistema diferencial de equilibrio, las Condiciones de Borde y Condiciones de Continuidad de la que denominamos Teoría de Segundo Orden Completa.

Deben observarse algunas características que permiten abordar sin dificultades mayores el planteo aludido que deben adicionarse al párrafo final del ítem 3.

El sistema diferencial de un entramado de barras, conecta a través de las Condiciones de Continuidad a todas las barras; o sea el sistema diferencial es de orden $(6 \times \text{nro. de barras})$ – orden 4 la ecuación (11) y orden 2 la ecuación (12) para cada barra – y de la forma presentada – se necesitan S_A y V_A de cada barra. Con el equilibrio de fuerzas en cada barra y del equilibrio global del pórtico entre las fuerzas eventuales de los vínculos a tierra, obtenemos el número de fuerzas S y V que deben determinarse por iteraciones sucesivas (el Ejemplo 2 aclarará lo dicho).

En cuanto a las condiciones de borde de las barras vinculadas a tierra, observamos que las ecuaciones de nuevo trabajan en base a S_A y V_A de dichas barras. En cuanto a M_A y M_B que también influyen, digamos que, o el vínculo no permite el giro con el cual el M no aporta trabajo virtual, o si el vínculo puede girar, deberá estar impuesto el valor del M correspondiente aplicado. No será necesario, entonces, el planteo global del equilibrio a la rotación, lo que implicaría escribirla en función de los desplazamientos (recordar ecuación (3)) y el álgebra se complicaría significativamente.

6 EJEMPLOS

6.1 Ejemplo 1: Ménsula bajo carga transversal y momento en el extremo y carga transversal distribuida (ver Figura 4)

Datos: $a = 10 \text{ m}$; $E = 2,1 \times 10^{11} \text{ Pa}$; $\Omega = 1,6 \times 10^{-3} \text{ m}^2$; $J = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^4$; $q = 10000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$;
 $m = -M_A = 50000 \text{ Nm}$; $F = -V_A = 10000 \text{ N}$; $S_A = 0$.

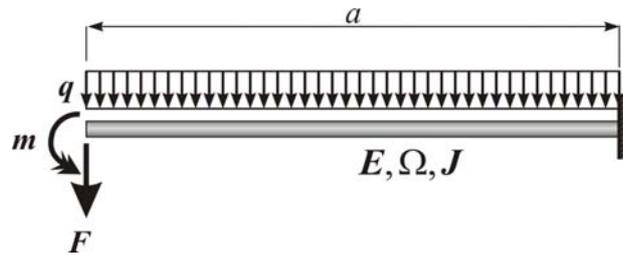


Figura 4: Ejemplo 1

Caso 1.1: $\mathcal{D} = \mathcal{C} = 0 \Rightarrow$ Teoría Clásica de Primer Orden.

Ecuaciones Diferenciales:

$$EJv_{xxxx} = q \quad ; \quad E\Omega u_{xx} = 0$$

Condiciones de Borde:

$$EJv_{xx}(0) - m = 0 \quad ; \quad EJv_{xxx}(0) - F = 0$$

$$u_x(0) = 0 \quad ; \quad v(a) = v_x(a) = u(a) = 0$$

Resolviendo obtenemos:

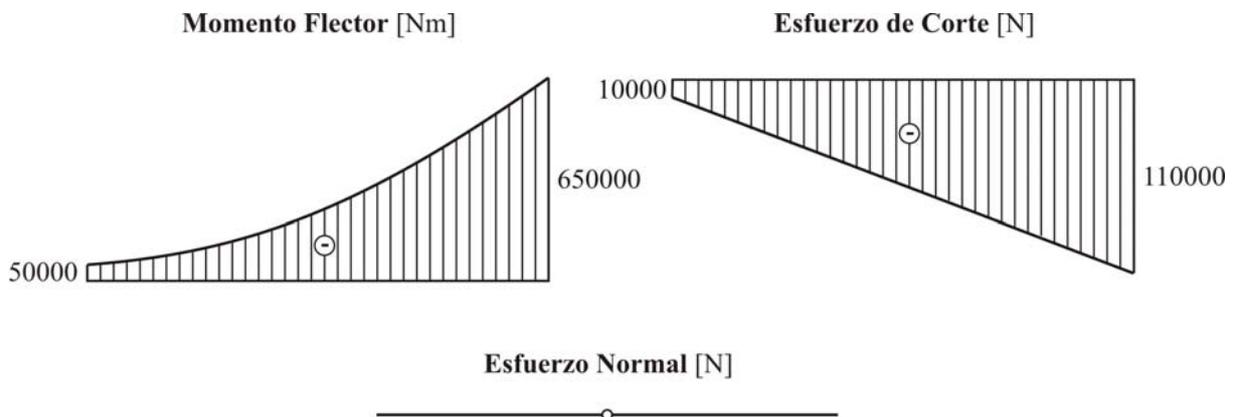


Figura 5: Diagramas de Esfuerzos Internos Caso 1.1

Caso 1.2: $\mathcal{D} = \mathcal{C} = 1 \Rightarrow$ Teoría Completa de Segundo Orden.

Ecuaciones Diferenciales:

$$EJv_{xxxx} - (F + qx)u_{xx} - qu_x = q$$

$$E\Omega u_{xx} + (F + qx)v_{xx} + qv_x = 0$$

Condiciones de Borde:

$$EJv_{xx}(0) - m = 0 \quad ; \quad EJv_{xxx}(0) - F(1 + u_x(0)) = 0$$

$$E\Omega u_x(0) + Fv_x(0) = 0 \quad ; \quad v(a) = v_x(a) = u(a) = 0$$

Resolviendo obtenemos:

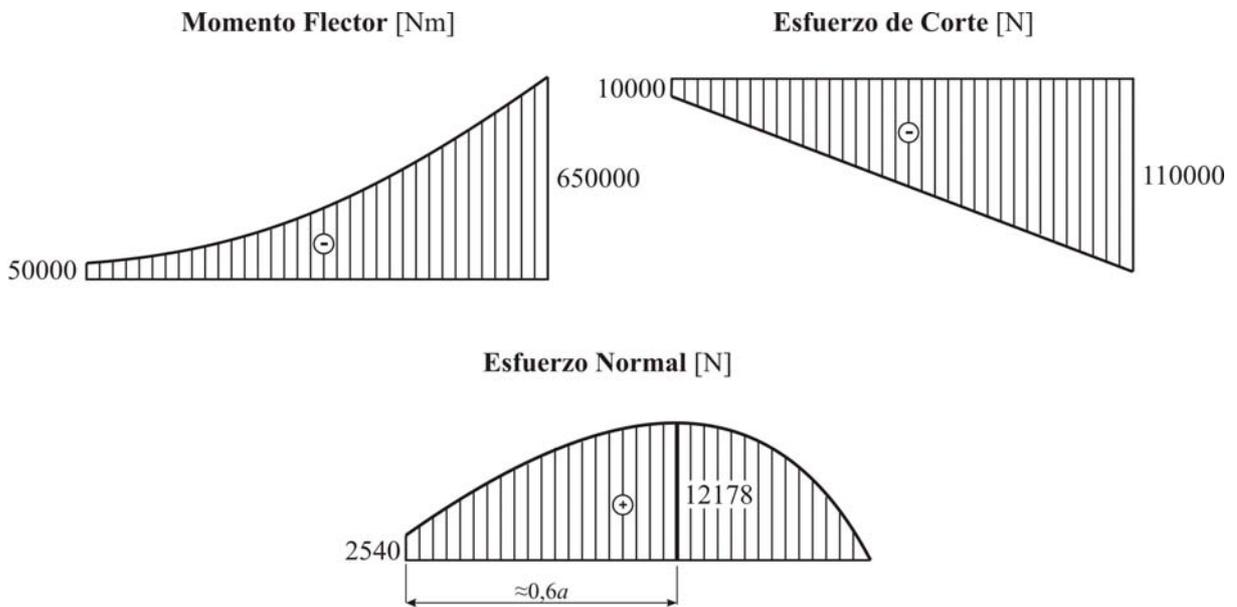


Figura 6: Diagramas de Esfuerzos Internos Caso 1.2

En este ejemplo no debe iterarse para llegar a la solución pues S_A y V_A son datos del problema.

6.2 Ejemplo 2: Viga apoyada-empotrada con carga de punta y carga transversal distribuida (ver Figura 7)

Datos: $a = 10$ m; $E = 2,1 \times 10^{11}$ Pa; $\Omega = 1,6 \times 10^{-3}$ m²; $J = 5 \times 10^{-5}$ m⁴; $q = 10000$ $\frac{\text{N}}{\text{m}}$; $M_A = 0$; $S_A = -P = -200000$ N.

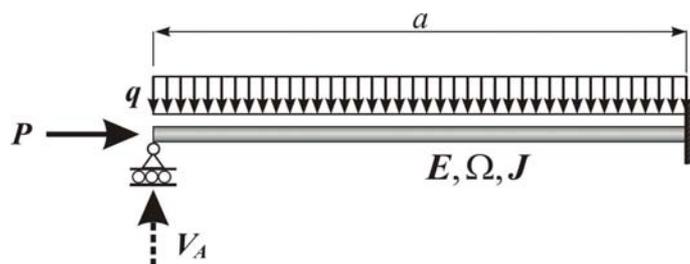


Figura 7: Ejemplo 2.

Caso 2.1: $D = C = 0 \Rightarrow$ Teoría Clásica de Primer Orden.

Ecuaciones Diferenciales:

$$EJv_{xxxx} = q \quad ; \quad E\Omega u_{xx} = 0$$

Condiciones de Borde:

$$v(0) = v_{xx}(0) = 0 \quad ; \quad E\Omega u_x(0) + P = 0 \quad ; \quad v(a) = v_x(a) = u(a) = 0$$

Resolviendo obtenemos:

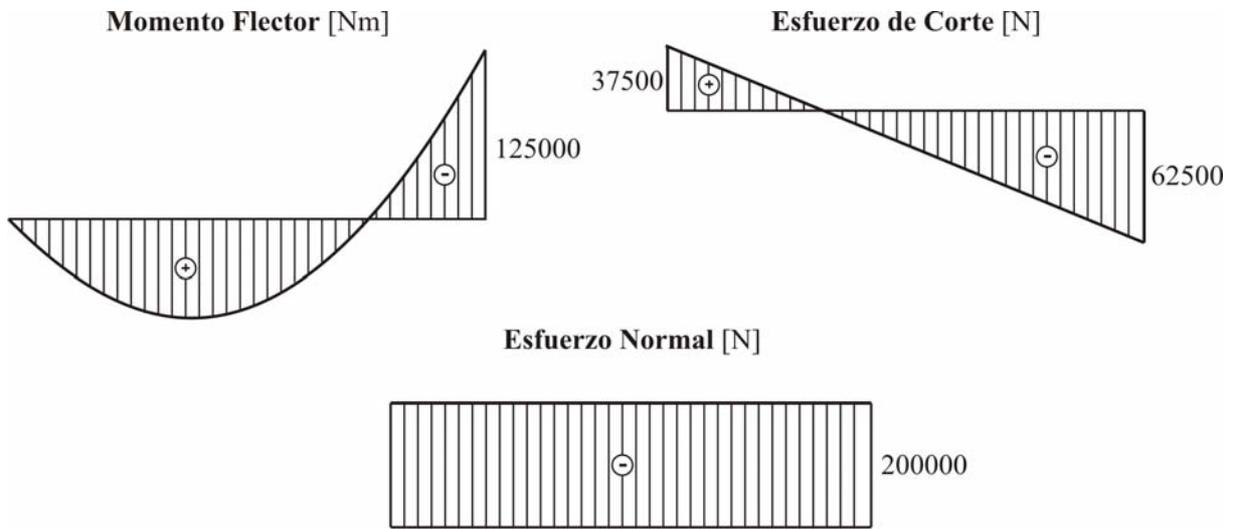


Figura 8: Diagramas de Esfuerzos Internos Caso 2.1

Caso 2.2: $D = C = 1 \Rightarrow$ Teoría Completa de Segundo Orden.

Ecuaciones Diferenciales:

$$EJ v_{xxxx} + P v_{xx} + (V_A - qx) u_{xx} - q u_x = q ; E\Omega u_{xx} - (V_A - qx) v_{xx} + q v_x = 0$$

Condiciones de Borde:

$$v(0) = v_{xx}(0) = 0 ; E\Omega u_x(0) + P - V_A v_x(0) = 0 ; v(a) = v_x(a) = u(a) = 0$$

Resolviendo obtenemos:

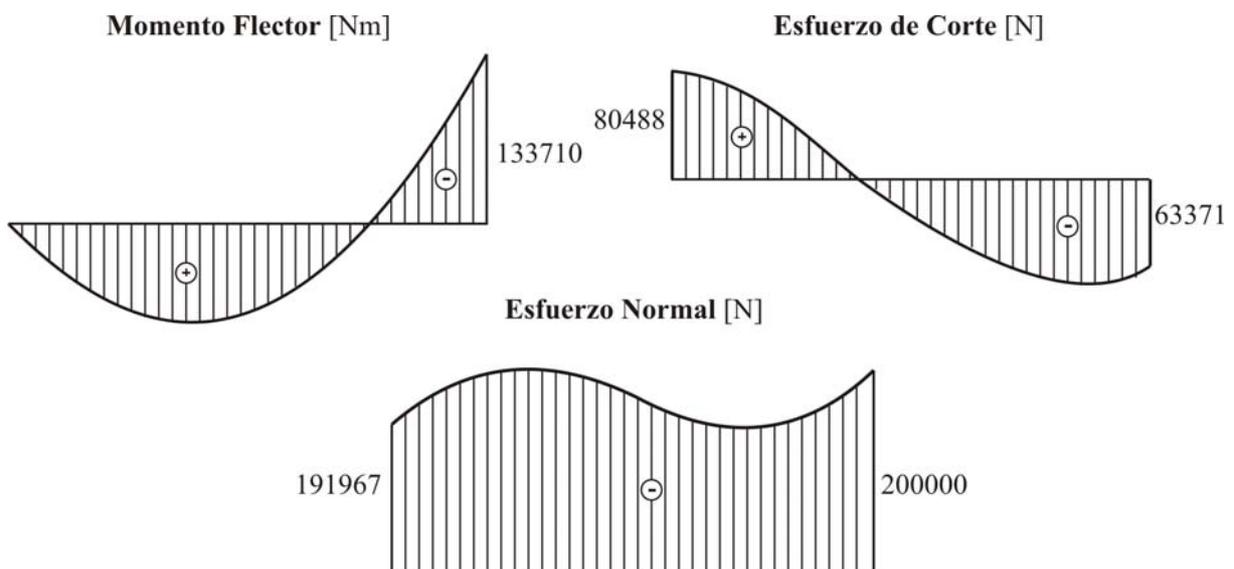


Figura 9: Diagramas de Esfuerzos Internos Caso 2.2

6.3 Ejemplo 3: Carga crítica de un pórtico de dos barras por vía indirecta de acuerdo a la teoría completa de segundo orden $D = C = 1$ (ver Figura 10)

Datos: $a = 10 \text{ m}$; $E = 2,1 \times 10^{11} \text{ Pa}$; $\Omega = 16 \text{ m}^2$; $J = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^4$; $H = 1 \text{ N}$

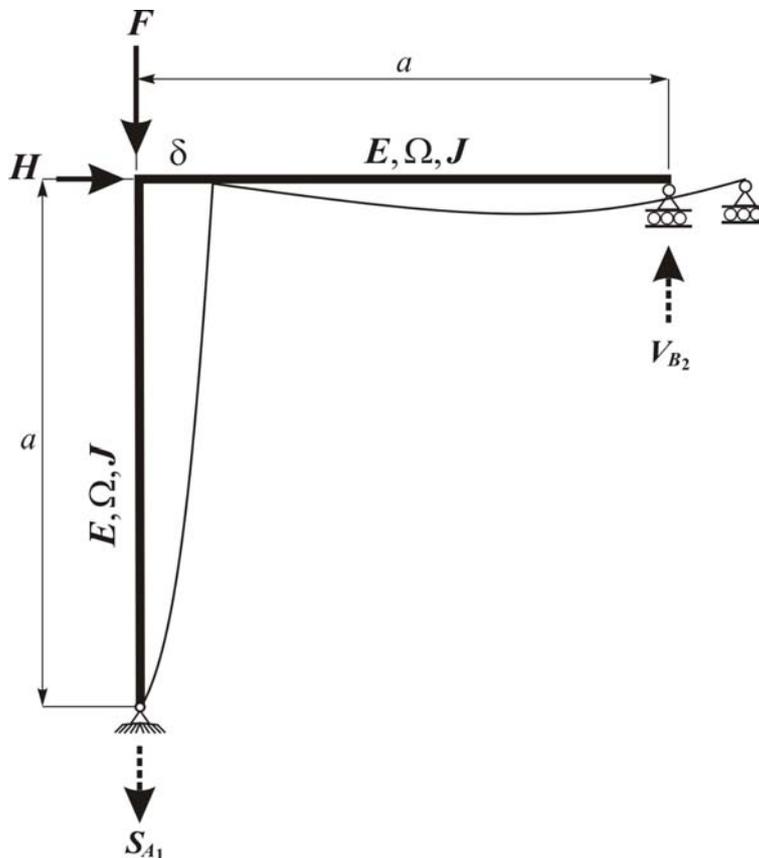


Figura 10: Ejemplo 3

Condiciones de Borde:

$$v_1(0) = v_{1,xx}(0) = u_1(0) = 0 \quad ; \quad v_2(a) = v_{2,xx}(a) = E\Omega u_{2,x}(a) - V_{A_2} v_{2,x}(a) = 0$$

Las Condiciones de Continuidad son las que se muestran en la sección 5. Sólo debe considerarse la siguiente ecuación de equilibrio global:

$$S_{A_1} + F - V_{B_2} = 0$$

Como nosotros presentamos un problema de equilibrio forzosamente debe haber alguna acción flexora que tenemos en cuenta con una “perturbación” dada por $H = 1$. El planteo exige iterar uno de los esfuerzos no nulos, podrían ser S_{A_1} ó V_{B_2} (ya que V_{A_1} es dato). Hemos decidido iterar el procedimiento hasta que el error de dos pasos sucesivos de S_{A_1} sea $< 1 \times 10^{-3}$.

La forma de hallar el valor crítico de F se implementa numéricamente de forma que partiendo de cargas que den " δ " negativo, que es un absurdo, vamos gradualmente disminuyendo F hasta la máxima con la cuál obtengamos el menor $\delta > 0$. Obtuvimos que:

$$F_{cr} = 149290 \text{ N}$$

En Filipich, 1981 se halla, para el mismo caso, el valor:

$$F_{cr} = 1,42 \frac{EJ}{a^2} = 149100 \text{ N}$$

calculado como un autovalor y donde no se tomó en consideración la deformación axial de las barras. Esto justifica los altos valores relativos que adoptamos para Ω con el fin de acercarnos a la hipótesis de rigidez axial infinita.

Observamos que la Teoría Completa de Segundo Orden y la Teoría Clásica de Pandeo conducen a la misma carga crítica.

6.4 Ejemplo 4: Comparación de resultados en un pórtico de dos barras con carga uniformemente distribuida q transversal al dintel (ver Figura 11)

Datos: $a = 10 \text{ m}$; $E = 2,1 \times 10^{11} \text{ Pa}$; $\Omega = 16 \times 10^{-4} \text{ m}^2$; $J = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^4$; $q = 10000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

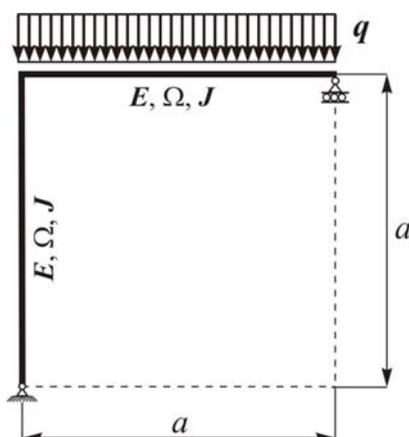


Figura 11: Ejemplo 4

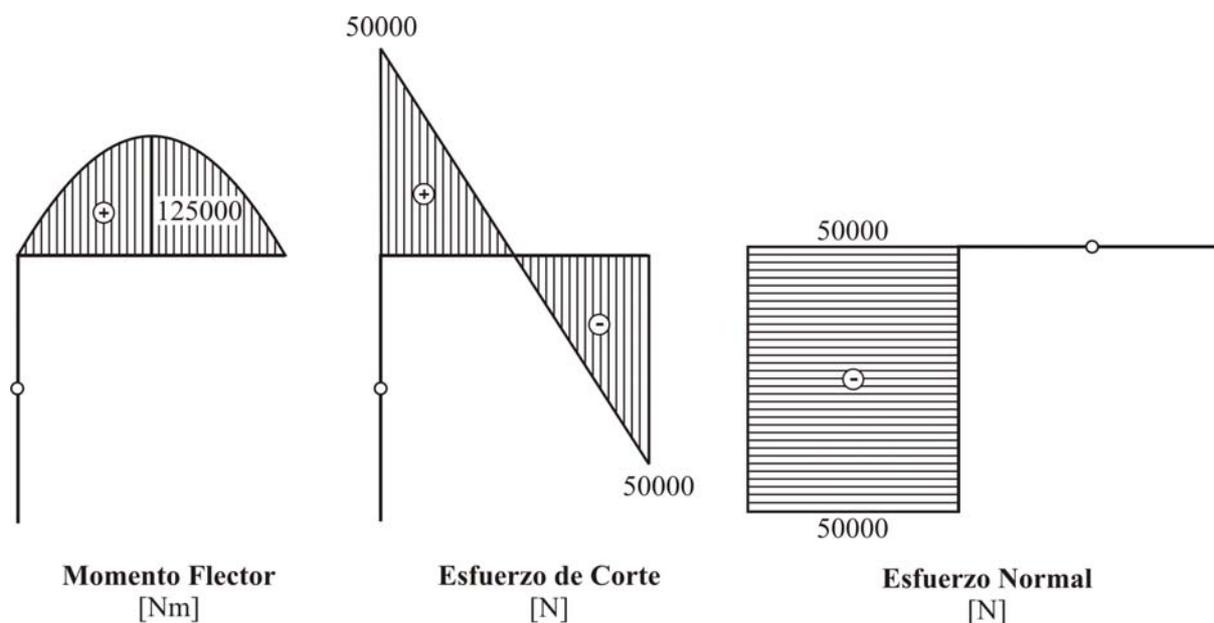


Figura 12: Diagramas de Esfuerzos Internos Ejemplo 4. Teoría de Primer Orden ($C = D = 0$)

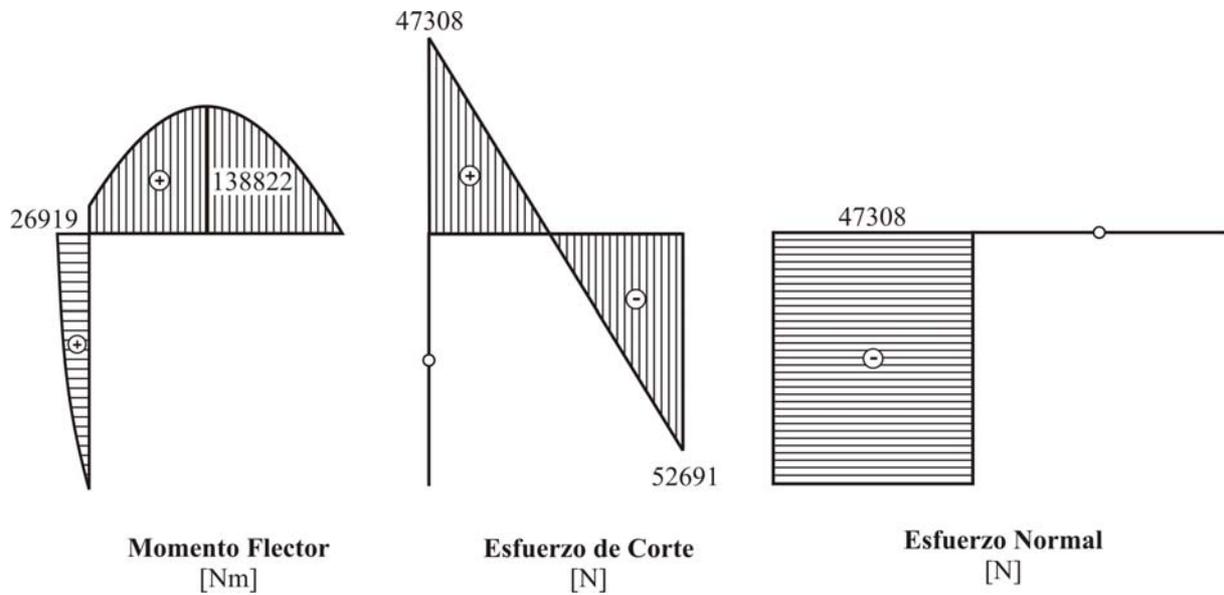


Figura 13: Diagramas de Esfuerzos Internos Ejemplo 4. Teoría Clásica de Segundo Orden ($C = 0; D = 1$)

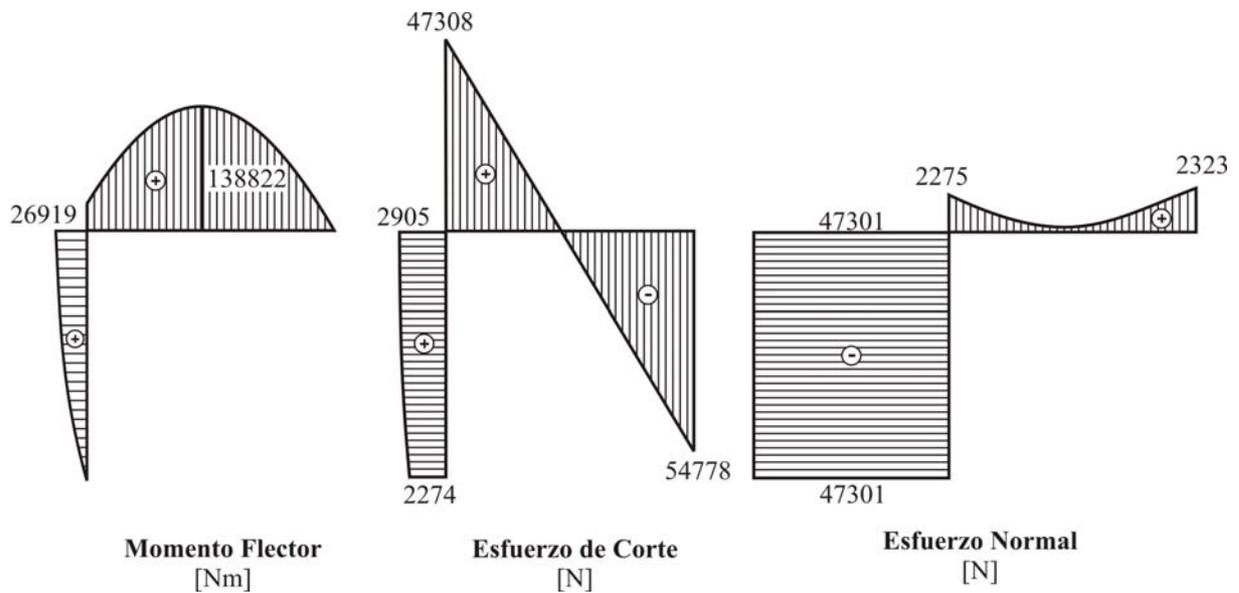


Figura 14: Diagramas de Esfuerzos Internos Ejemplo 4. Teoría de Segundo Orden Completa ($C = D = 1$)

6.5 Ejemplo 5: Comparación de resultados en un pórtico de dos barras con carga uniformemente distribuida q transversal a la columna y una carga horizontal H sobre el nudo (ver Figura 15)

Datos: $a = 10 \text{ m}$; $E = 2,1 \times 10^{11} \text{ Pa}$; $\Omega = 16 \times 10^{-4} \text{ m}^2$; $J = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^4$; $q = 1000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$; $H = 10000 \text{ N}$

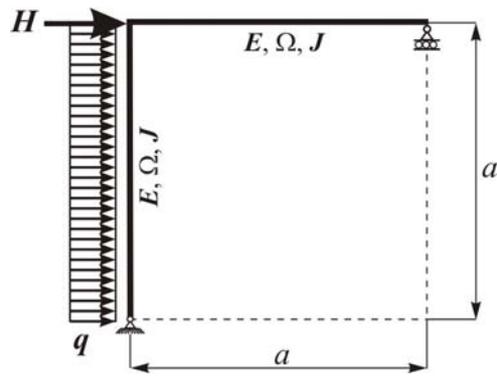


Figura 15: Ejemplo 5

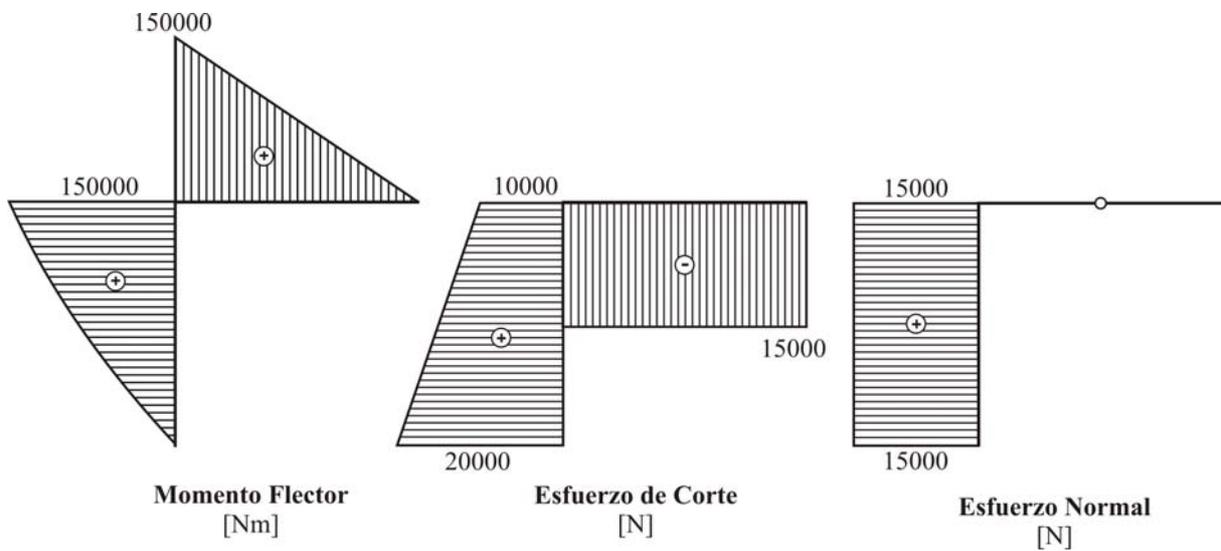


Figura 16: Diagramas de Esfuerzos Internos Ejemplo 5. Teoría de Primer Orden ($C = D = 0$)

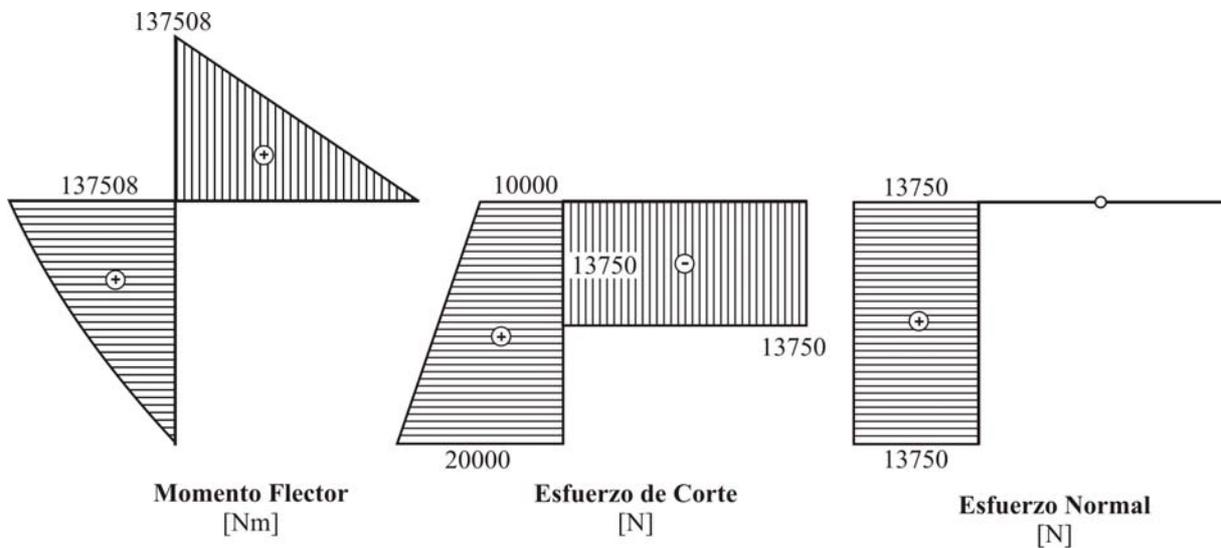


Figura 17: Diagramas de Esfuerzos Internos Ejemplo 5. Teoría Clásica de Segundo Orden ($C = 0; D = 1$)

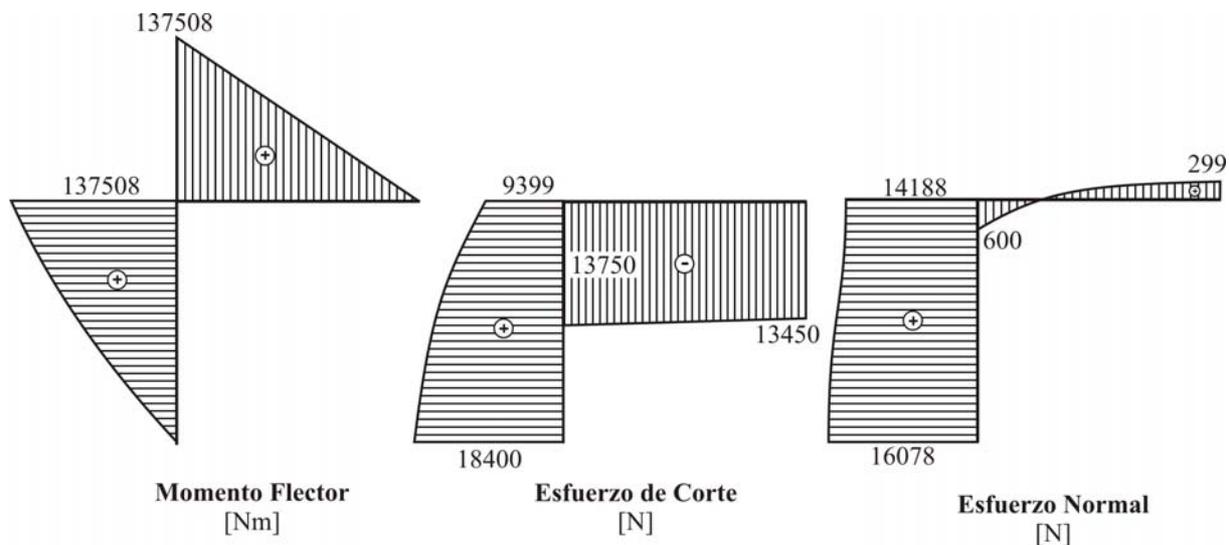


Figura 18: Diagramas de Esfuerzos Internos Ejemplo 5. Teoría de Segundo Orden Completa ($C = D = 1$)

7 COMENTARIOS FINALES Y CONCLUSIONES

En todos los ejemplos se ha utilizado la versión *Maple 13 Classic*.

Esta teoría completa de segundo orden que hemos desarrollado, da lugar a diferencias significativas, al resolver entramados de barras, comparando los resultados con los clásicos métodos de rigidez. Si bien recurrir a esta teoría más sofisticada, por un lado encarece el tiempo computacional debido al proceso iterativo (situación que también se presenta en la teoría clásica de segundo orden), por otro, implican una seria advertencia a los estructuralistas, más aún cuando los proyectos actualmente tienden a ser cada vez más comprometidos. O sea, adicionalmente a lo mostrado en los ejemplos (4) y (5), donde se observan ciertas diferencias en el valor de los esfuerzos característicos calculados por las teorías de segundo orden clásica y la completa aquí desarrollada, llamamos la atención sobre la siguiente problemática que decidimos no incluir en este trabajo y que diferencia drásticamente una teoría de otra y será motivo de un análisis posterior. Esto es: con la teoría completa de segundo orden aparece un fenómeno especial como es la posibilidad, por ejemplo en una ménsula, de obtener un valor crítico de estabilidad de una carga transversal en el extremo de la misma. Este fenómeno no se presenta en la teoría clásica de segundo orden, aunque por supuesto ambas teorías permiten hallar una condición de equilibrio labil para cargas axiales de compresión aplicadas en el extremo libre.

Otro comentario de tipo analítico es el siguiente: si el pórtico no soporta cargas distribuidas y solo cargas nodales, será posible disponer de soluciones “cerradas”, en términos de funciones trigonométricas circulares y/o hiperbólicas. Cuando en cambio tenemos cargas que actúan sobre los tramos, las soluciones serán del tipo “Bessel”, que no todos los softwares consideran como solución analítica, si bien son series infinitas unas y otras, y el sistema diferencial debe abordarse numéricamente.

Junto a la deducción del sistema dinámico completo de segundo orden anticipado en la introducción, los autores intentarán agregar como trabajo futuro, el planteo de un código de rigidez basado en el sistema de equilibrio que nos ocupa.

8 AGRADECIMIENTO

Los autores destacan las sugerencias aportadas por el revisor, que fueron tenidas en cuenta y modificaron ciertos tramos de la presentación. Por esto agradecen su interés por el cuidadoso análisis del trabajo.

REFERENCIAS

- Filipich, C. P. y Rosales, M. B. A further study on the postbuckling of extensible elastic rods. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 35:997–1022, 2000.
- Filipich, C. P. *Movimiento plano de barras gruesas rectas y curvas de sección uniforme no homogénea*. Monografía CIMNE N° 129, ISBN 878-84-940243-0-6, 2012.
- Filipich, C. P. *Inestabilidad de Equilibrio*. Notas del Curso N° 813. Secretaría Argentina para el Centro Internacional de Ciencias Mecánicas, ISBN 950032008, 1981.