

DISEÑO ÓPTIMO DE VIGAS DE PARED DELGADA PRF SOMETIDAS A CARGAS DINÁMICAS

Florencia Reguera^{a,b,c} y Víctor H. Cortínez^{a,b,c}

^a *Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional (FRBB), 11 de Abril 461, 8000, Bahía Blanca, Argentina, vcortine@frbb.utn.edu.ar*

^b *CONICET, Argentina*

^c *Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, Bahía Blanca, Argentina, florencia.reguera@uns.edu.ar*

Palabras clave: Diseño óptimo, Optimización Multiobjetivo, Vigas PRF.

Resumen. En este trabajo se formula una metodología de diseño óptimo multiobjetivo de vigas de pared delgada PRF (Plásticas Reforzadas con Fibras). Se asume que la estructura está sometida a cargas estáticas nominales y cargas dinámicas secundarias. El análisis estructural se realiza en base a un modelo teórico basado en el principio de Hellinger-Reissner. Tal modelo contempla el efecto de corte en forma completa y es implementado computacionalmente utilizando un modelo de elementos finitos unidimensional. El problema de optimización se plantea de manera de considerar restricciones estructurales y restricciones geométricas preestablecidas en el diseño. Se propone como objetivo minimizar el peso de la estructura conjuntamente con los desplazamientos máximos producidos en la misma. El diseño óptimo se obtiene a partir de la aplicación de la técnica heurística de optimización Simulated Annealing empleando dos esquemas de búsqueda diferentes.

1 INTRODUCCIÓN

El diseño estructural óptimo permite obtener la mejor solución de acuerdo a criterios preestablecidos y verificar todas las restricciones impuestas. Se basa en una combinación de las teorías de mecánica estructural y optimización matemática desde un enfoque computacional. Por lo tanto, el diseño de estructuras compuestas está ligado a dos aspectos fundamentales: el modelo estructural mediante el cual se obtiene la respuesta del sistema y las técnicas de optimización que permiten obtener la solución óptima del problema de diseño.

En los últimos años, se ha incrementado considerablemente la implementación de métodos de diseño basados en optimización matemática para el cálculo y análisis de estructuras de pared delgada construidas tanto con materiales isótropos y como compuestos. Entre las contribuciones realizadas en esta área para estructuras isótropas, se pueden mencionar los trabajos de [Magnucki et al. \(2006\)](#), [Tian et al. \(2004\)](#), [Manevich et al. \(2007\)](#) y [Karperska et al. \(2007\)](#), entre otros. En particular, [Manevich et al. \(2007\)](#) y [Karperska et al. \(2007\)](#) propusieron esquemas de diseño basados en la minimización de múltiples objetivos a través de una función global expresada en términos de coeficientes de peso arbitrarios. Desde el punto de vista del diseño de estructuras esbeltas construidas con laminados compuestos, [Savic et al. \(2001\)](#) estudiaron la maximización de las rigideces equivalentes flexionales y axiales de vigas de sección transversal tipo I, utilizando los ángulos de orientación de las fibras como variables de diseño. [Kathiravan y Ganguli \(2006\)](#) formularon un problema de diseño óptimo de una viga tipo cajón, considerando la maximización de la resistencia de acuerdo al criterio de falla de Tsai-Wu–Hahn como objetivo principal. [Erdal y Sonmez \(2005\)](#) utilizaron la máxima capacidad de carga de pandeo como objetivo principal en el diseño de placas compuestas. Por su parte, [Dávalos y Qiao \(1999\)](#) formularon un diseño multiobjetivo de vigas PRF (Plásticas Reforzadas con Fibras) de sección abierta o cerrada.

En el presente trabajo se propone un esquema de diseño que permite hallar las dimensiones óptimas de la estructura y la mejor secuencia de laminación posible con el objetivo de minimizar el desplazamiento total en la estructura y el peso de la misma de manera equitativa. Tal esquema está destinado al diseño de vigas PRF con laminación ortótropa o *cross-ply* sometidas a cargas estáticas nominales en superposición con cargas dinámicas secundarias. El espacio de soluciones factibles se encuentra restringido por condiciones de resistencia, pandeo global, pandeo local, desplazamientos máximos y condiciones geométricas. El modelo estructural está basado en el principio de Hellinger-Reissner, mientras que el problema de diseño se resuelve aplicando la técnica *Simulated Annealing* (SA) y su variante *Simulated Annealing Caótico* (SAC).

2 ESQUEMA DE DISEÑO ÓPTIMO

Se propone diseñar una viga que estará sometida a dos estados de carga: un estado de carga nominal, compuesto por cargas estáticas, y un estado de carga secundario, compuesto por cargas dinámicas con una variación temporal armónica conocida. Para ello, se plantea un problema de optimización convencional con las siguientes características

$$\begin{aligned}
 & \min F(\mathbf{x}), \\
 & \text{s.a:} \\
 & \quad g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \quad \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U,
 \end{aligned} \tag{1}$$

donde \mathbf{x} es el vector de las variables de diseño, $F(\mathbf{x})$ es la función objetivo, $g_i(\mathbf{x})$ son las

restricciones, \mathbf{x}^L y \mathbf{x}^U son los vectores que definen los extremos de los intervalos en que está definido \mathbf{x} .

Se pretende que la estructura a diseñar sea liviana y que, a su vez, los desplazamientos que se produzcan en la misma sean mínimos. Para ello, se plantea el problema de optimización como un problema multiobjetivo que minimiza una función normalizada mediante el método de funciones de peso (Rao, 1996). La función objetivo global es expresada, en términos generales, de la siguiente manera

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k_f} w_i f_i, \quad (2)$$

donde w_i es el factor de peso escalar asociado a cada función objetivo f_i y k_f es el número total de funciones objetivo a optimizar.

Para cumplir con los objetivos propuestos, se emplea un bi-criterio de optimización ($k_f = 2$) que minimiza en forma conjunta el peso propio de la estructura y su desplazamiento máximo. Luego, las funciones objetivo a evaluar están dadas por el máximo valor del desplazamiento absoluto en la estructura (δ) y por el área de la sección transversal (A), la cual representa en una forma simple e indirecta al peso de la viga. Como caso particular, se considera el factor de peso igual a 0.5, de manera de minimizar el desplazamiento máximo y el peso con igual importancia. Por lo tanto, la función objetivo global es expresada de manera adimensional como

$$F(\mathbf{x}) = 0.5 \frac{A(\mathbf{x})}{A_0} + 0.5 \frac{\delta(\mathbf{x})}{\delta_0}, \quad (3)$$

donde las funciones objetivo son normalizadas respecto a valores de referencia de área y de desplazamiento preestablecidos, A_0 y δ_0 respectivamente.

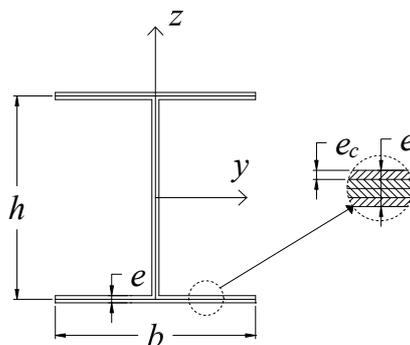


Figura 1: Detalle de las dimensiones de la sección transversal de un perfil tipo I.

El vector de las variables de diseño, \mathbf{x} , se considera compuesto por las dimensiones de la sección transversal de la viga (b , h), los ángulos de orientación de las fibras del laminado (θ_k) y el número de capas del laminado (n_c), como se indica en la Figura 1. Luego, el vector de las variables de diseño queda definido de la siguiente manera

$$\mathbf{x} = \{b, h, n_c, \theta_k\}. \quad (4)$$

El espesor de cada una de las capas del laminado (e_c) es preestablecido y se considera igual para todas ellas. Por lo tanto, el espesor total de las paredes de la sección transversal (e) queda determinado por el producto entre el número de capas y el espesor de cada una de ellas ($e = n_c e_c$). Por su parte, todas las variables pertenecen a dominios discretos limitados superior e

inferiormente.

Como se indicó en la expresión (1), en el diseño se consideran restricciones de desigualdad ($g_i(\mathbf{x})$) que pueden ser clasificadas en dos categorías según la incumbencia de cada una de ellas: restricciones estructurales y restricciones geométricas.

Las **restricciones estructurales** tienen en cuenta exigencias de pandeo global, pandeo local, desplazamientos máximos, resistencia estática y resistencia a fatiga del laminado. Las mismas pueden ser expresadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}) &= 1 - \lambda(\mathbf{x}), & g_2(\mathbf{x}) &= 1 - \lambda_L(\mathbf{x}), \\ g_3(\mathbf{x}) &= \delta(\mathbf{x}) - \delta_{m\acute{a}x}, & g_4(\mathbf{x}) &= 1 - R_{min}(\mathbf{x}), \\ g_5(\mathbf{x}) &= \text{CT-HE}(\mathbf{x}) - 1, \end{aligned} \quad (5)$$

donde λ es el parámetro de carga crítica de pandeo global, λ_L es el parámetro de carga crítica local, δ es el desplazamiento total máximo, R_{min} es el factor de seguridad evaluado de acuerdo al criterio de falla de Tsai-Wu y CT-HE evalúa la resistencia a fatiga del laminado de acuerdo al Criterio de falla por fatiga de Tsai-Hill Extendido. La manera en que se evalúa a cada uno de estos parámetros será detallada en las secciones siguientes.

Adicionalmente, se establece un límite superior para los desplazamientos máximos, menor al convencional con el fin de asegurar que la estructura no entre en resonancia, evitando de esta manera el cálculo de frecuencias naturales durante el proceso de optimización. Luego, el desplazamiento máximo permitido en la estructura esta dado por

$$\delta_{m\acute{a}x} = L/800. \quad (6)$$

Las **restricciones geométricas** se aplican en forma directa sobre las variables de diseño. Se establece que las dimensiones de la sección transversal sean positivas y se limitan de manera que la estructura se comporte como una viga de pared delgada, estableciendo un valor máximo del espesor en función de la base y de la altura de la viga de la siguiente manera

$$g_6(\mathbf{x}) = 10 - \min(b/e, h/e). \quad (7)$$

En cuanto a las restricciones aplicadas sobre la laminación, se establece que el ángulo de orientación de las fibras (θ_k) sólo pueda adoptar los valores 0° y 90° de manera de constituir un laminado ortótropo ($[0_{nc}]$) ó *cross-ply* ($[0/90]_s$, $[0_{nc/2}/90_{nc/2}]$). Estas limitaciones se deben a las hipótesis adoptadas para el cálculo de las restricciones de pandeo local y de resistencia a fatiga, como se describirá en detalle más adelante.

En síntesis, el problema de optimización que define el esquema de diseño descripto, es expresado de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \min \quad F(\mathbf{x}) &= 0.5 \frac{A(\mathbf{x})}{A_0} + 0.5 \frac{\delta(\mathbf{x})}{\delta_0}, \\ \mathbf{x} &= \{h, b, n_c, \theta_k\}, \\ \text{s.a:} \\ \mathbf{x}^L &\leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U, \\ \lambda(\mathbf{x}) &> 1, \quad \lambda_L(\mathbf{x}) > 1, \quad \delta(\mathbf{x}) \leq \delta_{m\acute{a}x}, \\ R_{min}(\mathbf{x}) &> 1, \quad \text{CT-HE}(\mathbf{x}) < 1, \\ (h, b, e) &> 0, \quad \min(b/e, h/e) \geq 10, \quad \theta_k = (0^\circ, 90^\circ). \end{aligned} \quad (8)$$

3 ECUACIONES BÁSICAS Y MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

En esta sección se exponen las ecuaciones básicas que describen el comportamiento estructural de la viga analizada y los métodos empleados para la implementación numérica del problema de optimización. Este análisis permite determinar los parámetros que intervienen en la función objetivo y en las restricciones.

Los desplazamientos, las tensiones y los parámetros críticos de pandeo global que se producen en la viga se obtienen a partir del modelo unidimensional que se describirá en la sección 3.1, implementado a partir del método de los elementos finitos. Una vez determinadas tales características, se evalúa, por un lado, la resistencia estática en base al criterio de falla de Tsai-Wu y, por otro lado, la resistencia a fatiga del laminado a partir del Criterio de Tsai-Hill Extendido (CT-HE). Ambos criterios son explicados brevemente en las secciones 3.2 y 3.3, respectivamente.

Los parámetros críticos de pandeo local se evalúan en forma aproximada empleando las soluciones analíticas que estiman los valores de las cargas de pandeo local en vigas de acuerdo a lo desarrollado por [Reguera y Cortínez \(2012\)](#). En la sección 3.4 se expone un breve resumen acerca de las hipótesis adoptadas para su obtención, mientras que las soluciones analíticas aproximadas correspondientes pueden verse en el trabajo de los autores referenciado previamente.

Se describen, por último, las técnicas de optimización empleadas para la resolución del problema de optimización.

3.1 Modelo de vigas de pared delgada PRF

El análisis estructural se realiza en base a un modelo unidimensional que considera deformabilidad por corte debida a flexión y a alabeo por torsión no uniforme. Este modelo permite realizar el análisis lineal de vigas rectas y curvas de pared delgada construidas con materiales PRF con laminación simétrica y balanceada. Mediante su implementación numérica se obtienen las características estructurales involucradas en el diseño de la estructura (desplazamientos, tensiones y cargas de pandeo global). Esta teoría ha sido presentada y validada en diferentes trabajos ([Cortínez y Piovan, 2002](#); [Cortínez y Piovan, 2006](#)) y su extensión para el tratamiento de vigas de eje curvo fue desarrollado por [Reguera \(2013\)](#). A continuación se presenta un resumen del modelo para el caso particular de vigas de eje recto.

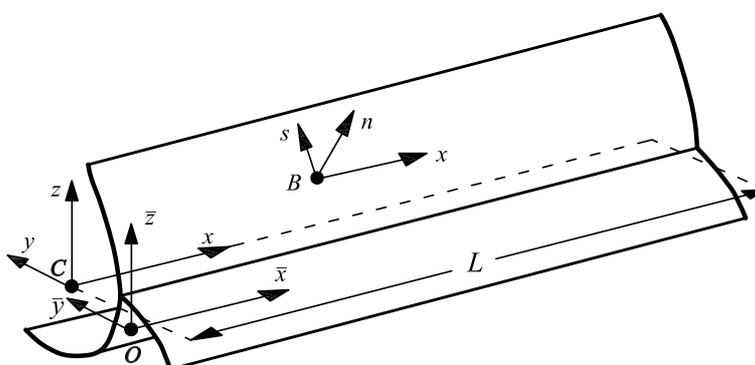


Figura 2: Esquema de viga de pared delgada genérica de eje recto de sección abierta.

Se considera una viga de sección genérica de paredes delgadas que se muestra en la [Figura 2](#). Los puntos del elemento estructural son referidos a dos sistemas de referencia: un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal ($C: x, y, z$), donde el punto de referencia C coincide con

el centro de gravedad de la sección transversal, y otro sistema con origen en el centro de corte (O : $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$), siendo los ejes x y \bar{x} tangenciales al eje longitudinal de la viga.

Los desplazamientos lineales y no lineales de un punto genérico de la viga se expresan en términos de las coordenadas de la sección transversal y de los *desplazamientos generalizados*, estableciendo el campo de desplazamientos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u_x &= u - y\theta_z - z\theta_y - \omega\theta_x, & u_y &= v - \bar{z}\phi_x, & u_z &= w + \bar{y}\phi_x, \\ u_x^{NL} &= \frac{1}{2}[z\phi_x\theta_z - y\phi_x\theta_y], & u_y^{NL} &= \frac{y}{2}[\phi_x^2 + (\theta_z)^2] - \frac{z}{2}\theta_z\theta_y, \\ u_z^{NL} &= \frac{z}{2}(\phi_x^2 + \theta_y^2) - \frac{y}{2}\theta_z\theta_y. \end{aligned} \quad (9)$$

donde ω es la función de alabeo de la sección transversal. Los desplazamientos generalizados, que corresponden a siete grados de libertad, se asocian a los cuatro movimientos desacoplados básicos de una viga recta: extensional (u), flexional lateral (v, θ_z), flexional transversal (w, θ_y) y torsional (ϕ_x, θ_x).

Luego, el desplazamiento total de la estructura que define a una de las funciones objetivo y a la restricción g_3 está dado por

$$\delta_{(x)} = \sqrt{(u_x + u_x^{NL})^2 + (u_y + u_y^{NL})^2 + (u_z + u_z^{NL})^2}. \quad (10)$$

Los desplazamientos pueden también expresarse en el sistema intrínseco (B : x, s, n) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} U^L &= u_x, & V^L &= u_y \frac{dY}{ds} + u_z \frac{dZ}{ds}, & W^L &= -u_y \frac{dZ}{ds} + u_z \frac{dY}{ds}, \\ U^{NL} &= u_x^{NL}, & V^{NL} &= u_y^{NL} \frac{dY}{ds} + u_z^{NL} \frac{dZ}{ds}, & W^{NL} &= -u_y^{NL} \frac{dZ}{ds} + u_z^{NL} \frac{dY}{ds}, \\ \Phi_x &= -\frac{\partial u_x}{\partial n}, & \Phi_s &= \frac{\partial}{\partial n} \left(u_y \frac{dY}{ds} + u_z \frac{dZ}{ds} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

donde $U^L, V^L, W^L, U^{NL}, V^{NL}$ y W^{NL} son los desplazamientos placa lineales (L) y no-lineales (NL) en las direcciones x, s y n , respectivamente, y Φ_x y Φ_s son rotaciones flexionales con respecto a las direcciones s y n , respectivamente.

Las componentes lineales y no lineales del tensor de deformaciones de Green-Lagrange para el caso de vigas rectas están dadas por

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial U^L}{\partial x}, & \epsilon_{xs} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U^L}{\partial s} + \frac{\partial V^L}{\partial x} \right], & \epsilon_{xn} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U^L}{\partial n} + \frac{\partial W^L}{\partial x} \right], \\ \eta_{xx} &= \frac{\partial U^{NL}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U^L}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V^L}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W^L}{\partial x} \right)^2 \right], \\ \eta_{xs} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U^{NL}}{\partial s} + \frac{\partial V^{NL}}{\partial x} + \frac{\partial U^L}{\partial s} \frac{\partial U^L}{\partial x} + \frac{\partial V^L}{\partial s} \frac{\partial V^L}{\partial x} + \frac{\partial W^L}{\partial s} \frac{\partial W^L}{\partial x} \right], \\ \eta_{xn} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U^{NL}}{\partial n} + \frac{\partial W^{NL}}{\partial x} + \frac{\partial U^L}{\partial n} \frac{\partial U^L}{\partial x} + \frac{\partial V^L}{\partial n} \frac{\partial V^L}{\partial x} + \frac{\partial W^L}{\partial n} \frac{\partial W^L}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Así pues, reemplazando las expresiones del campo de desplazamientos (9) en las ecuaciones (11) y su resultado en las ecuaciones (12), se obtienen las componentes del tensor de deformaciones en función de los desplazamientos generalizados. El mismo puede ser expresado en términos de deformaciones membranales y curvaturas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon_{xx}^L + n\kappa_{xx}^L, & \gamma_{xs} &\approx 2\epsilon_{xs}^L = \gamma_{xs}^L + n\kappa_{xs}^L, & \gamma_{xn} &\approx 2\epsilon_{xn}^L = \gamma_{xn}^L, \\ \eta_{xx}^{NL} &= \epsilon_{xx}^{NL} + n\kappa_{xx}^{NL}, & \eta_{xs}^{NL} &\approx 2\eta_{xs} = \gamma_{xs}^{NL} + n\kappa_{xs}^{NL}, & \eta_{xn}^{NL} &\approx 2\eta_{xn} = \gamma_{xn}^{NL}. \end{aligned} \tag{13}$$

Las expresiones que gobiernan la mecánica de las vigas bajo análisis se definen de acuerdo al principio de Hellinger-Reissner. El mismo consta de dos expresiones que se expondrán a continuación (Washizu, 1974; Piovan, 2003). La primera de ellas es la representación del principio de trabajos virtuales para estructuras tipo placa, y la segunda corresponde al trabajo virtual complementario, el cual puede interpretarse como la representación variacional de las relaciones constitutivas.

$$L_S + L_S^0 + (L_T + L_T^0) + (L_F + L_F^0) + L_R = 0, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \iint \left[\left(\epsilon_{xx}^L - \frac{N_{xx}}{A_{11}} \right) \delta N_{xx} + \left(\gamma_{xs}^L - \frac{N_{xs}}{A_{66}} \right) \delta N_{xs} + \left(\kappa_{xs}^L - \frac{M_{xs}}{D_{66}} \right) \delta M_{xs} \right] ds dx \\ + \iint \left[\left(\kappa_{xx}^L - \frac{M_{xx}}{D_{11}} \right) \delta M_{xx} + \left(\gamma_{xn}^L - \frac{N_{xn}}{A_{55}^{(H)}} \right) \delta N_{xn} \right] ds dx = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

donde,

$$L_S = \iint (N_{xx} \delta \epsilon_{xx}^L + M_{xx} \delta \kappa_{xx}^L + N_{xs} \delta \gamma_{xs}^L + M_{xs} \delta \kappa_{xs}^L + N_{xn} \delta \gamma_{xn}^L) ds dx, \tag{16}$$

$$L_S^0 = \iint (N_{xx}^0 \epsilon_{xx}^{NL} + M_{xx}^0 \delta \kappa_{xx}^{NL} + N_{xs}^0 \delta \gamma_{xs}^{NL} + M_{xs}^0 \delta \kappa_{xs}^{NL} + N_{xn}^0 \delta \gamma_{xn}^{NL}) ds dx, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} L_F + L_F^0 = - \iint [\bar{q}_x \delta U^L + \bar{q}_s \delta V^L + \bar{q}_n \delta W^L + \bar{m}_x \delta \Phi_x + \bar{m}_s \delta \Phi_s] ds dx \\ - \iint [\bar{q}_x^0 \delta U^{NL} + \bar{q}_s^0 \delta V^{NL} + \bar{q}_n^0 \delta W^{NL}] ds dx, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} L_T + L_T^0 = - \left[\iint (\bar{N}_{xx} \delta U^L + \bar{M}_{xx} \delta \Phi_x + \bar{N}_{xs} \delta V^L + \bar{M}_{xs} \delta \Phi_s + \bar{N}_{xn} \delta W^L) ds \right]_{x=0}^{x=L} \\ - \left[\iint (T_x^0 \delta U^{NL} + T_s^0 \delta V^{NL} + T_n^0 \delta W^{NL}) dnds \right]_{x=0}^{x=L}, \end{aligned} \tag{19}$$

$$L_R = \iiint \bar{\rho} (\ddot{U}^L \delta U^L + \ddot{V}^L \delta V^L + \ddot{W}^L \delta W^L + \ddot{\Phi}_x \delta \Phi_x + \ddot{\Phi}_s \delta \Phi_s) ds dndx. \tag{20}$$

siendo L_S el trabajo virtual de las deformaciones de primer orden debido a las tensiones incrementales; L_S^0 , el de las deformaciones no lineales debido a las tensiones iniciales; L_F y L_F^0 el de los desplazamientos lineales y no lineales debido a las fuerzas volumétricas actuantes e iniciales, respectivamente; L_T y L_T^0 el de los desplazamientos lineales y no lineales debido a las fuerzas superficiales actuantes e iniciales en los extremos, respectivamente; L_R , al de los desplazamientos debido a las fuerzas de inercia. En las expresiones anteriores se definen las siguientes magnitudes: N_{xx} , N_{xs} , M_{xx} , M_{xs} y N_{xn} son las resultantes de tensión en el

espesor, N_{xx}^0 , M_{xx}^0 , N_{xs}^0 , M_{xs}^0 y N_{xn}^0 son las resultantes de tensión en el espesor iniciales, \bar{q}_x , \bar{q}_s y \bar{q}_n son las fuerzas por unidad de área en las direcciones x , s y n , respectivamente, \bar{m}_x y \bar{m}_s representan momentos por unidad de área aplicados respecto a las direcciones x y s , respectivamente, \bar{q}_x^0 , \bar{q}_s^0 y \bar{q}_n^0 son las fuerzas por unidad de área iniciales en las direcciones x , s y n , respectivamente, \bar{N}_{xx} , \bar{N}_{xs} , \bar{N}_{xn} , \bar{M}_{xx} y \bar{M}_{xs} son resultantes de tensiones y de momentos en el espesor aplicadas en los extremos de la viga, T_x^0 , T_s^0 y T_n^0 son las fuerzas externas iniciales por unidad de superficie aplicadas en los extremos de la viga en las direcciones x , s y n , respectivamente y, por último, ρ es la densidad del material. Los dos puntos coronando a los desplazamientos en la expresión de L_R denotan, como es usual, derivada segunda con respecto al tiempo.

Reemplazando las expresiones de las deformaciones en la primera variación del funcional de Reissner (14) e integrando adecuadamente con respecto a las variables s y n se obtienen la expresión unidimensional del principio de trabajos virtuales.

Por su parte, el campo de las resultantes de tensión se asume expresado de la siguiente manera

$$N_{xx} = e \left[\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} Z + \frac{M_z}{I_z} Y + \frac{B}{C_w} \omega_p \right], \quad (21)$$

$$M_{xx} \cong \frac{e^3}{12} \left[\frac{M_y}{I_y} \frac{dY}{ds} - \frac{M_z}{I_z} \frac{dZ}{ds} - \frac{B}{C_w} l \right], \quad (22)$$

$$M_{xs} = -\frac{e^3}{6J} T_{sv}, \quad (23)$$

$$N_{xs} = -e \left[\frac{Q_z}{I_y} \lambda_y + \frac{Q_y}{I_z} \lambda_z + \frac{T_w}{C_w} \lambda_\omega \right] + \frac{e}{J} \psi T_{sv}, \quad (24)$$

$$N_{xn} = \frac{e^3}{12} \left[\frac{Q_z}{I_y} \frac{dY}{ds} - \frac{Q_y}{I_z} \frac{dZ}{ds} - \frac{T_w}{C_w} l \right], \quad (25)$$

donde A , I_y , I_z , C_w y J son el área de la sección transversal, los momentos de área, la constante de alabeo y el módulo de torsión, respectivamente. Además, en la expresión (24) se definieron las siguientes variables

$$\begin{aligned} \lambda_y(s) &= \int_0^s Z ds + \frac{\chi}{S} \oint \left(\int_0^s Z ds \right) ds, \\ \lambda_z(s) &= \int_0^s Y ds + \frac{\chi}{S} \oint \left(\int_0^s Y ds \right) ds, \\ \lambda_\omega(s) &= \int_0^s \omega_p ds + \frac{\chi}{S} \oint \left(\int_0^s \omega_p ds \right) ds, \end{aligned} \quad (26)$$

donde χ vale 0 ó 1 dependiendo si la sección transversal es abierta o cerrada, respectivamente.

Luego, sustituyendo el campo de resultantes de tensión propuesto en las ecuaciones (21-25) y las expresiones de las deformaciones lineales (13) en términos de los desplazamientos

generalizados en el funcional (15), integrando con respecto a s y tomando variaciones con respecto a los esfuerzos viga generalizados, se obtienen las siguientes ecuaciones constitutivas

$$\mathbf{Q} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta}, \quad (27)$$

donde \mathbf{Q} es el vector de esfuerzos viga generalizados, $\mathbf{\Delta}$ es el vector de deformaciones generalizadas y \mathbf{J} es la matriz constitutiva de esfuerzos. Esto es:

$$\mathbf{Q} = \{N, M_y, M_z, B, Q_y, Q_z, T_w, T_{sv}\}^T, \quad (28)$$

$$\mathbf{\Delta} = \{\varepsilon_{D1}, -\varepsilon_{D2}, -\varepsilon_{D3}, -\varepsilon_{D4}, \varepsilon_{D5}, \varepsilon_{D6}, \varepsilon_{D7}, \varepsilon_{D8}\}^T, \quad (29)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & J_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & J_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & J_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & J_{55} & J_{56} & J_{57} & 0 \\ & & & & & J_{66} & J_{67} & 0 \\ & & & & & & J_{77} & 0 \\ & & & & & & & J_{88} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

donde se definieron las deformaciones generalizadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \varepsilon_{D1} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{D2} &= \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, & \varepsilon_{D3} &= \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_{D4} &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, & \varepsilon_{D5} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z, & \varepsilon_{D6} &= \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_y, \\ \varepsilon_{D7} &= \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \theta_x, & \varepsilon_{D8} &= \frac{\partial \phi_x}{\partial x}. \end{aligned} \quad (31)$$

Los elementos de la matriz constitutiva de esfuerzos \mathbf{J} están dados por

$$\begin{aligned} J_{11} &= \widehat{EA} = \bar{A}_{11} \int_S ds, \\ J_{22} &= \widehat{EI}_y = \bar{A}_{11} \int_S Z^2 ds + \bar{D}_{11} \int_S \left(\frac{dY}{ds} \right)^2 ds, \\ J_{33} &= \widehat{EI}_z = \bar{A}_{11} \int_S Y^2 ds + \bar{D}_{11} \int_S \left(\frac{dZ}{ds} \right)^2 ds, \\ J_{44} &= \widehat{EC}_w = \bar{A}_{11} \int_S \omega_p^2 ds + \bar{D}_{11} \int_S l^2 ds, \\ J_{55} &= \widehat{GS}_y, \quad J_{56} = \widehat{GS}_{yz}, \quad J_{57} = \widehat{GS}_{y\omega}, \\ J_{66} &= \widehat{GS}_z, \quad J_{67} = \widehat{GS}_{z\omega}, \\ J_{77} &= \widehat{GS}_\omega, \\ J_{88} &= \widehat{GJ} = \bar{A}_{66} \int_S \psi^2 ds + \bar{A}_{55}^{(H)} \int_S l^2 ds + 4\bar{D}_{66} \int_S ds, \end{aligned} \quad (32)$$

siendo $\widehat{GS}_y, \widehat{GS}_{yz}, \widehat{GS}_{y\omega}, \widehat{GS}_z, \widehat{GS}_{z\omega}$ y \widehat{GS}_ω las rigideces al corte de la viga, definidas como

$$\begin{bmatrix} \widehat{GS}_y & \widehat{GS}_{yz} & \widehat{GS}_{y\omega} \\ \widehat{GS}_z & \widehat{GS}_{z\omega} & \\ \text{sim} & \widehat{GS}_\omega & \end{bmatrix} = \frac{e}{\overline{A}_{66}} \begin{bmatrix} \int_S \left(\frac{\lambda_z}{I_z}\right)^2 ds & \int_S \frac{\lambda_z \lambda_y}{I_y I_z} ds & -\int_S \frac{\lambda_z \lambda_\omega}{I_z C_w} ds \\ & \int_S \left(\frac{\lambda_y}{I_y}\right)^2 ds & -\int_S \frac{\lambda_\omega \lambda_y}{I_y C_w} ds \\ \text{sim} & & \int_S \left(\frac{\lambda_\omega}{C_w}\right)^2 ds \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$+ \frac{e^4}{144 \overline{A}_{55}^{(H)}} \begin{bmatrix} \int_S \left(\frac{dZ}{ds} \frac{1}{I_z}\right)^2 ds & \int_S \left(\frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} \frac{1}{I_y I_z}\right) ds & -\int_S \left(\frac{\partial \omega_p}{\partial n} \frac{dZ}{ds} \frac{1}{I_z C_w}\right) ds \\ & \int_S \left(\frac{dY}{ds} \frac{1}{I_y}\right)^2 ds & -\int_S \left(\frac{dY}{ds} \frac{\partial \omega_p}{\partial n} \frac{1}{I_y C_w}\right) ds \\ \text{sim} & & \int_S \left(\frac{\partial \omega_p}{\partial n} \frac{1}{C_w}\right)^2 ds \end{bmatrix}^{-1}.$$

Cabe destacar que la ventaja fundamental de emplear el principio de Hellinger-Reissner en la determinación de las ecuaciones constitutivas es aportar coeficientes de corte en forma natural a la formulación del problema. Como consecuencia, se obtienen mejores resultados tanto en el cálculo de frecuencias naturales como en cálculos de inestabilidad.

La implementación numérica del modelo se realiza mediante un elemento finito que consta de dos nodos y siete grados de libertad en cada nodo. Los desplazamientos generalizados se asocian a cada elemento a través de funciones de forma (Cortínez y Piovan, 2006) y se discretiza la expresión unidimensional de trabajos virtuales a partir de las expresiones de las deformaciones en términos de los desplazamientos generalizados nodales. Se obtiene así la clásica ecuación general sin amortiguamiento del método de elementos finitos

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{W}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_G) \mathbf{W} = \mathbf{P}, \quad (34)$$

donde \mathbf{W} es el vector global de desplazamientos nodales, \mathbf{P} es el vector global de cargas nodales, \mathbf{K} es la matriz de rigidez global y \mathbf{K}_G es la matriz de rigidez geométrica global.

Cuando se impone un movimiento armónico de la forma $\mathbf{W} = \mathbf{W}^* \cos(\omega t)$, la expresión (34) permite obtener las siguientes ecuaciones particulares

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_G - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{W}^* = \mathbf{P}^d, \quad (35)$$

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_G - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{W}^* = \mathbf{0}, \quad (36)$$

siendo ω la frecuencia angular del movimiento armónico y λ el parámetro de pandeo, el cual relaciona la tensión crítica de pandeo con la tensión de referencia inicial. La expresión (35) rige la mecánica de un problema de vibraciones armónicas forzadas bajo la presencia de un estado de tensiones iniciales estáticas y un vector de cargas nodales definido como $\mathbf{P} = \mathbf{P}^d \cos(\omega t)$. La expresión (36) permite obtener los autovalores de inestabilidad elástica,

considerando $\omega = 0$, y las frecuencias naturales de vibración asumiendo $\lambda = 1$. De esta manera queda establecida la condición de estabilidad global de la estructura (g_1).

Cabe aclarar que para el cálculo de autovalores de inestabilidad o autovalores dinámicos bajo un estado de tensiones iniciales, es necesario efectuar un cálculo estático previo con solicitaciones de referencia que son luego empleadas en la obtención de la matriz de rigidez geométrica. Para ello, se debe hallar el vector de desplazamientos nodales iniciales \mathbf{W}^0 del siguiente sistema

$$\mathbf{K}^0 \mathbf{W}^0 = \mathbf{P}^0, \quad (37)$$

donde \mathbf{K}^0 y \mathbf{P}^0 son la matriz global de rigidez elástica inicial y el vector global de fuerzas estáticas iniciales, respectivamente.

Debido a que el estado dinámico se define como un estado de carga secundario, se asume que no es necesario evaluar la inestabilidad dinámica de la estructura, ni global ni local. No obstante, a modo conservativo, para asegurar tanto la estabilidad global como la estabilidad local de la estructura, se adoptan los valores máximos de las tensiones y de las resultantes de tensión en el espesor, como superposición de ambos estados de carga.

3.2 Criterio de falla estático

En cuanto a la condición de resistencia estática, se asume que el estado límite de tensión a partir del cual el laminado sufre daños está representado por la falla de la primera lámina (FPF). La carga para la cual esto ocurre puede predecirse a través de los criterios de falla de laminados simples. En este caso, se utiliza el criterio de falla de Tsai-Wu, el cual establece que la lámina falla cuando se satisface la siguiente condición (Kollár y Springer, 2003)

$$aR^2 + 2bR - 1 = 0. \quad (38)$$

Luego, el factor de seguridad viene dado por

$$R = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2a}, \quad (39)$$

donde,

$$\begin{aligned} a &= F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{66}\tau_{12}^2 + F_{44}\tau_{23}^2 + F_{55}\tau_{31}^2, \\ b &= F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2. \end{aligned} \quad (40)$$

En las ecuaciones anteriores, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \tau_{12}, \dots, \tau_{23}$ son las componentes del tensor de tensiones en el sistema de coordenadas propio del laminado y los coeficientes $F_1, F_2, F_{11}, \dots, F_{66}, F_{12}$, son parámetros de resistencia que dependen del material y están dados por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{s_1^+} - \frac{1}{s_1^-}, & F_2 &= \frac{1}{s_2^+} - \frac{1}{s_2^-}, & F_{11} &= \frac{1}{s_1^+ s_1^-}, & F_{22} &= \frac{1}{s_2^+ s_2^-}, \\ F_{44} &= \frac{1}{(s_{23})^2}, & F_{55} &= \frac{1}{(s_{13})^2}, & F_{66} &= \frac{1}{(s_{12})^2}, & F_{12} &= -\frac{1}{2} \sqrt{F_{11} F_{22}}, \end{aligned} \quad (41)$$

siendo s_1^+ y s_1^- son las resistencias a tracción y a compresión en la dirección de la fibra, s_2^+ y s_2^- son las resistencias a tracción y compresión en la dirección transversal a la fibra, s_{12} es la resistencia al corte en el plano y s_{13} y s_{23} son las resistencias al corte interlaminares.

Las componentes del tensor de tensiones expresadas en el sistema de coordenadas propio de la lámina ($B: x_1, x_2, x_3$), para el caso de materiales transversalmente isotrópicos, se determinan en función de las deformaciones principales mediante la siguiente expresión

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{D}(1-\nu_{23}^2) & \frac{E_2\nu_{12}}{D}(1+\nu_{23}) & \frac{E_3\nu_{12}}{D}(1+\nu_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{E_2}{D}\left(1-\frac{E_2\nu_{12}^2}{E_1}\right) & \frac{E_2}{D}\left(\nu_{23}+\frac{E_2\nu_{12}^2}{E_1}\right) & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{E_2}{D}\left(1-\frac{E_2\nu_{12}^2}{E_1}\right) & 0 & 0 & 0 \\ & & & \text{sim} & & \\ & & & & \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})} & 0 & 0 \\ & & & & & G_{12} & 0 \\ & & & & & & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (42)$$

siendo,

$$D = 1 - \nu_{23} - 2(1 + \nu_{23})\frac{E_2}{E_1}\nu_{12}^2. \quad (43)$$

En la expresión (42) se introduce el vector de deformaciones expresado en el sistema de la lámina ($B: x_1, x_2, x_3$), el cual puede definirse en términos de las deformaciones expresadas en el sistema curvilíneo de la siguiente manera

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -2cs & 2cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{nn} \\ \gamma_{sn} \\ \gamma_{xn} \\ \gamma_{xs} \end{Bmatrix}, \quad (44)$$

donde $c = \cos\theta_k$ y $s = \sin\theta_k$.

El factor de seguridad se evalúa en diferentes puntos de la sección transversal, en las zonas superior e inferior de cada una de las capas del laminado y en distintos puntos a lo largo de la longitud de la viga. Luego, la condición de resistencia (g_4) se verifica cuando el valor mínimo de R_{min} es superior a 1.

3.3 Criterios de falla por fatiga (CT-HE)

Para predecir la resistencia a fatiga de laminados FRP, en este trabajo se hace uso del Criterio de falla de Tsai-Hill Extendido (CT-HE) propuesto por Jen y Lee (1998a; 1998b). Los autores mencionados extienden el conocido criterio de falla de Tsai-Hill para predecir las características a fatiga de láminas unidireccionales. Demuestran además que el criterio puede ser empleado satisfactoriamente para el análisis de laminados cuasi-isotrópicos y laminados *cross-ply*. Aquí se asume, al igual que en el análisis estático, que la falla de un laminado multi-direccional puede ser representada por la falla de la primera lámina.

Para establecer el criterio CT-HE, primeramente se definen las relaciones de tensión según las siguientes expresiones

$$R_1 = \frac{(\sigma_1)_{\min}}{(\sigma_1)_{\max}}, \quad R_2 = \frac{(\sigma_2)_{\min}}{(\sigma_2)_{\max}}, \quad R_{12} = \frac{(\tau_{12})_{\min}}{(\tau_{12})_{\max}}. \quad (45)$$

Luego, omitiendo el efecto de la frecuencia de carga, el criterio de falla por fatiga del laminado se establece de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_1}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{T}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{L^2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau}\right)^2 &= 1, & \text{si } |R_1| \leq 1, \quad |R_2| \leq 1, \\ \left(\frac{\sigma_1}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{T}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{l^2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau}\right)^2 &= 1, & \text{si } |R_1| \geq 1, \quad |R_2| \leq 1, \\ \left(\frac{\sigma_1}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{t}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{l^2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau}\right)^2 &= 1, & \text{si } |R_1| \geq 1, \quad |R_2| \geq 1, \\ \left(\frac{\sigma_1}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{t}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{L^2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau}\right)^2 &= 1, & \text{si } |R_1| \leq 1, \quad |R_2| \geq 1, \end{aligned} \quad (46)$$

donde $L(N, R_1)$ y $l(N, R_1)$ son las resistencias a fatiga de tracción y compresión, respectivamente, en la dirección de la fibra, $T(N, R_2)$ y $t(N, R_2)$ son las resistencias a fatiga de tracción y compresión, respectivamente, en la dirección transversal a la fibra y $\tau(N, R_{12})$ es la resistencia a fatiga por corte, siendo N el número de ciclos. Estas resistencias deben ser determinadas experimentalmente (Jen y Lee, 1998a) y dependen del número de ciclos y de las relaciones entre tensiones definidas en (45). Tales valores se determinan para diferentes relaciones R y para un número crítico de ciclos. En particular, cuando R_i es igual a la unidad se hace referencia a las resistencias estáticas de la lámina.

Cabe aclarar que si bien el criterio CT-HE es aplicable a laminaciones simétricas, los autores advierten que para láminas con fibras orientadas a $\pm 45^\circ$ el criterio no ofrece buenos resultados, en comparación con ensayos experimentales.

En este caso, el cálculo de las componentes de tensión máximas y mínimas se realiza de manera análoga a lo explicado anteriormente para la aplicación del criterio de falla de Tsai-Wu. Luego, la condición de resistencia a la fatiga (g_5) se verifica si la expresión de la izquierda en las ecuaciones (46) es menor a 1.

3.4 Modelo de placas para el análisis de pandeo local

La inestabilidad local es una restricción importante que debe considerarse al plantear el problema de diseño cuando se trata de vigas de paredes delgadas. La carga crítica de pandeo local se evalúa en forma simplificada, empleando las fórmulas analíticas desarrolladas y publicadas en Reguera y Cortínez (2012).

En dicho análisis se modela cada segmento de la sección transversal como una placa de gran longitud, asumiendo que los ejes comunes a dos o más placas permanecen rectos, como se muestra en la Figura 3. La resultante de tensión de pandeo se determina considerando a cada pared de la viga como una placa individual restringida rotacionalmente por el segmento adyacente. Dichos valores son comparados con las resultantes de tensión en el espesor de la viga en la dirección x , obtenidas de acuerdo al modelo unidimensional adoptado. Luego, para verificar la condición de pandeo local (g_2), se evalúa el factor de carga crítica local (λ_{L1}) definido como la relación entre ambas resultantes de tensión.

Cabe aclarar que las expresiones analíticas que definen al factor de carga crítica local se obtienen despreciando los acoplamientos flexo-torsionales en el laminado. Dicha hipótesis, en adición a las restricciones impuestas por la aplicación del criterio CT-HE, condicionan a la variable de diseño θ_k , provocando que el ángulo de orientación de las fibras sólo pueda adoptar los valores 0° y 90° de manera de constituir un laminado ortótropo ($[0_{nc}]$) ó *cross-ply* ($[0/90]_s$, $[0_{nc}/2/90_{nc}/2]$).

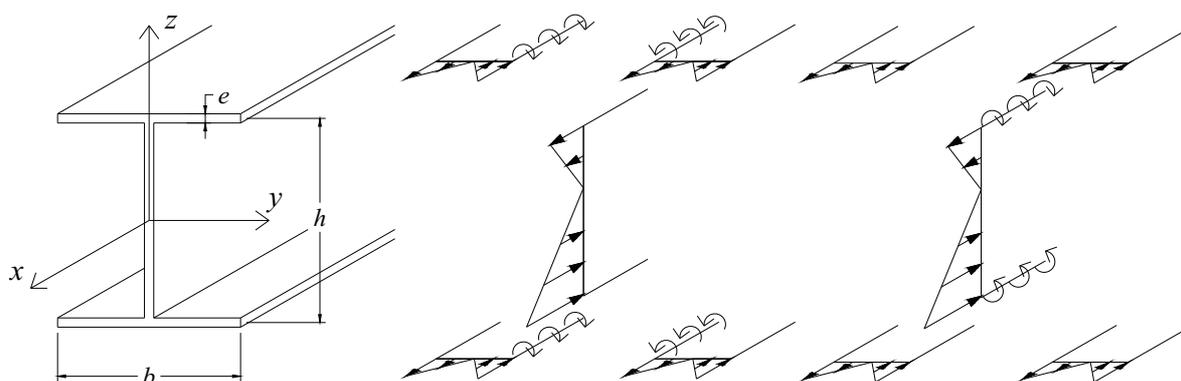


Figura 3: Esquema de análisis del pandeo local en una viga tipo I.

3.5 Técnicas de optimización

El problema de diseño se resuelve mediante la aplicación del método *Simulated Annealing* (SA). Este método fue introducido originalmente por Kirkpatrick *et al.* (1983) y está basado en la generación de soluciones factibles en forma aleatoria, siendo su principal característica evitar la convergencia local en problemas de gran escala. En este trabajo se compara la convergencia de dos algoritmos basados en dicho método: *Simulated Annealing* (SA) y *Simulated Annealing Caótico* (SAC), siendo la diferencia fundamental entre ambos la manera en la que se generan tales soluciones, es decir, las técnicas de búsqueda empleadas en su implementación.

En la Figura 4 se muestra un esquema general de la técnica *Simulated Annealing*. Para implementar este algoritmo exitosamente es necesario tomar una serie de decisiones en lo que se refiere al control de la temperatura. La temperatura inicial debe ser lo suficientemente alta para que la solución final sea independiente de la solución inicial y para que al iniciar el algoritmo todas las soluciones puedan ser aceptadas con una probabilidad similar. Una expresión adecuada de la temperatura inicial (T_0) fue propuesta por Dréo y Pétrowski (2006)

$$T_0 = r \max(\Delta C_{ij}), \quad (47)$$

donde ΔC_{ij} es la diferencia entre los valores extremos de la función objetivo y r es una constante mayor que 1.

Por otro lado, la función que determina y controla el descenso de la temperatura tiene un papel importante en la eficiencia del método, puesto que define el criterio de convergencia del algoritmo. En este trabajo se aplica el esquema de enfriamiento desarrollado por Vidal (2003), siendo su principal objetivo establecer parámetros que permitan obtener un equilibrio entre el tiempo final de ejecución del algoritmo y el número de búsquedas que realice el mismo. De esta manera, se plantea disminuir la temperatura según el siguiente criterio

$$T_{i+1} = \frac{T_i}{1 + T_i^2}. \tag{48}$$

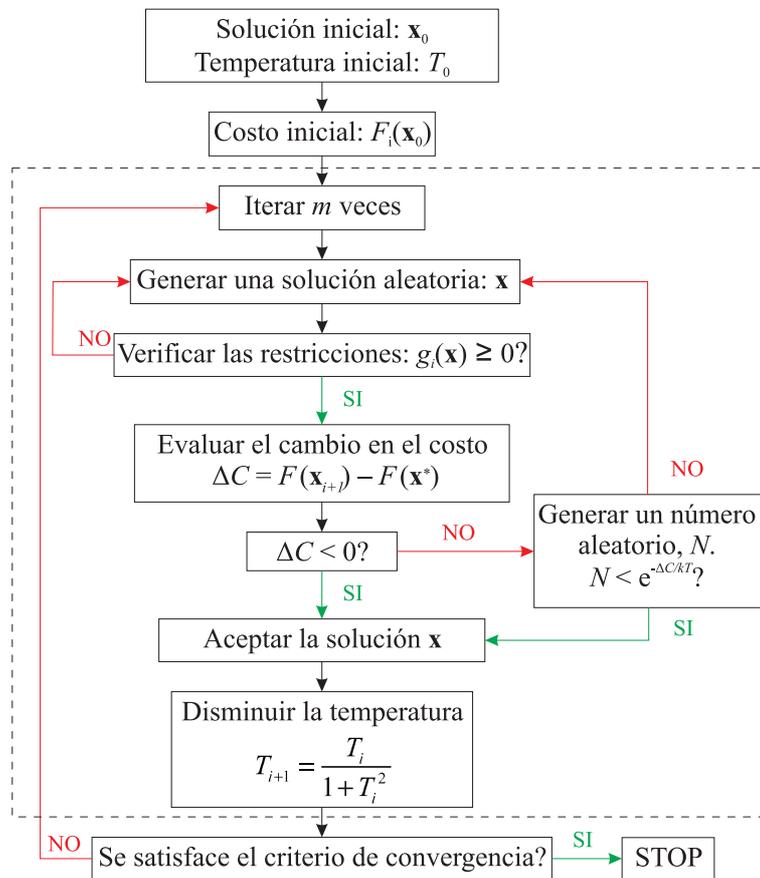


Figura 4: Esquema general del algoritmo *Simulated Annealing*.

Como se mencionó, la diferencia entre los dos algoritmos implementados aquí es la manera en que se generan las soluciones en cada iteración. El método de búsqueda de SA se define de la siguiente manera

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + N \left(\frac{\mathbf{x}^S - \mathbf{x}^I}{n} \right), \tag{49}$$

donde N es un número aleatorio, \mathbf{x}^S y \mathbf{x}^I son los extremos superior e inferior del dominio factible de cada una de las variables del problema, respectivamente, y n es un cociente de radio de búsqueda apropiado.

El algoritmo SAC propuesto por Mingjun y Huanwen (2004) consiste en introducir sistemas caóticos en la búsqueda del algoritmo y las variables de diseño se generan a partir del siguiente esquema

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}^I + z_{i+1} (\mathbf{x}^S - \mathbf{x}^I), \tag{50}$$

La variable caótica z_{i+1} se define a partir de algún sistema caótico conocido. En este trabajo empleamos a tal efecto el mapa logístico

$$z_{i+1} = \mu z_i (1 - z_i), \quad z_{i+1} \in [0,1], \tag{51}$$

donde μ es el parámetro de bifurcación.

4 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

La implementación numérica del problema de optimización requiere programar en forma conjunta y ordenada los distintos métodos y estrategias que intervienen en el mismo. Éstos deben combinarse apropiadamente y de la manera más eficiente posible. Al respecto, la implementación del problema de diseño abordado en este trabajo, requiere principalmente realizar tales combinaciones entre las estrategias de optimización y los métodos que gobiernan el análisis estructural.

La Figura 5 muestra esquemáticamente el orden en que se realizan los cálculos numéricos durante el proceso de resolución del problema de diseño. Antes de comenzar con el proceso iterativo debe proponerse una solución inicial y debe evaluarse su respectivo costo. En cada iteración se genera una nueva solución de acuerdo a las normas de generación de la técnica de optimización elegida. Luego, se verifican las restricciones geométricas, dado que éstas pueden ser evaluadas rápidamente. Si tales condiciones no se satisfacen, se genera una nueva solución y el proceso se repite. Una vez que se encuentra una solución que satisfaga las restricciones geométricas, se implementa el modelo de elementos finitos y las expresiones analíticas expuestas en la sección anterior para el análisis estructural. Dicha implementación permite evaluar los parámetros necesarios para la verificación de las restricciones estructurales. Si estas restricciones se cumplen, dichos cálculos permiten conocer además el costo que genera la solución factible obtenida. Este mismo procedimiento se repite hasta satisfacer el criterio de convergencia.

Cabe aclarar que en este trabajo, la programación del problema completo de optimización como fue descrito se realiza en un entorno MATLAB[®].

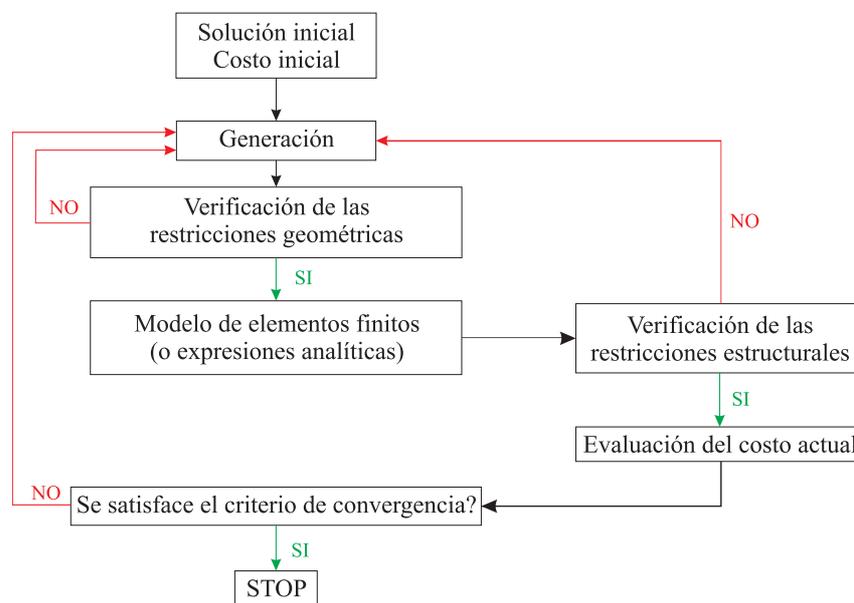


Figura 5: Esquema de resolución del problema de optimización.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

A continuación se aplica el esquema de diseño propuesto en una viga construida con fibras de carbono AS4 y resina PEEK, cuyas propiedades se detallan en el Apéndice.

Las condiciones de carga y de vinculación a las que está sometida la viga se muestran en la

Figura 6. Se trata de una viga cantiléver de 6m de longitud, sometida a una carga estática distribuida en la dirección de y ($q_y = 5000$ N/m) y una carga dinámica sinusoidal en el extremo libre, $Q_z = 2000\cos(5t)$ N. Se propone emplear en el diseño una sección transversal tipo I.

Las variables de diseño se definen en los siguientes dominios

$$\begin{aligned} b &\in [0.1 : 0.01 : 0.8] \text{ m}, & h &\in [0.1 : 0.01 : 0.8] \text{ m}, \\ n_c &\in [2 : 2 : 40] \rightarrow e &\in [0.004 : 0.002 : 0.08] \text{ m}, \end{aligned} \quad (52)$$

siendo el espesor de cada una de las capas del laminado (e_c) igual a 0.002 m. Se admite un desplazamiento máximo de 0.0075 m. Establecidas estas condiciones, se resuelve el problema de optimización de acuerdo a lo establecido en (8). Para su resolución se emplean las técnicas de optimización descriptas.

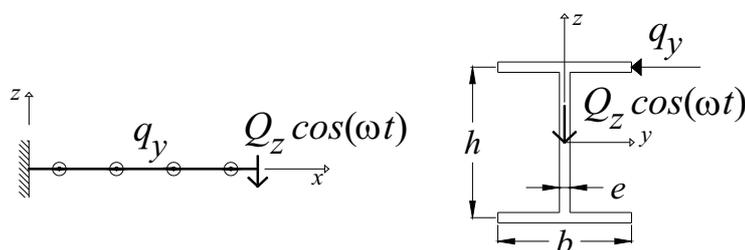


Figura 6: Condiciones de carga y de vinculación consideradas.

Los valores de referencia que hacen adimensional a cada una de las funciones que intervienen en la función objetivo global dada por (3) son $A_0 = 0.05 \text{ m}^2$ y $\delta_0 = 0.005$ m.

A fin de comparar el comportamiento de cada uno de los algoritmos de optimización propuestos, se eligen diferentes parámetros de control. Los valores propuestos se detallan en la Tabla 1, siendo T_f y k los parámetros que definen el criterio de convergencia y la probabilidad de aceptación, respectivamente.

	r	T_f	k	μ	m
P1	10	1.10^{-8}	0.08	4	100
P2	100	1.10^{-8}	0.09	4	80
P3	100	1.10^{-8}	0.09	4	60
P4	100	1.10^{-8}	0.09	4	50

Tabla 1: Parámetros de control.

En la Tabla 2 se muestran los valores óptimos de las variables de diseño y el valor mínimo de la función objetivo global y de sus componentes, obtenidos con ambos algoritmos para los diferentes parámetros de control. Se observa que la sección óptima encontrada es acorde a lo que se esperaba encontrar con este esquema de diseño, dado que la sección resultante posee la rigidez flexional necesaria para soportar la carga nominal q_y al aumentar el ancho del perfil y , a su vez, el peso disminuye al disminuir las demás dimensiones.

En cuanto al comportamiento de los algoritmos implementados, se advierte que si bien ambos obtienen la solución óptima global del problema, el método SAC ofrece un menor costo computacional. Es decir, al disminuir el número de iteraciones por cada corrida (n), el método SA no encuentra el mínimo global empleando el conjunto de parámetros P4, mientras

que el método SAC sí lo hace y con un costo computacional más bajo.

Por último, cabe destacar que la eficiencia del algoritmo SAC y su ventaja de escapar de mínimos locales está fundamentada en las propiedades estocásticas y de ergodicidad del sistema caótico empleado en el método de búsqueda.

		b^* [m]	h^* [m]	n_c^*	e [m]	Laminado	$F(\mathbf{x}^*)$	$A(\mathbf{x}^*)$ [m ²]	$\delta(\mathbf{x}^*)$ [m]	Tiempo [seg]
P1	SA	0.80	0.57	8	0.016	[0 ₈]	0.6044	0.0347	0.0026	1054
	SAC	0.80	0.57	8	0.016	[0 ₈]	0.6044	0.0347	0.0026	813
P2	SA	0.80	0.57	8	0.016	[0 ₈]	0.6044	0.0347	0.0026	836
	SAC	0.80	0.57	8	0.016	[0 ₈]	0.6044	0.0347	0.0026	652
P3	SA	0.80	0.57	8	0.016	[0 ₈]	0.6044	0.0347	0.0026	580
	SAC	0.80	0.57	8	0.016	[0 ₈]	0.6044	0.0347	0.0026	454
P4	SA	0.79	0.47	8	0.016	[0 ₈]	0.6128	0.0328	0.0028	537
	SAC	0.80	0.57	8	0.016	[0 ₈]	0.6044	0.0347	0.0026	377

Tabla 2: Soluciones óptimas y valores mínimos de la función objetivo.

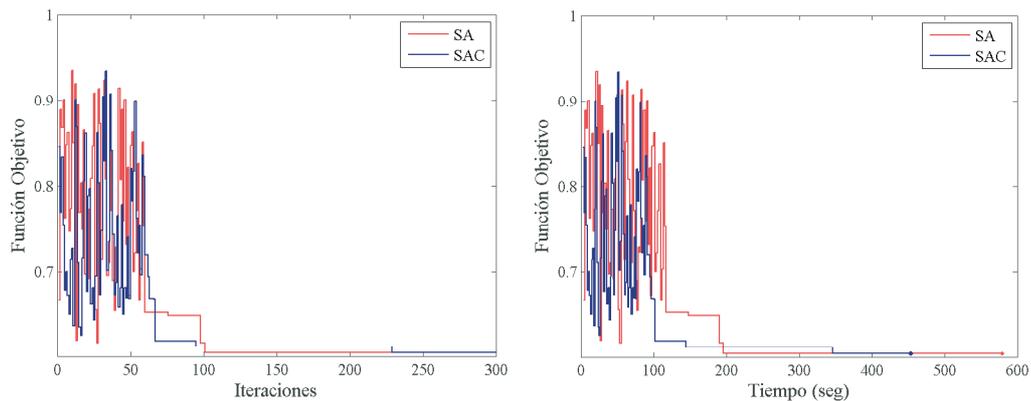


Figura 7: Valores de la función objetivo en función de: (a) el número de iteraciones; (b) el tiempo. Conjunto de parámetros P3.

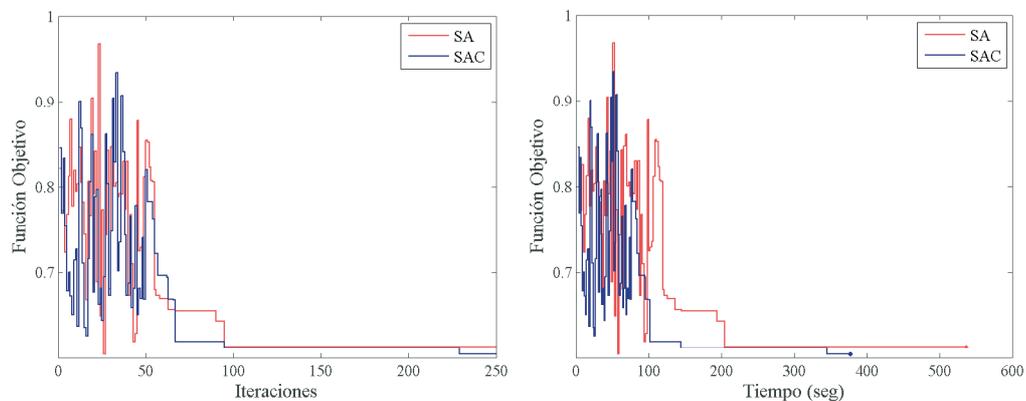


Figura 8: Valores de la función objetivo en función de: (a) el número de iteraciones; (b) el tiempo. Conjunto de parámetros P4.

En las Figuras 7 y 8 se grafican los valores que adopta la función objetivo a medida que avanza el algoritmo en función del número de iteraciones y del tiempo, en correspondencia con los grupos de parámetros P3 y P4, respectivamente.

Los resultados expuestos fueron hallados empleando un procesador DualCore Intel Wolfdale de 2533 MHz, con 2044 MB de memoria RAM.

6 CONCLUSIONES

En este trabajo se formuló y se resolvió un problema de optimización destinado al diseño de vigas rectas de pared delgada construidas con laminados ortótropos, minimizando el desplazamiento total y el peso de la estructura en relación al peso de la misma y contemplando restricciones estructurales y geométricas que condicionan el problema. El diseño propuesto fue resuelto a través de la aplicación de la técnica heurística *simulated annealing*, empleando distintos métodos de búsqueda. Se obtuvieron las dimensiones de la sección transversal de la viga óptimas y el laminado óptimo para el diseño particular de una viga tipo I sometida a un estado de carga estático en superposición con una carga secundaria dinámica.

En cuanto a la resolución matemática del problema se obtuvieron resultados acordes a los esperados. Se comprobó que, en este caso particular de diseño, al disminuir el número de iteraciones en la búsqueda, la incorporación de un método de búsqueda caótico en el algoritmo *simulated annealing* proporciona mejores resultados que la aplicación del método de búsqueda clásico.

7 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido por la Secretaria de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional y por el CONICET. El presente artículo forma parte del estudio de tesis doctoral realizado por Florencia Reguera, bajo la dirección de Víctor H. Cortínez y Marcelo T. Piovan, en el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur.

APÉNDICE

En las Tablas A-1 y A-2 se detallan las propiedades de una lámina compuesta AS4/PEEK.

	$R = 1$	$R = 0$	$R = 0.2$	$R = \infty$	$R = 5$
Resistencia a fatiga a tracción en dirección de la fibra: L [MPa]	2128	1323	1387.5	-	-
Resistencia a fatiga a tracción en dirección transversal a la fibra: T [MPa]	93	37.6	42.8	-	-
Resistencia a fatiga a compresión en dirección de la fibra: l [MPa]	954.6	-	-	515.5	543.2
Resistencia a fatiga a compresión en dirección transversal a la fibra: t [MPa]	205.9	-	-	73	84
Resistencia a fatiga por corte: τ [MPa]	133	62.4	59.6	62.4	59.6

Tabla A-1: Resistencias a fatiga de una lámina unidireccional de carbono AS4/PEEK.

Propiedad	Carbono AS4/PEEK
Módulo de elasticidad longitudinal: E_1 [GPa]	140.35
Módulo de elasticidad transversal: E_2 [GPa]	9.44
Módulo de corte longitudinal: G_{12} [GPa]	5.40
Módulo de corte transversal: G_{23} [GPa]	1.97
Coefficiente de Poisson longitudinal: ν_{12}	0.253
Coefficiente de Poisson transversal: ν_{23}	0.340
Resistencia a tracción longitudinal: s_1^+ [MPa]	2128
Resistencia a tracción transversal: s_2^+ [MPa]	93
Resistencia al corte membranal: s_{12} [MPa]	133
Resistencia a compresión longitudinal: s_1^- [MPa]	954.6
Resistencia a compresión transversal: s_2^- [MPa]	205.9

Tabla A-2: Propiedades de una lámina unidireccional de carbono AS4/PEEK.

REFERENCIAS

- Cortínez V. H. y Piovan M. T., Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4): 701-723, 2002.
- Cortínez V. H. y Piovan M. T., Stability of composite thin-walled beams with shear deformability. *Computers and Structures* 84: 978-990, 2006.
- Dávalos J. F. y Qiao P., A computacional approach for análisis and optimal design of frp beams. *Computers and Structures* 70:169-183, 1999.
- Dréo J. y Pétrowski A., *Metaheuristics for hard optimization*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- Erdal O. y Sonmez F. O., Optimum design of composite laminates for maximum buckling load capacity using simulated annealing. *Composite Structures* 71, 45-52, 2005.
- Jen H. R. y Lee C. H., Strength and life in thermoplastic composite laminates under static and fatigue loads. Part I: Experimental. *International Journal of Fatigue* 20, 9:605-615, 1998a.
- Jen H. R. y Lee C. H., Strength and life in thermoplastic composite laminates under static and fatigue loads. Part II: Formulation. *International Journal of Fatigue* 20, 9:617-629, 1998b.
- Karperska R., Magnucki K. y Ostwald M., Bicriteria optimization of cold-formed thin-walled beams with monosymmetrical open cross sections under pure bending. *Thin-Walled Structures*, 45:563-572, 2007.
- Kathiravan R. y Ganguli R., Strength design of composite beam using gradient and particle swarm optimization. *Composite Structures* doi: 10.1016/j.compstruct, 2006.
- Kirkpatrick S., Gelatt C. D. y Vecchi M. P., Optimization by Simulated Annealing. *Science*, (20)4598:671-680, 1983.
- Kollár L. P. y Springer G. S., *Mechanics of Composite Structures*. Cambridge University Press, 2003.
- Magnucki K., Maćkiewicz M. y Lewiński J., Optimal design of a mono-symmetrical open cross section of a cold-formed beam with sinusoidally corrugated flanges. *Thin-walled*

- Structures*, 44:554-562, 2006.
- Manevich A. I. y Raksha S. V., Two-criteria optimization of H-section bars–beams under bending and compression. *Thin-Walled Structures* 45:898–901, 2007.
- Mingjun J. y Huanwen T., Application of chaos in simulated annealing. *Chaos, Solutions and Fractals*, 21:933-941, 2004.
- Piovan M.T., *Estudio teórico y computacional sobre la mecánica de vigas curvas de materiales compuestos, con sección de paredes delgadas, considerando efectos no convencionales*. Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Sur, Argentina, 2003.
- Rao S., *Engineering Optimization – Theory and Practice*, John Wiley & Sons Inc., 1996.
- Reguera F., *Diseño óptimo de estructuras de pared delgada compuestas*. Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Sur, Argentina, 2013.
- Reguera F. y Cortínez V. H., Diseño óptimo de vigas curvas construidas con material compuesto. *Mecánica Computacional* 31, 3481-3499, 2012.
- Savic V., Tuttle M. E. y Zabinsky Z. B., Optimization of composite I-sections using fiber angles as design variables. *Composite Structures*, 53:265-277, 2001.
- Tian Y. S. y Lu T. J., Minimum weight of cold-formed steel sections under compression. *Thin-Walled Structures*, 42:515–532, 2004.
- Vidal M.C., *Un procedimiento heurístico para un problema de asignación cuadrática*. Tesis Mg. Matemática, Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, 2003.
- Washizu K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon Press, 1974.