

EVALUACIÓN DE METODOLOGÍAS PARA LA MODELACIÓN REYNOLDS-AVERAGED NAVIER-STOKES (RANS) DE LA CAPA LÍMITE EN CONDUCTOS CIRCULARES

Nicolás D. Badano^{a,b} y Ángel N. Menéndez^{a,b}

^aPrograma de Hidráulica Computacional, Laboratorio de Hidráulica Aplicada, Instituto Nacional del Agua, Ezeiza, Buenos Aires, Argentina, nicolas.d.badano@gmail.com, <http://www.ina.gob.ar/>

^bLaboratorio de Modelación Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina, <http://laboratorios.fi.uba.ar/lmm/>

Palabras Clave: Efectos de escala, Fricción, Tratamientos de pared.

Resumen. La modelación física de problemas hidráulicos es una técnica muy aplicada mundialmente para diseñar, verificar y optimizar estructuras. Los efectos de escala que contaminan sus resultados, debido a la imposibilidad de representar adecuadamente todos los mecanismos físicos, han sido históricamente corregidos mediante criterios empíricos. La irrupción en la Hidráulica de la modelación numérica de tipo *CFD* (Computational Fluid Dynamics), que resuelve las ecuaciones completas de Navier Stokes, está cambiando este panorama, creando marcos de trabajo de complementación entre ambas. En este contexto, se ha tornado necesario encarar estudios básicos para establecer los alcances de cada una de ellas. En particular, debe determinarse hasta qué punto las pérdidas de energía mecánica ‘por fricción’ (generación de vorticidad en una pared) y ‘por forma’ (desprendimiento de la capa límite) están condicionadas por efectos de escala en los modelos físicos, y si la modelación numérica, en cambio, es capaz de desplegarse sobre todas las escalas, desde las de laboratorio (modelo físico) hasta las de obra (prototipo), con lo cual sería esta última la encargada de extrapolar resultados de una escala a otra. En este trabajo se analiza la capacidad de la modelación numérica de dar cuenta de las pérdidas de energía mecánica por fricción cuando se utiliza un tratamiento tipo *RANS* (Reynolds Averaged Navier Stokes) con modelos de turbulencia de la familia *k-epsilon*. Se efectúan ensayos sobre conductos circulares, para los cuales existen resultados experimentales bien establecidos que sirven para la validación del modelo numérico. Se aplican las dos técnicas disponibles para la incorporación de los efectos de la pared: la utilización de funciones de pared, con lo que se evita la resolución de la capa límite, y la resolución explícita de la capa límite, para lo cual se apela a modelos de turbulencia para bajo números de Reynolds. Se muestra que, efectivamente, la modelación *CFD-RANS*, criteriosamente utilizada, tiene la capacidad de explicar las pérdidas energéticas para todo número de Reynolds, desde flujo laminar a flujo turbulento a muy alto número de Reynolds, incluido el régimen transicional.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. El problema de los efectos de escala en la modelación física hidráulica

Dada la complejidad de los fenómenos hidráulicos, el diseño, optimización y verificación de estructuras hidráulicas complejas se apoya tradicionalmente en la realización de ensayos a escala reducida en modelos físicos.

Un modelo físico a escala es completamente similar a su contraparte real cuando se cumplen tres criterios: similaridad geométrica, cinemática y dinámica (Rayleigh, 1915; Yalin, 1971). En particular, esta última condición de similaridad dinámica implica que para cada fuerza actuante en cada punto del medio continuo el cociente entre su magnitud en el modelo y en el prototipo debe ser igual a una misma constante; es decir, debe existir una única escala de fuerzas. Este requerimiento es virtualmente imposible de cumplir con rigurosidad en el caso general, ya que requeriría el ensayo en un universo en miniatura (Heller, 2011), donde las propiedades del fluido y los parámetros físicos externos, como la presión atmosférica y la aceleración de la gravedad, estuvieran a escala. Esta condición podría aproximarse reemplazando el fluido del prototipo por otro y reemplazando la gravedad por una aceleración centrífuga, pero no se conocen casos en que este tipo de escalado se haya podido realizar completamente (Heller, 2011).

En la mayor parte de los casos prácticos se conservan las propiedades del fluido y se adopta con cuidado la relación entre la escala geométrica $E_l = L_m/L_p$ y la escala de tiempo, de manera que se conserven a escala las dos fuerzas más importantes en flujos líquidos a superficie libre: la fuerza inercial y la de gravedad. Esto se conoce como escala de Froude. No obstante, todas las demás fuerzas, incluyendo las tensiones viscosas y la tensión superficial y la compresibilidad del fluido resultan fuera de escala.

Las fuerzas viscosas, que suelen ser las segundas en importancia, se caracterizan por el número de Reynolds del flujo, que mide su relación con las fuerzas inerciales. En la mayor parte de los flujos ingenieriles los números de Reynolds son muy altos, por lo que los efectos viscosos son bajos. El enfoque utilizado en la modelación física consiste entonces en adoptar una escala de modelo suficientemente grande de manera que las fuerzas fuera de escala sean de poca incidencia también en el modelo. No obstante, dado que los costos de un modelo físico escalan aproximadamente con E_m^{-3} (Le Méhauté y Hanes, 1990), normalmente se adopta una solución de compromiso y las fuerzas fuera de escala no resultan del todo despreciables. Esto genera diferencias entre los resultados del modelo físico y del prototipo, llamados efectos de escala (Ackers, 1987). El efecto distorsivo de estas fuerzas fuera de escala sobre cada una de las variables de interés del escurrimiento no es directamente cuantificable a partir de un único modelo físico.

La problemática de los efectos de escala se ha estudiado abundantemente mediante modelación física (Kobus, 1984), generalmente construyendo modelos del mismo problema en una serie de escalas. En este tipo de estudios el modelo de mayor escala toma el lugar del prototipo, y los efectos de escala se cuantifican por comparando los resultados de los demás modelos. No obstante, no puede determinarse directamente si el modelo más grande está o no afectado por efectos de escala no despreciables (Heller, 2011). Muchos estudios se enfocaron a la determinación de escalas mínimas necesarias para obtener una representación aceptable desde el punto de vista ingenieril de diversos problemas típicos, como por ejemplo descarga vertederos de cresta ancha (Hager, 1994), tirantes y aireación en resaltos hidráulicos (Hager y Bremen, 1989; Chanson, 2009), vortices superficiales en tomas (Anwar et al., 1978), trayectoria en saltos de esquí (Heller et al., 2005), entre muchos otros. Generalmente al utilizar estas escalas mínimas solo las características principales del fenómeno se representan aceptablemente. No obstante, en deter-

minados casos las fuerzas fuera de escala pueden ocasionar fenómenos secundarios cuyo efecto sobre alguna de las variables de interés compita en magnitud con los producido por el fenómeno a modelar (Menéndez y Badano, 2011).

1.2. Estrategia de evaluación mediante modelación numérica

Este trabajo se desarrolla como parte de una investigación más general que busca evaluar la capacidad de la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD) para analizar el impacto de los efectos de escala hidráulicos que se presentan en la modelación física de diversos casos típicos de estructuras hidráulicas.

Dado que los modelos numéricos pueden simular el efecto combinado de todas las fuerzas que intervienen tanto a escala de prototipo como de modelo físico, sin necesidad de descartar ninguna de ellas a priori, resulta tentador utilizarlos para determinar los efectos marginales de las fuerzas fuera de escala, y eventualmente poder extrapolar resultados de una escala a otra.

Dado el estado actual del arte en CFD, no es factible por el momento prescindir por completo de la modelación física a escala. Existen todavía desafíos pendientes desde el punto de vista computacional, especialmente el problema de la turbulencia. Si bien se ha avanzado mucho en las últimas décadas, a través de tratamientos avanzados como la *Simulación de Grandes Vórtices* (LES, por su sigla en inglés), no siempre es factible aplicarlas por razones económicas o de tiempo a problemas hidráulicos complejos y, por otro lado, ni siquiera estos presentan un acuerdo completo con los valores experimentales.

La estrategia propuesta por lo tanto, consiste en complementar ambos tipos de modelación, aprovechando las ventajas de ambas. La modelación numérica se construye en primer lugar con la misma escala reducida del modelo físico, que por lo tanto puede utilizarse para realizar la mejor calibración posible en igualdad de condiciones y validar el modelo numérico. Luego la modelación numérica se repite a escala de prototipo, de manera de corregir los problemas de escala y obtener una mejor predicción de la respuesta esperable a tamaño real (Menéndez y Badano, 2011; Menéndez et al., 2013).

Para que esta extrapolación sea válida, es necesario estudiar con detalle cómo responden los distintos tratamientos matemáticos y numéricos, por ejemplo los modelos de turbulencia, ante diversas escalas. Es importante cuantificar los errores esperables frente a resultados experimentales, y poder compararlos con efectos de escala típicos, para determinar en qué casos pueden distinguirse los efectos de escala de manera confiable. También es necesario evaluar qué tratamientos son más aptos para cada escala y qué tan confiable es alternar entre tratamientos para cada caso.

1.3. El problema de la fricción

En este trabajo se analiza la aplicabilidad de distintos tratamientos de pared basados en el Promedio de Reynolds de las ecuaciones de Navier-Stokes (RANS) (Ferziger y Peric, 2002) para simular el efecto de la capa límite en conductos.

Este es un problema especialmente complejo para la modelación física, donde pueden aparecer efectos de escala de importancia. Como se explicó anteriormente, si en un problema es necesario utilizar escala de Froude, los efectos viscosos quedan fuera de escala. En el seno del fluido, la influencia de la viscosidad suele ser despreciable a escala de prototipo, y adoptando un modelo físico suficientemente grande puede también hacerse despreciable a escala. No obstante, cerca de la pared, sobre todo si esta es hidráulicamente lisa, las fuerzas viscosas son siempre importantes. Estas quedan irremediablemente fuera de escala en la modelación física.

Cuando las paredes son hidráulicamente rugosas, en principio es más fácil escalar correctamente la modelación física. No obstante, es difícil representar correctamente a escala la rugosidad del prototipo, ya que se requieren materiales de rugosidad variable de acuerdo a la escala de modelo y la rugosidad esperable del prototipo. Además, dado que las obras hidráulicas pueden requerir evaluarse para distintos caudales, no siempre resulta posible conservar los efectos rugosos a escala.

En este trabajo se evalúan distintos tratamientos de pared, cuantificando el error respecto de los valores experimentales para distintos números de Reynolds.

2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO NUMÉRICO

2.1. Modelo hidrodinámico

El modelo numérico utilizado se basa en el promedio de Reynolds de las ecuaciones de Navier-Stokes (RANS, por sus siglas en inglés). Suponiendo fluido incompresible monofásico, la ecuación diferencial de conservación de volumen resulta:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{U}} = 0, \quad (1)$$

donde $\bar{\mathbf{U}}$ es el valor medio de Reynolds del vector velocidad. Adoptando la hipótesis de [Boussinesq \(1877\)](#), bajo la cual se modelan de las tensiones de Reynolds de manera isotrópica a partir de una viscosidad de torbellino ν_t , la ecuación de conservación de cantidad de movimiento puede escribirse como ([Pope, 2000](#)):

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \nabla (\bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{U}}) - \nabla \cdot [(\nu + \nu_t) (\nabla \bar{\mathbf{U}} + \nabla \bar{\mathbf{U}}^T)] = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p}, \quad (2)$$

donde ν es la viscosidad cinemática del fluido y \bar{p} es el valor medio de la presión cinemática modificada, que incorpora en el gradiente la contribución de la energía cinética de la turbulencia ([Pope, 2000](#), p. 93):

$$\bar{p} = \bar{p} + \frac{2}{3}k, \quad (3)$$

donde \bar{p} es el valor medio de la presión cinemática y k el valor medio de la energía cinética de la turbulencia.

2.2. Modelos de turbulencia

En este trabajo se utilizaron modelos de turbulencia de tipo viscosidad de torbellino de la familia $k-\epsilon$ para representar las tensiones de Reynolds. Estos modelan el efecto de la turbulencia a través de dos ecuaciones de conservación: de la energía cinética de la turbulencia k y de la tasa de disipación viscosa ϵ .

En particular, para la variante $k-\epsilon$ estándar ([Launder y Spalding, 1974](#)), la primera de estas ecuaciones puede escribirse como:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{U}}k) - \nabla \cdot \left[\frac{\nu_t}{\sigma_k} \nabla k \right] = P_k - \epsilon, \quad (4)$$

donde P_k es la tasa de producción de k , que puede calcularse a partir del flujo medio:

$$P_k = 2\nu_t \left| \frac{1}{2} (\nabla \bar{\mathbf{U}} + \nabla \bar{\mathbf{U}}^T) \right|^2. \quad (5)$$

La ecuación de conservación de ϵ resulta:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{U}} \epsilon) - \nabla \cdot \left[\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \nabla \epsilon \right] = C_1 \frac{\epsilon}{k} P_k - C_2 \frac{\epsilon}{k} \epsilon. \quad (6)$$

A partir de estas dos cantidades puede establecerse un escala de velocidades y una escala de longitudes para los vórtices más grandes, y así calcular una viscosidad de torbellino, que resulta:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}. \quad (7)$$

Las constantes del modelo estándar son:

$$\begin{aligned} C_\mu &= 0.09, \\ C_1 &= 1.44, \\ C_2 &= 1.92, \\ \sigma_k &= 1.00, \\ \sigma_\epsilon &= 1.30. \end{aligned}$$

El k - ϵ estándar es el modelo de turbulencia RANS más ampliamente validado y utilizado. Su desempeño es particularmente bueno en flujos confinados donde las tensiones de Reynolds son dominantes, situación que se produce muy a muchos flujos de importancia ingenieril. Entre sus desventajas, se cita en la bibliografía un pobre desempeño en flujos no confinados, capas límites de gran curvatura y flujos rotativos. También es incapaz de representar las corrientes secundarias en flujos desarrollados en conductos no circulares, que se producen debido a tensiones de Reynolds anisotrópicas (Versteeg y Malalasekera, 1995).

Existen variantes del modelo k - ϵ que permiten lidiar mejor con flujos en que los efectos viscosos cobran importancia, ya sea en sectores o en la totalidad del flujo. Estos se conocen como modelos de turbulencia de *bajo Reynolds* (*low-Reynolds*). Las alternativas más difundidas fueron comparadas entre si y con resultados experimentales por Patel et al. (1985); estos concluyeron que la variante conocida como Launder-Sharma (Jones y Launder, 1973; Launder y Sharma, 1974) demostró el mejor ajuste, seguida por las debidas a Chien (1982) y Lam y Bremhorst (1981). Las ecuaciones de conservación de esta variante son:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{U}} k) - \nabla \cdot \left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu \right) \nabla k \right] = P_k - \epsilon - 2\nu |\nabla k^{1/2}|^2, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{U}} \epsilon) - \nabla \cdot \left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \nabla \epsilon \right] = C_1 \frac{\epsilon}{k} P_k - C_2 f_2 \frac{\epsilon}{k} \epsilon, \quad (9)$$

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\epsilon}. \quad (10)$$

En este tratamiento se incorpora en las ecuaciones el transporte difusivo de k y ϵ debido a la viscosidad física ν . También se adoptan funciones de peso para modificar el valor de los parámetros localmente en función del número de Reynolds de la turbulencia \mathcal{R}_t , definido como:

$$\mathcal{R}_t = \frac{k^2}{\epsilon \nu}. \quad (11)$$

Las funciones de peso adoptadas en el modelo Launder–Sharma $k-\epsilon$ son:

$$f_2 = 1 - 0,3e^{-R_t^2}, \quad (12)$$

$$f_\mu = e^{-3,4/(1+R_t/50)}. \quad (13)$$

2.3. Código numérico

Las ecuaciones de conservación se resolvieron utilizando las aplicaciones y librerías numéricas OpenFOAM[®] (*Open Field Operation and Manipulation*, Jasak (1996); Weller et al. (1998)). Estas aplican el *Método de los Volúmenes Finitos* sobre mallas no estructuradas de elementos poliédricos, utilizando un esquema de discretización espacial en centros de celda. La discretización temporal se realiza de manera implícita, tratando el acoplamiento presión-velocidad de un modo análogo al descrito por Rhie y Chow (1983).

Se utilizó un tratamiento iterativo hasta llegar a una condición estacionaria, resolviendo las ecuaciones de conservación mediante el método SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations*, Caretto et al. (1972))

Para la discretización espacial de todos los términos advectivos y difusivos se utilizaron esquemas lineales de segundo orden.

2.4. Tratamientos de pared

En la región de la capa límite se producen dos particularidades que la diferencian del flujo principal e imponen requerimientos especiales de modelación:

- Debido al efecto retardante de la pared, en general en la capa límite se producen gradientes grandes (comparados con el resto del flujo) de la velocidad y de los parámetros de la turbulencia, más pronunciados cuanto más grande es el número de Reynolds del flujo. Si estos pretenden resolverse explícitamente, es por lo tanto necesaria una discretización espacial adecuada, que puede resultar muy demandante computacionalmente.
- Independientemente de las velocidades medias del flujo, en la capa límite la velocidad disminuye hasta igualarse con la velocidad de la pared (típicamente nula). Por lo tanto los efectos de inercia pierden gradualmente importancia respecto de los efectos viscosos; es decir, suficientemente cerca de la pared se producen necesariamente bajos números de Reynolds locales. Por lo tanto, si la capa límite quiere resolverse explícitamente es necesario contar con un modelo de turbulencia adaptado a bajos números de Reynolds.

Por otro lado, la capa límite ha sido muy estudiada de manera experimental y teórica. Es bien conocido que suficientemente cerca de la pared, el flujo no depende en los parámetros turbulentos del flujo exterior. La velocidad del flujo U solo depende de la distancia a la pared y , la densidad del fluido ρ , la viscosidad μ y la tensión de corte en la pared τ_w . Esta zona es conocida *Capa límite Interior (Inner Boundary Layer)*. Un análisis dimensional de estos parámetros resulta en la siguiente igualdad

$$u^+ = \frac{u}{u^*} = f\left(\frac{yu^*}{\nu}\right) = f(y^+), \quad (14)$$

donde el parámetro $u^* = \sqrt{\tau_w/\rho}$, es llamado *velocidad de corte*, a raíz de sus unidades. La ecuación (14) es llamada *Ley de la Pared*. Quedan definidos dos grupos adimensionales importantes, $u^+ = u/u^*$ e $y^+ = yu^*/\nu$.

La capa límite interior puede a su vez dividirse en tres sub-regiones, de acuerdo a la importancia relativa entre las tensiones viscosas y de Reynolds:

- La *sub-capa viscosa* es la más próxima a la pared, $y^+ < 5$ (Versteeg y Malalasekera, 1995). En esta zona las tensiones de Reynolds pueden despreciarse, por lo que las fuerzas viscosas son totalmente dominantes. Siempre que la capa límite sea delgada, dentro de la sub-capa viscosa existe un perfil lineal de velocidades.
- La *sub-capa de transición (buffer layer)* cubre el rango $5 < y^+ < 30$. En esta tanto ambas componentes de tensión son de importancia.
- La *sub-capa inercial* se extiende aproximadamente entre $30 < y^+ < 500$. En este caso las tensiones viscosas son despreciables respecto de las de Reynolds. Experimentalmente se determinó que las velocidades siguen un perfil logarítmico, lo que puede confirmarse teóricamente a través de análisis dimensional (Tennekes y Lumley, 1972) o bien a partir de la integración de las ecuaciones de conservación utilizando la expresión de la longitud de mezcla propuesta por von Kármán (1930).

Utilizando los conocimientos de la capa límite se desarrollaron en la bibliografía distintos tratamientos para lidiar con el efecto de la pared sobre el flujo. En este trabajo se analizan dos metodologías: tratamiento de *Bajo Número de Reynolds (Low Reynolds Number)* y tratamiento utilizando *Funciones de Pared*.

Estos tratamientos implican en cada caso imponer en función de la distancia a la pared de la primera celda, una relación la velocidad en ese punto y la tensión de corte en la pared. Dado que usualmente las tensiones están relacionadas con el gradiente de velocidades linealmente:

$$\frac{\tau}{\rho} = (\nu + \nu_t) \frac{dU}{dy}, \quad (15)$$

existen dos maneras de imponer dicha relación: como un término adicional en la ecuación de cantidad de movimiento cerca de la pared o como una viscosidad de torbellino modificada en la pared ν_{tw} . En OpenFOAM se utiliza esta última alternativa. Si se aplica la ecuación de Newton a la primera celda adyacente a la pared se obtiene:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = (\nu + \nu_{tw}) \frac{U - U_w}{y}, \quad (16)$$

donde U_w es la velocidad en la pared. Si se considera $U_w = 0$ puede derivarse que:

$$\nu_{tw} = \nu \left(\frac{y^+}{u^+} - 1 \right). \quad (17)$$

De esta manera, imponiendo el valor de ν_{tw} según la ecuación (17) puede especificarse una relación arbitraria entre u^+ e y^+ en la pared.

2.4.1. Tratamiento de Bajo Número de Reynolds

En el caso del tratamiento de pared de Bajo Número de Reynolds, el flujo se resuelve de manera explícita a través de toda la capa límite. La primera celda adyacente a la pared debe tener un espesor tal que esté dentro de la sub-capa viscosa ($y^+ < 5$). Dado que debe resolverse una zona donde los efectos viscosos son importantes, es necesario acompañar este tratamiento con

un modelo de turbulencia capaz de resolver bajos números de Reynolds, como los mencionados en la sección 2.2

La subcapa viscosa es muy delgada, por lo que la tensión de corte se puede considerar aproximadamente constante e igual a la tensión sobre la pared. Haciendo dicha hipótesis, muy cerca de la pared puede escribirse:

$$\frac{\tau_w}{\rho} \approx \frac{\tau(y)}{\rho} = \nu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (18)$$

de donde se obtiene la relación:

$$u^+ = y^+ . \quad (19)$$

Reemplazando la ecuación (19) en la (17), surge que para aplicar esta condición de borde en el modelo debe simplemente imponerse en la pared:

$$\nu_{tw} = 0 \quad (20)$$

Esto es consistente con el hecho de que las tensiones de Reynolds, modeladas a través de la viscosidad de torbellino según la hipótesis de Boussinesq, son despreciables en la sub-capa viscosa.

Los valores de k experimentan un pico en la sub-capa de transición, debido a que el elevado gradiente de velocidades transfiere energía a la turbulencia. No obstante, las fluctuaciones de la velocidad tienden a anularse rápidamente en la sub-capa viscosa al acercarse a la pared, como se observa en los datos observados por Klebanoff (1954). Por lo tanto, como condición de borde en el tratamiento de bajo número de Reynolds se imponen en general valores teóricamente nulos; por la implementación numérica empleada en OpenFOAM, los valores de k no pueden anularse completamente, por lo que se utilizan en su lugar valores muy pequeños como condición de borde, por ejemplo $k = 10^{-12}$.

En cuanto a la condición de borde de la tasa de disipación ϵ , distintos modelos de turbulencia de bajo Reynolds proponen condiciones de borde distintas, ya sea de gradiente nulo o de valor nulo (Patel et al., 1985). En el caso del modelo Launder–Sharma, se recomienda como condición de borde $\epsilon = 0$ en la sub-capa viscosa. Nuevamente, OpenFOM no permite que ϵ se anule completamente, por lo que se adopta $\epsilon = 10^{-12}$.

2.4.2. Tratamiento mediante funciones de pared

El tratamiento mediante funciones de pared consiste en simular el flujo hasta una determinada distancia adimensional de la pared, típicamente ubicada en la sub-capa inercial y de allí modelar la relación entre la velocidad y la tensión de corte en la pared utilizando relaciones experimentales conocidas. Esta relación luego se impone en la pared según se describe en la sección 2.4, por ejemplo a través de la ecuación (17).

En la sub-capa inercial, el perfil de velocidades puede escribirse como (Tennekes y Lumley, 1972):

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) , \quad (21)$$

donde la constante E es universal para números de Reynolds suficientemente altos y bordes lisos. Experimentalmente se determinó un valor de $E = 9,8$. Como se mencionó anteriormente, este perfil es aproximadamente válido en el rango $30 < y^+ < 500$, de manera que el espesor del primer nodo de cálculo a la pared debe caer dentro de ese rango. Respecto del tratamiento de bajo número de Reynolds, esta alternativa representa un ahorro considerable de elementos

de cálculo, al evitarse la resolución numérica directa de la zona de mayores gradientes de velocidades y parámetros turbulentos. Esta es una de las razones de su gran popularidad en distintos códigos numéricos.

Las mediciones experimentales indican que en la sub-capa inercial, la tasa de producción de energía cinética de la turbulencia es igual a su tasa de disipación (Versteeg y Malalasekera, 1995). Por lo tanto, a partir de las ecuaciones (4) y (5) pueden derivarse que:

$$k = \frac{u^{*2}}{\sqrt{C_\mu}} \quad (22)$$

$$\epsilon = \frac{u^{*3}}{\kappa y} \quad (23)$$

Estas ecuaciones se utilizan para fijar condiciones de borde para k y ϵ en la sub-capa viscosa. Estando en equilibrio la producción y disipación de energía turbulenta, normalmente se supone que k posee un valor constante, y se adopta como condición de borde $\partial k / \partial n = 0$. Para ϵ se adopta un valor fijo de acuerdo a la ecuación (23).

Dada una determinada distancia a la pared y y una determinada velocidad U , los parámetros adimensionales u^+ e y^+ no puede calcularse directamente de la ecuación (21), ya que no se conoce a priori la tensión de corte en la pared y no puede despejarse. Por lo tanto, es necesario resolverla de manera iterativa, típicamente usando y^+ como variable de iteración. Por otro lado la ecuación (21) puede producir resultados espurios en caso de flujos separados, donde existen puntos donde la tensión de corte se anula y la ecuación se vuelve indeterminada.

Debido a estas razones, Launder y Spalding (1974) propusieron un procedimiento de cálculo alternativo, que consiste en calcular la velocidad de corte a partir de la energía cinética de la turbulencia. Reescribiendo la ecuación (22), puede despejarse:

$$u^* = C_\mu^{0,25} \sqrt{k} \quad (24)$$

Luego, reemplazando la ecuación (24) en (21) se obtiene:

$$U = \frac{C_\mu^{0,25} \sqrt{k}}{\kappa} \ln\left(\frac{E C_\mu^{0,25} \sqrt{k} y}{\nu}\right), \quad (25)$$

a partir de la cual pueden calcularse u^+ e y^+ para aplicar en la ecuación (17).

La función de pared logarítmica de la ecuación (21) es válida para paredes hidráulicamente lisas. Estas son aquellas en las cuales la rugosidad de la superficie queda completamente dentro de la sub-capa laminar, que atenúa cualquier perturbación, por lo que no se observan efectos sobre el flujo exterior. Nikuradse (1950) comprobó experimentalmente que la existencia de rugosidades más grandes en la pared produce un corrimiento hacia afuera del perfil logarítmico de velocidades, incrementando el efecto retardante de la pared. El perfil de velocidades adimensional resulta :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) - \Delta B \quad (26)$$

donde ΔB es una función de la rugosidad que cuantifica el corrimiento del perfil.

ΔB depende, en general, de la altura y del tipo de la rugosidad (arena uniforme, remaches, costuras, costillas, terminaciones, etc.). No existe una única relación universal válida para todos los tipos de rugosidad. Para rugosidades del tipo grano de arena uniforme y similares, no obstante, se halló que ΔB correlaciona bien con la altura de rugosidad adimensional $K_s^+ = K_s u^* / \nu$,

donde K_s es la altura de rugosidad física. a partir de los experimentos pueden distinguirse tres regímenes: hidráulicamente liso, transicional y completamente rugoso. Utilizando los datos de Nikuradse para rugosidad uniforme, [Cebeci y Bradshaw \(1977\)](#) parametrizaron ΔB para estos tres regímenes:

$$\Delta B = \begin{cases} 0 & \text{si } K_s^+ < 2,25 \\ \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{K_s^+ - 2,25}{87,75} + C_s K_s^+ \right) \sin (0,4258 (\ln K_s^+ - \ln 2,25)) & \text{si } 2,25 < K_s^+ < 90 \\ \frac{1}{\kappa} \ln (1 + C_s K_s^+) & \text{si } 90 < K_s^+ \end{cases} , \quad (27)$$

donde C_s es llamada la *constante de rugosidad (roughness constant)*. Para rugosidades no uniformes resulta sensato adoptar como K_s el valor medio de la rugosidad. Desafortunadamente, en estos casos no existe una manera a priori de estimar la constante de rugosidad.

3. ENSAYOS NUMÉRICOS

3.1. Implementación

Para los ensayos numéricos de ambos tratamientos se simuló el escurrimiento a caudal constante en un conducto de sección circular, con un diámetro de 0.10 m. Se impuso una velocidad media en el conducto de 1.00 m/s, y se alcanzaron distintos números de Reynolds variando la viscosidad cinemática del fluido ν .

Dado que se trata con un problema con simetría de revolución, se simuló la geometría en dos dimensiones, con la progresiva longitudinal y la distancia al centro como coordenadas. En sentido longitudinal se utilizaron condiciones de borde periódicas para U , k y ϵ .

Se utilizaron elementos de malla rectangulares. Para la discretización transversal, se definió en cada caso el tamaño del primer elemento aledaño a la pared. El tamaño de los demás elementos se definió como una sucesión geométrica, con un coeficiente de crecimiento $R = 1.2$.

Normalmente no es sencillo estimar con precisión el tamaño de celda necesario para alcanzar un determinado valor de y^+ . No obstante, en este trabajo se buscó validar los distintos tratamientos de pared comparándolos con resultados experimentales. Por lo tanto, se utilizaron funciones de ajuste sobre los datos experimentales para estimar a priori el orden de la tensión de corte esperable, y así definir la malla de cálculo necesaria. Para un conducto circular, la tensión de corte media en la pared puede escribirse como:

$$\tau_w = \frac{f}{4} \frac{\rho U^2}{2} , \quad (28)$$

donde U representa en este caso la velocidad media en la sección y $f = f(\mathcal{R})$ es un factor que encapsula el efecto del número de Reynolds sobre la resistencia friccional, llamado *factor de fricción de Darcy*. La pérdida de carga se expresa como:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{f}{D} \frac{\rho U^2}{2} , \quad (29)$$

conocida como *ley de Darcy-Weisbach*.

Para el factor de fricción en conductos lisos se utilizó la siguiente expresión, ajustada a los experimentos de Nikuradse y a los publicados por [Idel'chik \(1966\)](#):

$$f_{exp}(\mathcal{R}) = \begin{cases} \frac{64}{\mathcal{R}} & \text{si } \mathcal{R} < 2500 \\ \frac{0,3164}{\mathcal{R}^{0,25}} & \text{si } 2500 < \mathcal{R} < 20\,000 \\ \frac{1}{(1,81 \log \mathcal{R} - 1,64)^2} & \text{si } 20\,000 < \mathcal{R} \end{cases} , \quad (30)$$

En tanto, para el factor de fricción en conductos rugosos se utilizó la ecuación de Kármán-Prandtl (Rouse, 1946)

$$f_{exp} = \frac{1}{\left(2 \log \frac{D}{2K_s} + 1,74\right)^2}, \quad (31)$$

válida para el régimen completamente rugoso.

3.2. Tratamiento de Bajo Número de Reynolds

Se ensayó el conducto con paredes hidráulicamente lisas para un rango amplio de números de Reynolds, entre 200 y 1×10^7 utilizando el tratamiento de pared de bajo Reynolds con el modelo de turbulencia Launder–Sharma $k-\epsilon$.

Para definir la malla de cálculo se calculó la tensión de corte a partir de las expresiones (29) y (30) y se estableció la primera celda de manera que su centro se encuentre a una distancia de la pared de $y^+ = 0,1$. Las simulaciones se llevaron a cabo en régimen permanente con un algoritmo iterativo, y se monitorearon los residuos iniciales y las presiones en el conducto para verificar la convergencia.

Una vez alcanzada la convergencia, se calcularon los factores de fricción correspondientes a partir del gradiente de presiones, a través de la ecuación (29). Los resultados de factor de estas simulaciones se presentan en la figura 1, comparados con la ecuación (30) y algunos puntos experimentales publicados por Patel y Head (1969). Se observa un acuerdo excelente en todo el rango con los valores derivados de los experimentos. Se observa que el modelo predice con bastante precisión la transición laminar-turbulenta, en el rango $2000 < Re < 3000$. Los resultados en este sentido son ligeramente mejores a los publicados originalmente por Jones y Launder (1973), que observaron que el modelo de turbulencia no predecía la transición a régimen laminar hasta $Re = 1600$. En la figura 2 se presenta el cociente entre el valor calculado de f y el ajuste de los valores experimentales. Se observa que este tratamiento con condición de borde en $y^+ = 0,1$ tiene un error relativo máximo del orden de 3.5 %.

En las figuras 1 y 2 también se presentan resultados simulados en idénticas condiciones pero con el primer centro de celda a una distancia de $y^+ = 1$ de la pared. Se observa en estos casos que la curva de f se aleja sensiblemente de los valores experimentales, con un error relativo máximo de alrededor de 15 %. Más aún, en la figura 2 se incorporan los resultados de un tercer juego de simulaciones, en que el primer nodo se encuentra también a $y^+ = 1$, pero donde el factor de expansión es de $R = 1.1$. Los resultados de esta última se asemejan un poco más a los datos experimentales.

Estos resultados ponen de manifiesto que la sensibilidad observada no se debe estrictamente al espesor de la primera celda. En la figura 3 se presentan los perfiles de u^+ y k en función de la coordenada adimensional y^+ para un número de $Re = 1 \times 10^6$, tanto para el caso donde la primera celda está en $y^+ = 0,1$ como cuando se encuentra en $y^+ = 1$ con $R = 1,1$.

Se observa que en este último caso la discretización resulta pobre respecto del gradiente tanto de u^+ como de k en el rango aproximado $1 < y^+ < 10$, y como consecuencia se produce un mayor pico de k en la sub-capa de transición. Este problema se manifiesta con mayor prominencia debido a la formulación centrada utilizada en OpenFOAM, ya que y^+ se calcula en correspondencia con el centro de celda; por lo tanto, aún si el espesor de la segunda celda es igual a la de la primera, el y^+ de esta resulta 3 veces el de la primera. Como conclusión, es importante considerar en los tratamientos de Bajo Número de Reynolds no solo el tamaño de la primera celda sino asegurar una buena discretización de la sub-capa de transición. Ensayos adicionales muestran muy baja sensibilidad al adoptar discretizaciones más finas que $y^+ = 0,1$

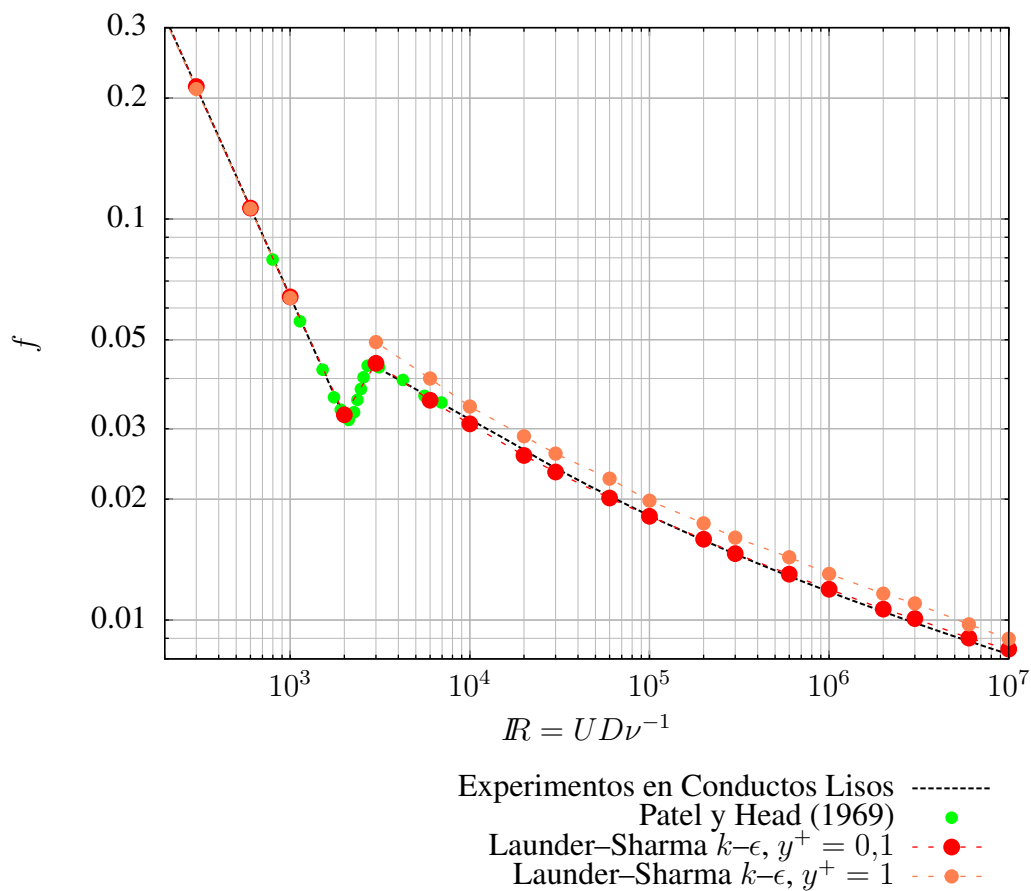


Figura 1: Tratamiento de Bajo Reynolds comparado con datos experimentales

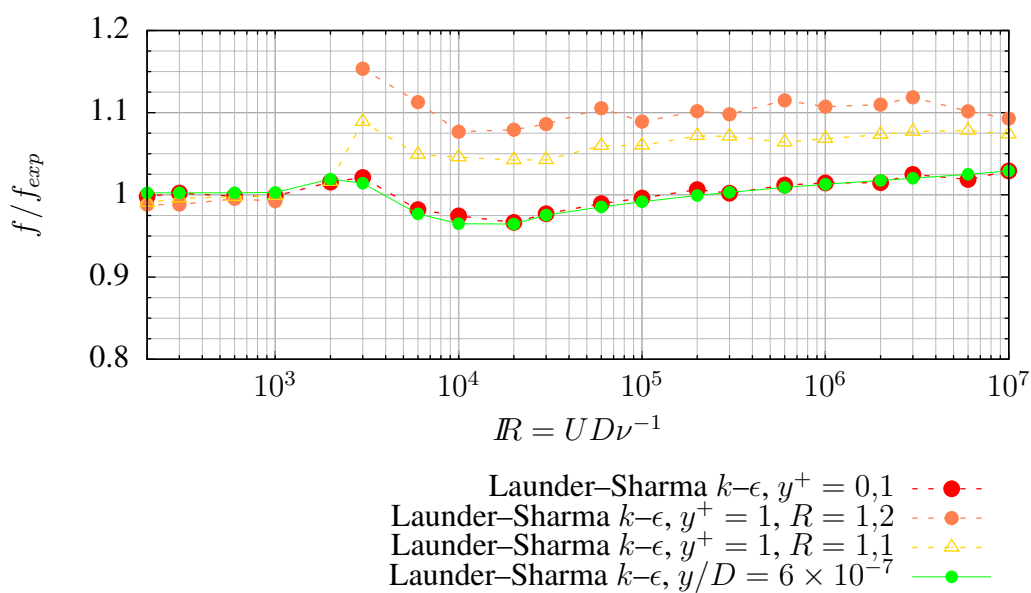


Figura 2: Errores relativos del tratamiento de Bajo Reynolds

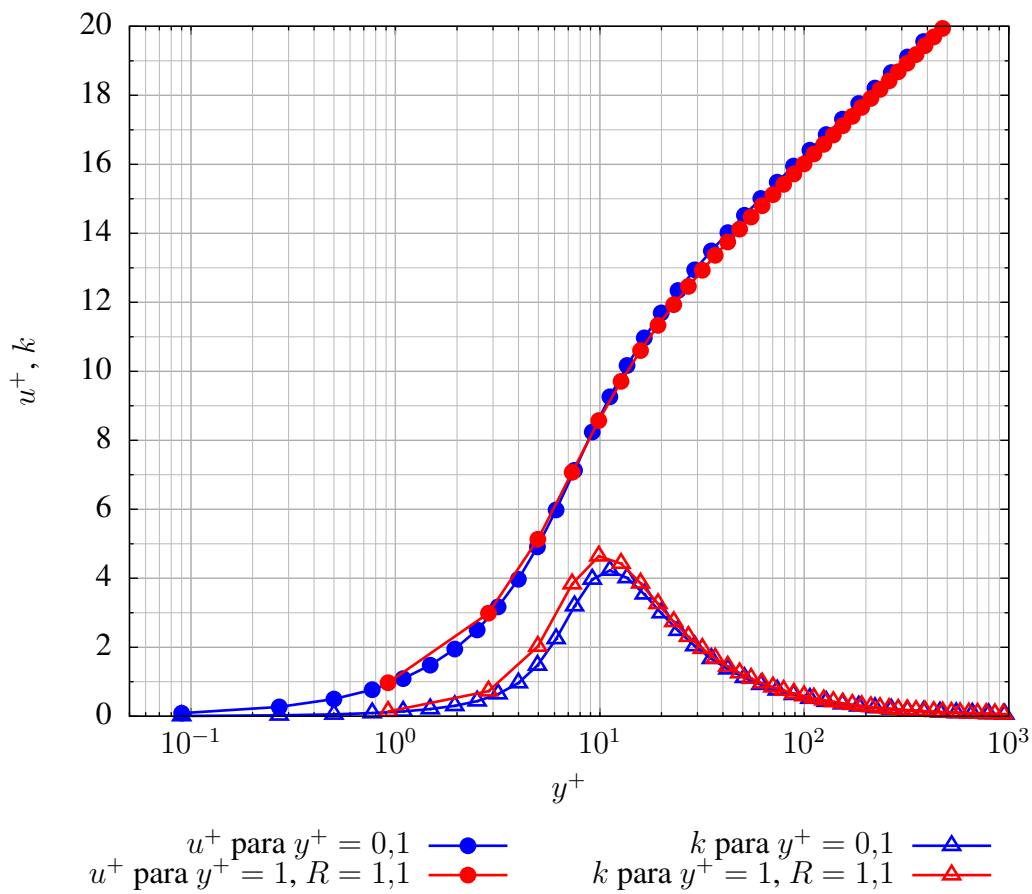


Figura 3: Perfiles de u^+ y k para el tratamiento de Bajo Reynolds

y $R = 1,2$.

Uno de las limitaciones a priori del procedimiento utilizado es que para resolver correctamente la capa límite la malla de cálculo depende del número de Reynolds. Esto dificultaría los casos en que por ejemplo se simula un transitorio, y el conducto atraviesa un rango de caudales. A medida que el caudal crece, también lo hace la velocidad de corte y la capa límite se hace más estrecha. Dado un determinado tamaño de primera celda, existe siempre algún caudal suficientemente grande para el cual y^+ se escapa de la sub-capa viscosa, y el tratamiento deja de ser válido. No obstante, es posible adoptarse la primera celda de manera que y^+ sea pequeño para el caudal máximo. Se realizó un ensayo de esas características, simulando todo el rango de Reynolds con la malla que resulta en $y^+ = 0,1$ en la primera celda para $Re = 1 \times 10^7$, que corresponde $y/D = 6 \times 10^{-7}$. El error relativo respecto de los experimentos se presenta en trazo verde en la figura 2. Se observa que los resultados son absolutamente comparables con los del caso en que y depende del número de Reynolds. Se concluye por lo tanto que esta resulta una estrategia válida para simular caudales variables sobre superficies lisas.

3.3. Tratamiento mediante funciones de pared

Se realizaron ensayos sobre el mismo conducto circular de $D = 0.1$ m utilizando el tratamiento mediante funciones de pared logarítmicas. En este caso se ensayó solo el rango en que existe una capa límite turbulenta, a partir de $Re = 3000$, hasta $Re = 1 \times 10^7$; por debajo de este rango no se desarrolla la sub-capa viscosa, por lo que el tratamiento no es aplicable. En todos los casos se adoptó la malla de cálculo de manera que $y^+ = 30$ en la primera celda.

Se analizaron en primer lugar los resultados para paredes hidráulicamente lisas, utilizando el perfil de la ecuación (21). Se compararon las dos metodologías descritas en la sección 2.4.2 para resolver la velocidad de corte, ya sea iterando sobre y^+ como utilizando la metodología propuesta por Launder y Spalding (1974) de calcularla a partir de la energía cinética de la turbulencia. Los resultados de f para ambas se presentan en la figura 4, comparadas con el ajuste de la ecuación (30). Se observa que en este caso, donde no existen regiones de separación, ambas metodologías dan resultados idénticos.

En relación con los valores experimentales, se observa que el tratamiento mediante funciones de pared predice valores de f algo menores a los experimentales, tendencia que se acentúa cuanto menor es el número de Reynolds. Esto se observa con mayor claridad en la figura 5, en la cual se presenta nuevamente el cociente entre los resultados del modelo numérico y los valores experimentales. Se observa un error relativo menor al 5 % para Re mayor o igual a 3×10^4 , creciendo hasta un máximo de 7.5 % para números de Reynolds menores.

Estos errores crecientes a Re decreciente pueden entenderse a partir de la figura 6. En esta se grafica el radio del conducto r , que fija una dimensión máxima para el desarrollo de la capa límite, adimensionalizado respecto de la velocidad de corte y la viscosidad, de manera que $r^+ = ru^* \nu^{-1}$. También se grafican los límites del rango de validez del tratamiento mediante funciones de pared logarítmicos, $y^+ = 30$ e $y^+ = 500$. Se observa que a medida que Re disminuye, también lo hace r^+ . Como consecuencia, el límite inferior de la sub-capa inercial se hace cada vez más importante respecto del radio del conducto e , incluso si se discretiza de manera que todas las celdas tengan el mismo espesor de la primera, cada vez el radio del conducto presenta una peor discretización. Por ejemplo, para $Re = 3 \times 10^4$ se produce, un $r^+ = 480$, lo que significa que si el $y^+ = 30$ en el primer centro de celda, con la formulación en centro de elemento, puede discretizarse la sección en solo 16 celdas. Este quizás podría considerarse el límite mínimo para una discretización razonable del radio del conducto, y por lo tanto el umbral mínimo de validez para el tratamiento mediante funciones de pared logarítmica. En este

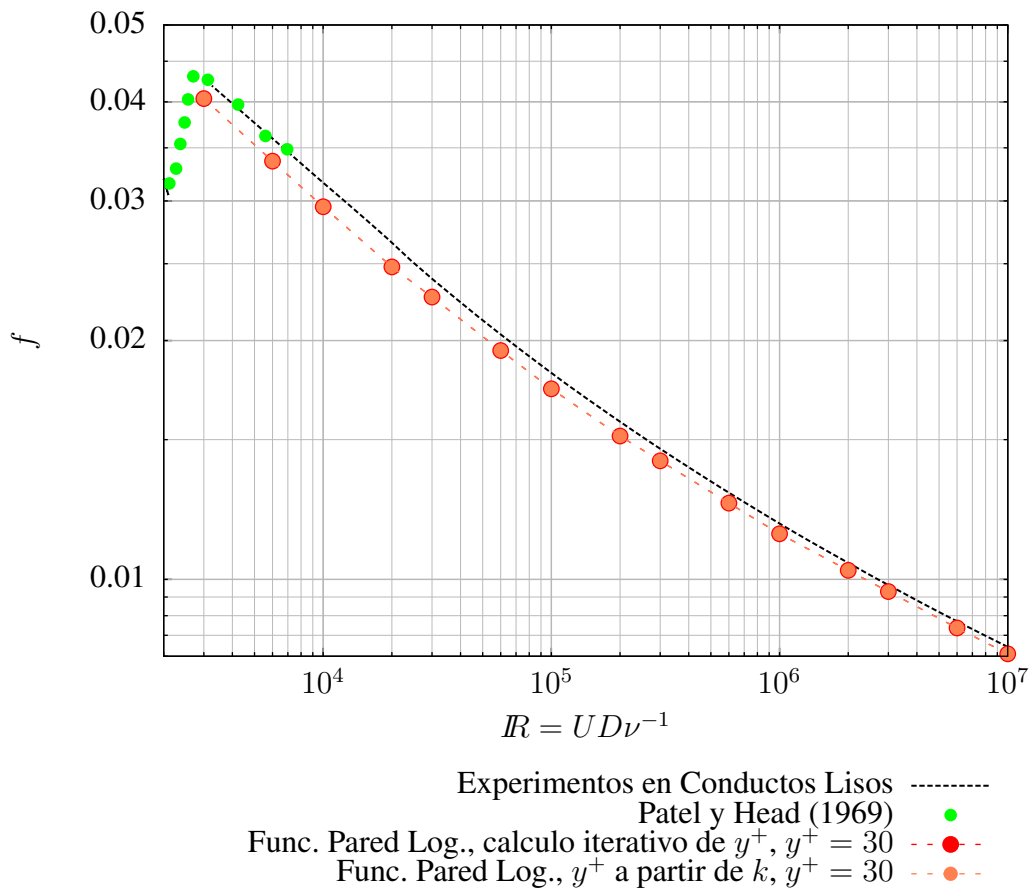


Figura 4: Tratamiento con funciones de pared comparado con datos experimentales para conductos lisos

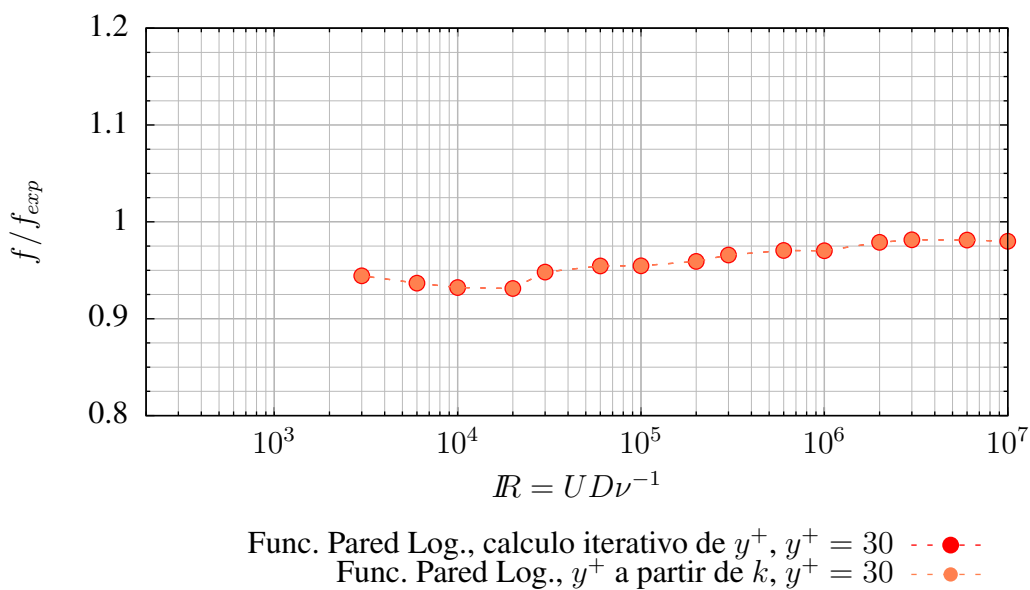


Figura 5: Errores relativos del tratamiento con funciones de pared para conductos lisos

problema sencillo, donde la capa límite se simula completamente desarrollada y libre de perturbaciones, se pudo obtener resultados de f razonables hasta $Re = 3000$, pero la discretización resultante en ese caso es de solo 2 celdas en el radio del conducto. Esta discretización sería del todo inaceptable si se pretendiera resolver la interacción de la capa límite con otras características de un escurrimiento más complejo. Por lo tanto, se concluye que en general existe un Re límite inferior de validez del tratamiento mediante funciones de pared logarítmica dictado por la discretización espacial resultante en la sección, el cual es más restrictivo que el impuesto por la propia existencia de una sub-capa viscosa.

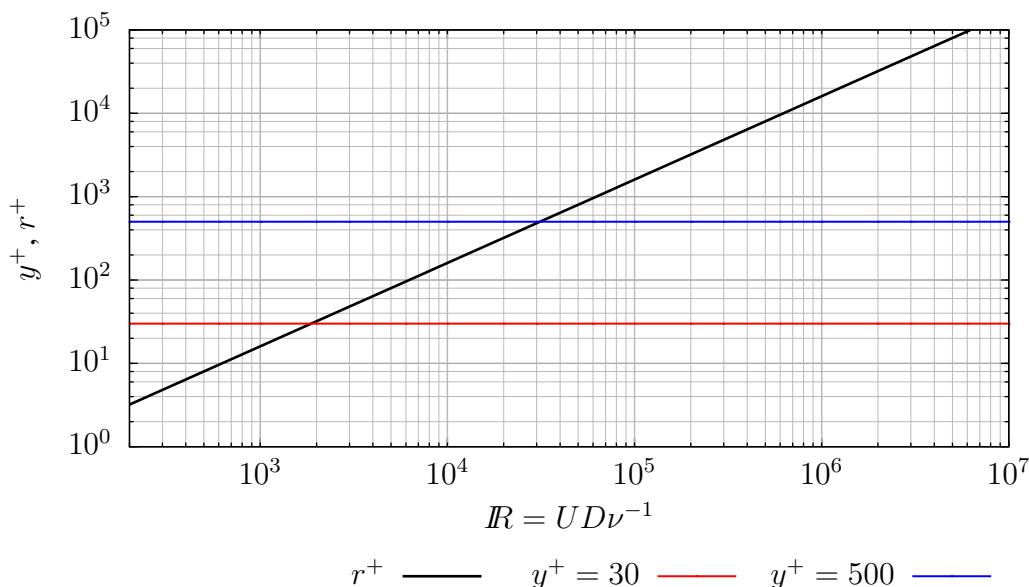


Figura 6: Radio del conducto adimensionalizado en función del número de Reynolds

Se ensayaron a continuación distintos casos con rugosidad uniforme, utilizando la función de pared de la ecuación (27) y adoptando rugosidades relativas K_s/D de entre 1×10^{-5} y 4×10^{-3} . Se simuló el mismo rango de números de Reynolds que en el caso de conducto liso, y se usó el método de [Launder y Spalding \(1974\)](#) para calcular la velocidad de corte.

En principio se adoptó un espesor adimensional para la primera celda de $y^+ = 30$ en todos los casos. No obstante, se comprobó que para cada determinada rugosidad, existe un Re suficientemente alto de manera que K_s^+ supera el espesor de la primera celda. Se observa a partir de ese umbral una disminución gradual de los valores simulados de f , que de acuerdo a los experimentos deberían permanecer virtualmente constantes. Por lo tanto, es necesario fijar como condición para obtener buenos resultados simultáneamente $30 \leq y^+ \leq 500$ e $y^+ \geq K_s^+$.

Realizando esas adaptaciones, se obtuvieron los resultados de f presentados en la figura 7, en la que se comparan con los publicados por [Idel'chik \(1966\)](#). Se encontró el mejor ajuste posible utilizando en la ley de pared un coeficiente de C_s de 0.37, algo menor al valor de 0.50 recomendado por [Cebeci y Bradshaw \(1977\)](#) para rugosidad uniforme. Por comparación se presentan en la figura 8 los resultados al usar el valor recomendado.

En el caso de $C_s = 0.37$ se observa un buen acuerdo entre los valores experimentales y los resultados simulados, especialmente en el régimen completamente rugoso, en el cual el valor de f se hace independiente del número de Reynolds. De entre los números de Reynolds simulados, se nota para los más bajos el mismo desfase de los resultados hacia menores valores de f respecto de los experimentados. En estos casos también se aplica el comentario realizado para

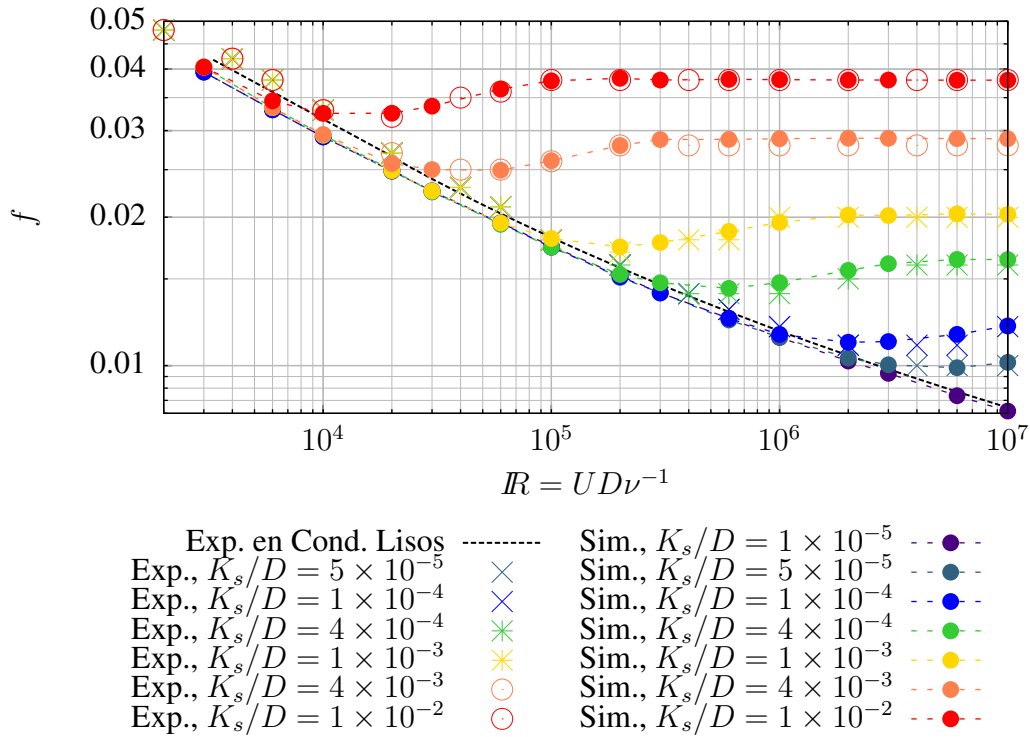


Figura 7: Tratamiento con funciones de pared comparado con datos experimentales para conductos rugosos - $C_s = 0.37$

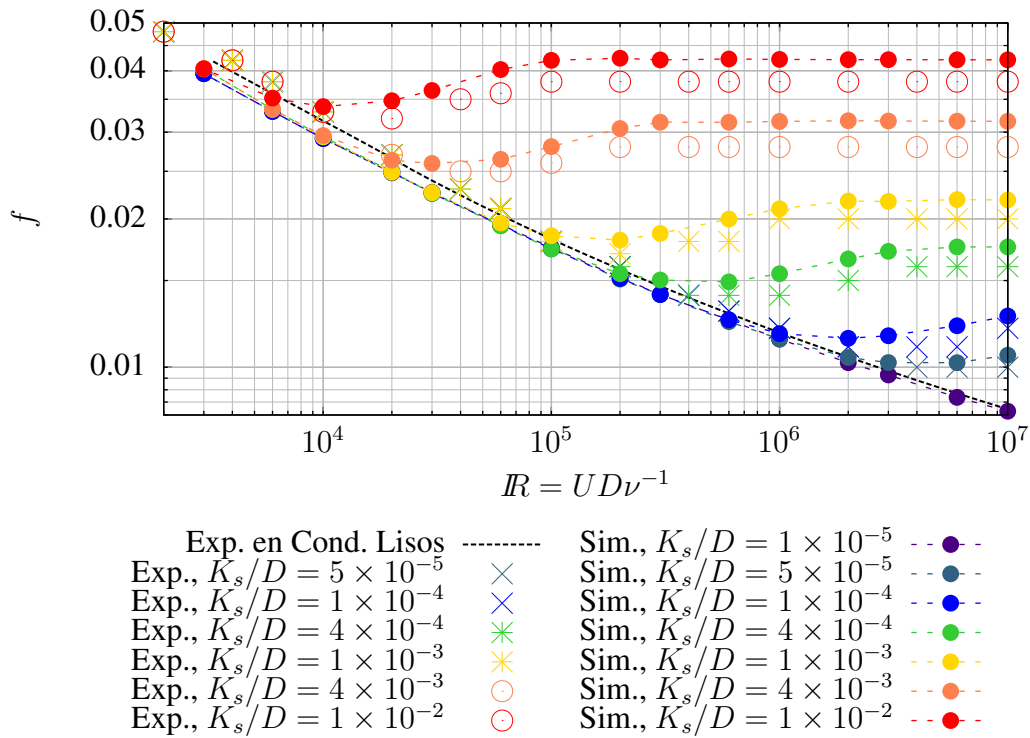


Figura 8: Tratamiento con funciones de pared comparado con datos experimentales para conductos rugosos - $C_s = 0.50$

conductos lisos, ya que en esos valores de Re la malla resulta excesivamente gruesa debido a la necesidad de mantener $y^+ = 30$.

Cabe destacarse que el buen acuerdo observado en este trabajo utilizando la función de pared rugosa de [Cebeci y Bradshaw \(1977\)](#) se limita por el momento a conductos de rugosidad uniforme. La mayor parte de las superficies poseen rugosidades no uniformes en tamaño que presentan visibles diferencias en el régimen de rugosidad transicional, como fue demostrado por [Colebrook y White \(1937\)](#).

4. CONCLUSIONES

Se analizaron en este trabajo dos tratamientos de pared para su utilización en conjunto con las ecuaciones RANS en condiciones de capa límite totalmente desarrollada en conductos circulares. Para cada uno de estos se evaluó el rango de escalas de aplicación, caracterizado por el número de Reynolds del escurrimiento. Esto se realizó como parte de un estudio en proceso para determinar la capacidad de distinguir confiablemente efectos de escala hidráulicos mediante CFD, lo que resulta de aplicación directa para complementar la modelación física de obras hidráulicas.

Las características de cada tratamiento se resumen en la tabla 1.

	Tratamiento de Bajo Número de Reynolds	Tratamiento mediante Funciones de Pared
Rango de escalas de aplicación	Cualquiera	$Re \geq 3 \times 10^4$
Distancia de la pared al primer centro de celda	$y^+ \leq 0,1$	$30 \leq y^+ \leq 500$, $y/R \leq 32$, $y^+ \geq K_s^+$
Requerimientos	<ul style="list-style-type: none"> · Modelo de turbulencia de Bajo Reynolds. · Pared hidráulicamente lisa. · Malla demandante a altos Re 	<ul style="list-style-type: none"> · Para pared rugosa, rugosidad uniforme
Viscosidad de torbellino en la pared	$\nu_{tw} = 0$	$\nu_{tw} = \nu \left(\frac{y^+}{u^+} - 1 \right)$
Condición de borde de k	$k \approx 0$	$\frac{\partial k}{\partial y} = 0$
Condición de borde de ϵ	$\epsilon \approx 0$	$\epsilon = \frac{u^{*3}}{\kappa y}$
Error relativo de f	$< 3,5 \%$	$< 5 \%$

Tabla 1: Resumen de los tratamientos de pared

En primer lugar se evaluó el tratamiento de Bajo Número de Reynolds. Este requiere colocar el primer nodo de cálculo dentro de la sub-capa viscosa, y discretizar toda la capa límite, con especial atención a la zona correspondiente a la sub-capa de transición. Este tratamiento puede resultar demandante computacionalmente, debido a la cantidad de elementos necesarios para representar correctamente la capa límite, sobre todo a números de Reynolds altos. No obstante, se ha mostrado robusto y fue capaz de simular correctamente un amplio rango de Re , incluido el régimen laminar y transicional, con errores en la predicción del factor de fricción inferiores a 3.5 %. Este tratamiento requiere utilizar un modelo de turbulencia capaz de simular condiciones de bajo número de Reynolds; se utilizó en este caso la variante $k-\epsilon$ de Launder–Sharma, que se

mostró robusta. Se verificó que si se adopta una malla suficientemente fina, es posible simular con precisión un amplio rango de escalas sin alterar la malla. En cuanto a las limitaciones de esta metodología, se identificó la incapacidad de utilizar este tipo de tratamiento en caso de la existencia de paredes hidráulicamente rugosas. De cualquier manera, el régimen hidráulico liso se presenta en la enorme mayoría de las obras hidráulica a escala de prototipo y es también usual en los materiales y regímenes existentes en modelos físicos a escala.

En segundo lugar se estudió el tratamiento de la capa límite a través de funciones de pared logarítmicas. En este caso, el primer nodo de cálculo debe ubicarse en la sub-capa inercial, lo que se mostró limita el rango de escalas de aplicación a aproximadamente números de Reynolds de conducto mayores a 3×10^4 . Para ese rango se observaron errores relativos en el factor de fricción menores al 5 %, utilizando mallas de cálculo mucho más reducidas. Se estudiaron en este caso condiciones de borde capaces de representar paredes hidráulicamente lisas, parcial y totalmente rugosas, pudiendo manejar sin problemas la transición entre estos regímenes sin modificaciones a priori. Cabe destacarse que esta familia de funciones de pared fueron desarrolladas para rugosidades uniformes, que no se dan de manera natural en los materiales de construcción. Si bien son capaces de representar rugosidades no uniformes en régimen completamente rugosos, adoptando una rugosidad uniforme equivalente, el régimen transicional presenta un perfil distintivo que no resulta correctamente representado.

Incluso dentro del marco de la modelación de la capa límite bajo RANS, quedan aún por explorar la capacidad de estos tratamientos ante distintos problemas de mayor complejidad, incluyendo casos de capas límites en desarrollo, bajo gradientes de presión más intensos y en geometrías donde se producen tensiones de Reynolds anisotrópicas, como en los conductos de sección rectangular.

REFERENCIAS

- Ackers P. Scale models. examples of how, why and when - with some ifs and buts. En *Proc. of Technical Session B, XXII IAHR Congress*. Lausanne, Switzerland, 1987.
- Anwar H., Weller J., y Amphlett M. Similarity of free-vortex at horizontal intake. *Journal of Hydraulic Research*, 16:95–105, 1978.
- Boussinesq J. Essai sur la théorie des eaux courantes. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, 23:1–680, 1877.
- Caretto L., Gosman A., Pantakar S., y Spalding D. Two calculation procedures for steady, three-dimensional flows with recirculation. Paris, 1972.
- Cebeci T. y Bradshaw P. *Momentum Transfer in Boundary Layers*. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1977.
- Chanson H. Turbulent air-water flows in hydraulic structures: Dynamic similarity and scale effects. *Environmental Fluid Mechanics*, 9:125–142, 2009.
- Chien K.Y. Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-reynolds-number turbulence model. *AIAA Journal*, 20:33–38, 1982.
- Colebrook C. y White C. Experiments with fluid friction in roughened pipes. 161, páginas 367–381. 1937.
- Ferziger J. y Peric M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, tercera edición, 2002.
- Hager W. Breitenkroniger Überfall (vertederos de cresta ancha). *Wasser Energie Luft*, 86:363–369, 1994.
- Hager W. y Bremen R. Classical hydraulic jump: Sequent depths. *Journal of Hydraulic Research*, 27:565–585, 1989.

- Heller V. Scale effects in physical hydraulic engineering models. *Journal of Hydraulic Research*, 49:293–306, 2011.
- Heller V., Hager W., y Minor H. Ski jump hydraulics. *Journal of Hydraulic Engineering ASCE*, 131:347–355, 2005.
- Idel'chik I. *Handbook of Hydraulic Resistance (Traducido del ruso)*. Israel Program for Scientific Translations, 1966.
- Jasak H. *Error Analysis and Estimation for Finite Volume Method with Applications to Fluids Flow*. Tesis de Doctorado, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, 1996.
- Jones W. y Launder B. The calculation of low-reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 16:1119–1130, 1973.
- Klebanoff P. Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. *NACA Tech. Note 3158*, 1954.
- Kobus H., editor. *Proc. of the Symposium on scale effects in modelling hydraulic structures*. IAHR, Esslingen, Germany, 1984.
- Lam C. y Bremhorst K. Modified form of the k-epsilon-model for predicting wall turbulence. *Journal of Fluids Engineering*, 103:456–460, 1981.
- Launder B. y Sharma B. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in Heat and Mass Transfer*, 1:131–138, 1974.
- Launder B. y Spalding D. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3:537–566, 1974.
- Le Méhauté B. y Hanes D. *Ocean engineering science, the sea. B.*, capítulo 29, Similitude, páginas 955–980. Wiley, New York, 1990.
- Menéndez A. y Badano N. Interaction between hydraulic and numerical models for the design of hydraulic structures. 2011.
- Menéndez A., Badano N., y Lecertua E. A strategy for the interaction between hydraulic and numerical models. Chengdu, China, 2013.
- Nikuradse J. Laws of flow in rough pipes. *NACA Tech. Memo 1292*, 1950. Traducción de “Strömungsgesetze in rauhen rohren.” *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, 1933.
- Patel V. y Head M. Some observations on skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 38:181–201, 1969.
- Patel V., Rodi W., y Scheuerer G. Turbulence models for near-wall and low reynolds number flows. *AIAA Journal*, 23:1308–1319, 1985.
- Pope S. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- Rayleigh L. The principle of similitude. *Nature*, 95:181–196, 1915.
- Rhie C. y Chow W. A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal*, 21:1525–1532, 1983.
- Rouse H. *Elementary Mechanics of Fluids*. John Wiley & Sons, third edición, 1946.
- Tennekes H. y Lumley J. *A first course in turbulence*. The MIT Press, 1972.
- Versteeg H. y Malalasekera W. *An introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite volume method*. Longman Scientific & Technical, first edición, 1995.
- von Kármán T. Mechanische Ähnlichkeit und turbulenz. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Fachgruppe I (Mathematik)*, 5:58–76, 1930.
- Weller H., Tabor G., Jasak H., y Fureby C. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object orientated techniques. *Computers in Physics*, 12:620–631, 1998.
- Yalin M. *Theory of hydraulic models*. Macmillan, London, 1971.