

AMORTIGUAMIENTO VISCOZO EN UN MICRORESONADOR EN FLUJO REPTANTE SIMULADO CON ELEMENTOS DE BORDE

Sofía Sarraf^{a,b}, Ezequiel López^{a,b}, Laura Battaglia^{b,c}, Gustavo Ríos Rodríguez^b y Jorge D'Elía^b

^aDepartamento de Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue, CONICET, Buenos Aires 1400, Neuquén (Q8300IBX), Argentina
e-mail: (ssarraff, ezequiel.jose.lopez)@gmail.com

^b Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC)
Universidad Nacional del Litoral (UNL) - CONICET
Predio Conicet-Santa Fe, Colectora Ruta Nac 168 / Paraje El Pozo, Santa Fe (S3000GLN), Argentina
e-mail: gusadrr@yahoo.com.ar, jdelia@intec.unl.edu.ar, web page: <http://www.cimec.org.ar>

^c Grupo de Investigación en Métodos Numéricos en Ingeniería (GIMNI)
Universidad Tecnológica Nacional (UTN), Facultad Regional Santa Fe (FRSF)
Lavaysse 610, Santa Fe (S3000GLN), Argentina
e-mail: lbattaglia@santafe-conicet.gob.ar

Palabras Clave: amortiguamiento viscoso, flujo reptante oscilatorio, flujo tridimensional, sistema micro-electromecánico (MEMS), método de elementos de borde, ponderación de Galerkin.

Resumen. En trabajos anteriores (e.g. Sarraf *et al.*, “Simulación del flujo reptante exterior a un toro tridimensional mediante el método de elementos de borde”, Mecánica Computacional, vol. XXXI, 2012), se ha considerado el método de elementos de borde (BEM, por *Boundary Element Method*) aplicado a la resolución del flujo reptante (de Stokes) alrededor de cuerpos rígidos tridimensionales. Tal tipo de flujo es modelado mediante una ecuación integral de borde (BIE, por *Boundary Integral Equation*) en la alternativa CIV (*Completed Indirect Velocity*), la cual es de tipo indirecta y de segunda clase, y cuyo término fuente es función de la velocidad no perturbada. Para resolver la BIE resultante se emplearon tanto la técnica de colocación al centroide de los elementos, como el método de ponderación de Galerkin (GBEM, por Galerkin BEM) en una generalización del esquema propuesto por Taylor (D. J. Taylor, IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 51(7):1630–1637 (2003)) para el cómputo de las integrales cuádruples de interacción con una singularidad débil. En este trabajo se adapta dicho esquema numérico para una estimación de la fuerza de amortiguamiento en micro-resonadores, combinando el campo de tracciones obtenido por BEM/GBEM y las deformaciones modales predichas por la teoría clásica de vigas oscilantes, problema de interés en sistemas micro-electromecánicos (MEMS, por *micro-electro-mechanical system*). La adaptación se valida en geometrías con soluciones numéricas tomadas de la literatura.

1. INTRODUCCION

Un sistema micro-electromecánico (o MEMS, por *micro-electro-mechanical system*) consiste de una micro-estructura fija o móvil, denominada micro-resonador, ubicada dentro de un actuador o sensor de muy pequeñas dimensiones. Los MEMS son ampliamente utilizados en sensores biológicos o químicos, en donde la resolución del sensor resulta muy influenciada por la disipación de energía ocasionada por el amortiguamiento viscoso (Magrab, 2012). Los dispositivos MEMS más usuales consisten en arreglos de vigas o de placas, cuyos espesores y anchos son $O(1)$ a $O(10)$ μm mientras que sus longitudes son $O(10)$ a $O(1000)$ μm . El movimiento o la deformación en un dispositivo MEMS puede ser inducida mediante fuentes de energía de diversa naturaleza, por ejemplo, mecánica, eléctrica, térmica, acústica o fotónica, entre otras. Las fuerzas de arrastre viscosas inducidas por la vibración del micro-resonador producen un amortiguamiento que afecta su dinámica. En ciertos casos los micro-resonadores oscilan rígidamente y en otros lo hacen en sus formas deformadas.

Por otra parte, el modelado de estos dispositivos puede encararse con diversos métodos numéricos. En particular, el método de elementos de borde (BEM, por *Boundary Element Method*) es una opción en el análisis de amortiguación, en donde al campo de flujo frecuentemente se lo asume como no-acotado mientras que las formas geométricas de los dispositivos suelen ser intrincadas, por ejemplo, micro-placas perforadas con muchos agujeros con la intención de reducir el amortiguamiento viscoso del aire. Como es conocido, el BEM se basa en la formulación de un problema de valores de borde de tipo elíptico, como una ecuación integral de contorno o de borde (BIE, por *Boundary Integral Equation*), e.g. ver Sauter y Schwab (2011). En trabajos previos (Sarraf et al., 2013, 2012) se ha aplicado el BEM en la simulación numérica del flujo de Stokes alrededor de cuerpos rígidos tridimensionales. Tal tipo de problema fue modelado mediante una BIE en velocidades con operador integral completado (o CIV, por *Completed Indirect Velocity*). La CIV-BIE es de tipo indirecta y de segunda clase, y utiliza simultáneamente las densidades de doble y simple capa, mientras que su término fuente está determinado a partir de la velocidad del flujo no-perturbado. Esta ecuación fue resuelta numéricamente en dos variantes: mediante una técnica de colocación al centroide de los elementos (referido como BEM por simplicidad), y con una ponderación de Galerkin (GBEM, por Galerkin BEM), ambas descritas con mayor detalle en Sarraf et al. (2014); D'Elia et al. (2011, 2014).

En este trabajo se modela numéricamente el flujo reptante mediante la formulación CIV-BIE en ambas variantes, BEM y GBEM, y a continuación se estima la fuerza de amortiguación y el factor de calidad del micro-resonador a partir del mapa de las tracciones de superficie. Como caso de validación se considera una micro-viga empotrada en voladizo vibrando armónicamente en su primer modo natural.

2. REVISION DE LA FORMULACION CIV-BIE

La formulación CIV-BIE no es otra cosa que la Formulación Integral (FI) de Power-Miranda / Hebeker. La misma consiste en una BIE sin modos rígidos para el flujo de Stokes exterior a una superficie A cerrada, rígida y suave a trozos en \mathbb{R}^3 , e.g. ver Power y Miranda (1987), o Hebeker (1986), y que puede escribirse como

$$\int_A \left[\tilde{K}_{ij} \psi_j(\mathbf{x}) - \tilde{H}_{ij} \psi_j(\mathbf{y}) \right] dA_{\mathbf{y}} = u_i(\mathbf{x}) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in A; \quad (1)$$

donde $\psi_j(\mathbf{x})$ es la densidad superficial de doble capa y $u_i(\mathbf{x})$ es la velocidad del flujo sin perturbar, mientras que \mathbf{y} y \mathbf{x} son los puntos de integración y campo, respectivamente. El núcleo

de doble capa $\tilde{K}_{ij} = \tilde{K}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ está dado por (e.g. ver [Ladyzhenskaya \(1969\)](#))

$$\tilde{K}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{3}{4\pi} \frac{r_i r_j r_k}{r^5} n_k(\mathbf{y}) \quad \text{con } \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}, \text{ y } r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2; \quad (2)$$

donde $n_k = n_k(\mathbf{y})$ es el versor normal a la superficie en el punto \mathbf{y} y $\|\cdot\|_2$ es la norma Euclídea para vectores. Para superficies suaves, este núcleo verifica la propiedad (e.g. [Kim y Karrila \(1991\)](#))

$$\int_A \tilde{K}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA_{\mathbf{y}} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad \text{para } \mathbf{x} \in A; \quad (3)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Por otra parte, el núcleo $\tilde{H}_{ij} = \tilde{H}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es la suma

$$\tilde{H}_{ij} = \tilde{K}_{ij} + \tilde{S}_{ij}; \quad (4)$$

donde $\tilde{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es el núcleo de simple capa dado por ([Hebeker, 1986](#))

$$\tilde{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\chi_H}{8\pi\mu} \left[\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{r_i r_j}{r^3} \right]; \quad (5)$$

donde μ es la viscosidad dinámica del fluido, mientras que χ_H es un parámetro positivo arbitrario introducido por Hebeker para acoplar la densidad de capa simple ϕ con la densidad de capa doble ψ en la forma

$$\phi(\mathbf{x}) = \chi_H \psi(\mathbf{x}) \quad (6)$$

Este acoplamiento permite eliminar los seis modos rígidos que tiene la BIE clásica, tres rotaciones y tres traslaciones, a través de la introducción *ad-hoc* del núcleo $\tilde{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y, además, da cuenta de la fuerza y el torque globales sobre la superficie cerrada ([Kim y Karrila, 1991](#); [Power y Wrobel, 1995](#)). Por otra parte, el parámetro χ_H también tiene en cuenta el hecho de que las unidades físicas son diferentes, i.e. ϕ representa una densidad superficial de fuerza, con unidades de una presión, mientras que ψ es una densidad superficial de velocidad, con unidades de velocidad por unidad de área. En el análisis de Hebeker se concluye que $\chi_H = 1 \text{ kg/s}$ es una buena elección, y que será adoptado también en este trabajo. Dado que el lado derecho de la Ec. (1) es dato, este caso también se reduce a una BIE de Fredholm de segunda clase para $\psi_j(\mathbf{x})$, y puede reescribirse como

$$g_i(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x})$$

donde

$$g_i(\mathbf{x}) = \int_A \left[\tilde{K}_{ij} \psi_j(\mathbf{x}) - \tilde{H}_{ij} \psi_j(\mathbf{y}) \right] dA_{\mathbf{y}} \quad (7)$$

para todo $\mathbf{x} \in A$.

3. FORMULACION NUMERICA

Se resumen dos formulaciones numéricas para resolver la Ec. (1). Primero se emplea una técnica de colocación, y a continuación el método de ponderación de Galerkin. Ambas técnicas usan un doble lazo anidado sobre los elementos $p, q = 1, 2, \dots, E$, donde E es el número de paneles o elementos de la malla BEM, y los puntos \mathbf{x}, \mathbf{y} están vinculados a los elementos p, q , respectivamente, ver Fig. 1. Los valores por elemento y nodales son denotados con supra- y sub-índices, respectivamente.

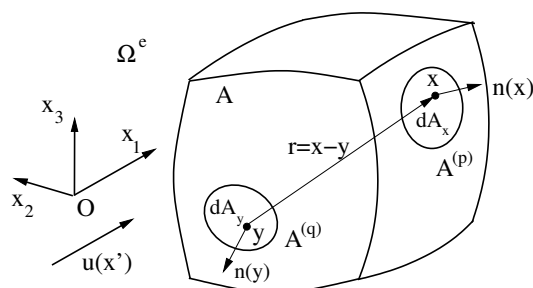


Figura 1: Una superficie cerrada y suave por partes A con un dominio exterior Ω^e : punto de observación \mathbf{x} , punto fuente \mathbf{y} , posición relativa $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, vectores $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, $\mathbf{n}(\mathbf{y})$, y las áreas diferenciales $dA_{\mathbf{x}}$, $dA_{\mathbf{y}}$.

3.1. Colocación usando aproximaciones constantes por elemento

Asumiendo que las densidades de simple y doble capa son constantes en cada elemento, pueden extraerse de las integrales de superficie y, usando una técnica de colocación estándar, en cada caso resulta un Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL), que es regular y bien condicionado (Hackbusch, 1995). Se tiene entonces el SEL dado por

$$\sum_{q=1}^E \left[\int_{A^{(q)}} dA_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{K}}^{(p,q)} \boldsymbol{\psi}^{(p)} - \int_{A^{(q)}} dA_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{H}}^{(p,q)} \boldsymbol{\psi}^{(q)} \right] = \mathbf{u}^{(p)}, \quad p = 1, 2, \dots, E \quad (8)$$

donde las matrices elementales $\tilde{\mathbf{H}}^{(p,q)} = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}^{(p)}, \mathbf{y}^{(q)})$ y $\tilde{\mathbf{K}}^{(p,q)} = \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{x}^{(p)}, \mathbf{y}^{(q)})$, así como los vectores $\mathbf{u}^{(p)} = \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(p)})$ y $\boldsymbol{\psi}^{(p)} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}^{(p)})$, son evaluados en los centroides de los elementos $\mathbf{x}^{(p)}$. Reordenando

$$(\mathbf{F} - \mathbf{S})\boldsymbol{\psi} = \mathbf{u} \quad (9)$$

con $\boldsymbol{\psi}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{3E \times 1}$ y $\mathbf{F}, \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3E \times 3E}$, siendo las matrices globales $\mathbf{F} = [\mathbf{F}^{(p,q)}]$ y $\mathbf{S} = [\mathbf{S}^{(p,q)}]$, mientras que los vectores globales son $\boldsymbol{\psi} = [\boldsymbol{\psi}^{(p)}]$ y $\mathbf{u} = [\mathbf{u}^{(p)}]$. Luego de manipular algebraicamente, la matriz \mathbf{F} puede escribirse como

$$\mathbf{F}^{(p,q)} = \begin{cases} \sum_{e=1, e \neq p}^E \mathbf{K}^{(p,e)} & \text{si } q = p \\ -\mathbf{K}^{(p,q)} & \text{si } q \neq p \end{cases} \quad (10)$$

y $\mathbf{S}^{(p,q)} = \mathbf{S}(\mathbf{x}^{(p)}, \mathbf{y}^{(q)})$, donde las matrices elementales se definen como

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(p,q)} &= \int_{A^{(q)}} \tilde{\mathbf{K}}^{(p,q)} dA_{\mathbf{y}} \\ \mathbf{S}^{(p,q)} &= \int_{A^{(q)}} \tilde{\mathbf{S}}^{(p,q)} dA_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (11)$$

3.2. Ponderación de Galerkin usando elementos lineales

La técnica estándar de ponderación de Galerkin utiliza las funciones de forma $\mathbf{N}^{(p)}(\mathbf{x})$ para minimizar el error a través de las condiciones de ortogonalidad sobre las BIE dadas por la Ec. (7) cuando se las aproxima a nivel discreto. En lo que sigue, la numeración global de los nodos de los triángulos p y q será denotada con i, j, k y r, s, t , respectivamente, ver Fig. 2. Las funciones

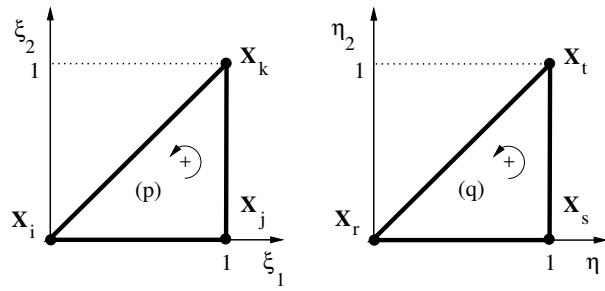


Figura 2: Triángulos *master* p y q para las coordenadas símplices.

de forma elementales $\mathbf{N}^{(p,q)}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{3 \times 9}$ están dadas por los vectores fila (por bloques)

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{(p)}(\mathbf{x}) &= \left[\mathbf{N}_i^{(p)}(\mathbf{x}) \ \mathbf{N}_j^{(p)}(\mathbf{x}) \ \mathbf{N}_k^{(p)}(\mathbf{x}) \right] \\ \mathbf{N}^{(q)}(\mathbf{x}) &= \left[\mathbf{N}_r^{(q)}(\mathbf{x}) \ \mathbf{N}_s^{(q)}(\mathbf{x}) \ \mathbf{N}_t^{(q)}(\mathbf{x}) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

donde se asume que las funciones de forma varían linealmente en cada elemento de la malla.

La técnica estándar de Galerkin aplicada a la Ec. (7) conduce, luego de operar algebraicamente, al SEL

$$\sum_{p=1}^E \sum_{q=1}^E [\mathcal{I}^{(p,q)} \boldsymbol{\psi}^{(p)} - \mathcal{J}^{(p,q)} \boldsymbol{\psi}^{(q)}] = \sum_{p=1}^E \mathcal{M}^{(p)} \mathbf{u}^{(p)} \quad (13)$$

en donde se emplean las notaciones

$$\mathcal{I}^{(p,q)} = \int_{A^{(p)}} dA_{\mathbf{x}} \int_{A^{(q)}} dA_{\mathbf{y}} [\mathbf{N}^{(p)T}(\mathbf{x}) \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{N}^{(p)}(\mathbf{x})] \quad (14)$$

y

$$\mathcal{J}^{(p,q)} = \int_{A^{(p)}} dA_{\mathbf{x}} \int_{A^{(q)}} dA_{\mathbf{y}} [\mathbf{N}^{(p)T}(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{N}^{(q)}(\mathbf{y})] \quad (15)$$

para las matrices elementales, mientras que el vector fuente elemental está dado por

$$\mathcal{M}^{(p)} \mathbf{u}^{(p)} = \int_{A^{(p)}} dA_{\mathbf{x}} [\mathbf{N}^{(p)T}(\mathbf{x}) \mathbf{N}^{(p)}(\mathbf{x})] \mathbf{U}^{(p)} \quad (16)$$

Los vectores elementales del campo solución en la Ec. (13) son los siguientes

$$\boldsymbol{\psi}^{(p)} = \begin{bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{9 \times 1} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\psi}^{(q)} = \begin{bmatrix} \psi_r \\ \psi_s \\ \psi_t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{9 \times 1} \quad (17)$$

con

$$\boldsymbol{\psi}_m = \begin{bmatrix} \psi_{3m-2} \\ \psi_{3m-1} \\ \psi_{3m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \quad (18)$$

mientras que el vector fuente elemental es

$$\mathbf{U}^{(p)} = \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{9 \times 1} \quad \text{con} \quad \mathbf{U}_m = \begin{bmatrix} U_{3m-2} \\ U_{3m-1} \\ U_{3m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \quad (19)$$

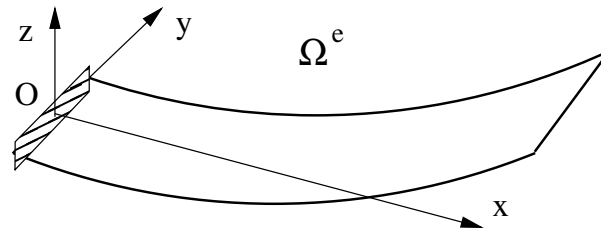


Figura 3: Esquema de un micro-resonador en la forma de una micro-viga empotrada en el extremo izquierdo y libre en el extremo derecho, vibrando en su primer modo natural. Las dimensiones de la micro-viga son: longitud $L = L_x = 600 \mu\text{m}$, ancho $B = L_y = 200 \mu\text{m}$, y altura $H = L_z = 5 \mu\text{m}$.

4. DESCRIPCION DEL MICRO-RESONADOR

Se asume que el flujo inducido alrededor de un micro-resonador que vibra en un medio fluido está gobernado por la ecuación de Stokes, la cual describe el flujo reptante de un fluido viscoso e incompresible (Mukherjee et al., 2005; Wang, 2002), y que surge de las siguientes suposiciones simplificadoras (ver e.g. Fachinotti et al., 2007):

- La frecuencia y amplitud de vibración son lo suficientemente bajas como para que las fuerzas de inercia sean mucho menores que las fuerzas viscosas;
- El fluido alrededor del micro-resonador es un medio continuo e incompresible;
- El fluido alrededor del micro-resonador es no-acotado.

4.1. Dimensiones y parámetros

En particular, se considera el caso de un micro-resonador de silicio policristalino (polisilicio), en una configuración de una micro-viga sólida en voladizo vibrando en aire en su primer modo natural, y se seguirá la presentación dada en Xiao y Ye (2011). Las dimensiones de la micro-viga son: longitud $L = L_x = 600 \mu\text{m}$, ancho $B = L_y = 200 \mu\text{m}$, y altura $H = L_z = 5 \mu\text{m}$, ver esquema mostrado en la Fig. 3. El módulo de elasticidad y la densidad del polisilicio son $\tilde{E} = 150 \text{ GPa}$ y $\rho = 2.33 \times 10^{-15} \text{ kg}/\mu\text{m}^3$, respectivamente. La micro-viga está empotrada en su extremo izquierdo $x = 0$, y libre en su extremo derecho $x = L_x$. La amplitud máxima de la vibración armónica es de $\tilde{A} = 1 \mu\text{m}$ y se produce en el extremo libre. La viscosidad dinámica del aire es de $\mu = 1.86 \times 10^{-11} \text{ kg}/(\mu\text{m s})$. Mediante el empleo de la teoría clásica de vigas se encuentra que la frecuencia del primer modo de vibración es de $f = 18\,000 \text{ Hz}$, y la forma está dada por (e.g. ver Xiao y Ye, 2011)

$$Z_0(x) = \frac{1}{2} [\cosh(\lambda x) - \cos(\lambda x) + \xi(\sinh(\lambda x) - \sin(\lambda x))] \quad (20)$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda L &= 1.875 \\ \xi &= \frac{\sin(\lambda L) - \sinh(\lambda L)}{\cos(\lambda L) - \cosh(\lambda L)} \end{aligned} \quad (21)$$

Como la amplitud máxima \tilde{A} es relativamente pequeña con respecto a la longitud de la micro-viga, las velocidades en las direcciones longitudinal U_x y a lo ancho U_y son despreciables, por lo que la velocidad impuesta como condición de borde tanto en BEM como en GBEM es $\mathbf{U} = (0, 0, -\omega \tilde{A} Z_0(x))$, donde $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia circular.

4.2. Factor de calidad

El factor de calidad Q es una medida de la tasa de disipación de la energía en un dispositivo vibrante, y es definido como el cociente de la energía total de entrada E_T dividido por la energía disipada E_D en un ciclo de oscilación (Magrab, 2012). En el caso de una viga en voladizo resonante, se asume que la deflexión y la velocidad están dadas por

$$\begin{aligned} Z(x, t) &= \tilde{A}Z_0 \cos(\omega t) \\ U_z(x, t) &= \dot{Z}(x, t) = -\omega\tilde{A}Z_0 \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (22)$$

mientras que la energía total de entrada E_T está dada por

$$\begin{aligned} E_T &= \frac{1}{2} \int_M U_z^2 dM = \frac{1}{2} \rho B H \int_0^L U_z^2(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \rho B H \tilde{A}^2 \omega^2 \int_0^L Z_0^2(x) dx = \frac{1}{8} M \tilde{A}^2 \omega^2 \end{aligned} \quad (23)$$

donde $M = \rho B H L$ es la masa de la micro-viga. Tomando en cuenta únicamente el amortiguamiento viscoso, la energía disipada E_D es igual al trabajo realizado por la fuerza viscosa ejercida por el fluido por ciclo de oscilación τ . Debido a la linealidad de las ecuaciones de Stokes, la densidad lineal de la fuerza de tracción $T(x, y, z, t)$, medida en $[N/\mu m]$, al tiempo t , esta dada por

$$T(x, y, z, t) = \mu\omega\tilde{A}T_0(x, y, z) \sin(\omega t) \quad (24)$$

donde $T_0(x, y, z)$ es la tracción para una velocidad U_z y viscosidad dinámica del fluido unitarias, y que se mide en $[1/\mu m]$. Por otra parte, la energía disipada E_D se calcula con

$$\begin{aligned} E_D &= - \int_A dA_{\mathbf{y}} \int_0^\tau (T(x, y, z, t)) (\dot{Z}(x, t)) dt \\ &= \mu\omega^2 \tilde{A} \int_A T_0(x, y, z) Z_0(x) dA_{\mathbf{y}} \int_0^\tau \sin^2(\omega t) dt \\ &= \pi\mu\omega\tilde{A}^2 L_0 \end{aligned} \quad (25)$$

donde

$$L_0 = \int_A T_0(x, y, z) Z_0(x) dA_{\mathbf{y}} \quad (26)$$

es el trabajo realizado por la tracción $T_0(x, y, z)$ sobre el primer modo normalizado $Z_0(x)$, por unidad de viscosidad dinámica y por unidad de frecuencia, y tiene las dimensiones de una longitud. Esta magnitud L_0 representa una longitud característica de la viga, se mide en μm , y depende únicamente de sus dimensiones y modo de vibración. Teniendo en cuenta las Ecs. (23) y (25), el factor de calidad Q se calcula según

$$Q = 2\pi \frac{E_T}{E_D} = \frac{M\omega}{4\mu L_0} \quad (27)$$

En definitiva, para determinar el factor de calidad Q se puede emplear la Ec. (27), para lo cual hay que calcular la masa M de la viga y la longitud característica L_0 , donde L_0 se obtiene mediante la Ec. (26), con T_0 obtenido por BEM/GBEM.

4.3. Discretización con BEM/GBEM y resultados

A los efectos de realizar un análisis de convergencia en malla, se emplearon tres mallas de elementos de borde que discretizan únicamente la superficie de la micro-viga, cada una conformada con triángulos simples. En el presente análisis linealizado, la geometría de la micro-viga se reduce a su forma indeformada, o sea, un paralelepípedo recto rectangular de dimensiones L_x, L_y, L_z . En la Tabla 1 se resumen los valores de los números de elementos e_x, e_y, e_z en cada dirección coordenada y en cada superficie de la micro-viga, el número total de elementos E y de nodos N , y el número total de grados de libertad M usando BEM y GBEM, donde $M = 3E$ para BEM, y $M = 3N$ para GBEM.

mall	e_x	e_y	e_z	E	N	M (BEM)	M (GBEM)
1	15	10	2	800	514	2400	1542
2	30	10	2	1520	762	4560	2286
3	60	20	2	5440	2722	16320	8166

Tabla 1: Número de elementos e_x, e_y, e_z en cada dirección coordenada y en cada superficie de la micro-viga, número total de elementos E y de nodos N , y número total de grados de libertad M usando BEM y GBEM, donde $M = 3E$ para BEM, y $M = 3N$ para GBEM.

Las fuerzas de amortiguación obtenidas en cada caso son resumidas en la Tabla 2. Como una comparación con valores de literatura, en Xiao y Ye (2011) obtuvieron un valor promedio de $\langle F \rangle \approx 1.4697$ nN en las mallas más refinadas empleando un método de wavelet-BEM. Debe aclararse que en el trabajo de Xiao y Ye (2011), debido a la técnica numérica que utilizan, las mallas más refinadas poseen alrededor de 360000 elementos.

mall	Fuerza (BEM) [nN]	Fuerza (GBEM) [nN]
1	1.1530	1.0458
2	1.2797	1.2753
3	1.3036	1.3000

Tabla 2: Fuerzas de amortiguación en nN estimadas usando BEM y GBEM.

Por último, los factores de calidad Q obtenidos en cada caso están resumidos en la Tabla 3, mientras que en Xiao y Ye (2011) obtuvieron un valor promedio de $\langle Q \rangle \approx 1710$ en las mallas más refinadas.

mall	Q (BEM)	Q (GBEM)
1	1849.42	2112.14
2	1678.70	1780.96
3	1648.77	1666.06

Tabla 3: Factores de calidad Q en la micro-viga en voladizo estimados usando BEM y GBEM.

Comparando los resultados obtenidos con ambos métodos, se observa que en general BEM presenta menores errores que GBEM para las mallas más gruesas. Con la malla más fina utilizada, los errores son muy similares entre ambos métodos. No obstante, debe considerarse que el número de grados de libertad para GBEM es aproximadamente la mitad que para BEM (ver Tabla 1), lo cual permitiría utilizar mallas más refinadas con GBEM en busca de reducir los errores.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha modelado numéricamente el flujo de Stokes alrededor de un micro-resonador tridimensional, y se calcularon la fuerza de amortiguación y el factor de calidad correspondiente. Se ha supuesto que la vibración del micro-resonador origina a su alrededor un flujo reptante oscilatorio tridimensional y no-acotado, el cual ha sido modelado mediante una CIV-BIE (*Completed Indirect Velocity-Boundary Integral Equation*). La solución numérica de la BIE fue obtenida con dos métodos numéricos: (i) una técnica de colocación al centroide de los elementos (BEM); y (ii) un método de ponderación de Galerkin (GBEM). A través de la fuerza de amortiguamiento obtenida a partir de BEM-GBEM, y del valor de la energía provista por ciclo de oscilación se estimaron, mediante un análisis modal restringido al primer modo, la energía de disipación y el factor de calidad. Como caso de validación se ha considerado un micro-resonador sólido de polisilicio de $600 \mu\text{m}$ de longitud, en la forma de una micro-viga en voladizo que oscila armónicamente en su primer modo de vibración natural, encontrándose con la malla más refinada una discrepancia en la fuerza de amortiguamiento del orden del 11.3 % con BEM y del 11.6 % con GBEM, y una discrepancia en el factor de calidad del orden del 3.6 % con BEM y del 2.6 % con GBEM; siendo ambas cantidades comparadas con los resultados presentados en Xiao y Ye (2011). Como trabajo a futuro se prevé considerar otros tipos de microresonadores tales como el caso de placas perforadas y empotradas en ambos extremos, configuración de uso frecuente en diversos sensores biológicos o químicos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET, Argentina, proyecto PIP 112 20111 00978), Universidad Nacional del Litoral (UNL, Argentina, proyecto CAI+D 2009–III-4–2), Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT, Argentina, proyecto PICT 2492–10), y ha sido parcialmente realizado con los recursos del *Free Software Foundation/GNU-Project*, tales como GNU–Linux–OS, GNU–GFortran, GNU–Octave, GNU–Git, GNU–Doxygen, y GNU–GIMP, así como otros recursos de código abierto, tales como Xfig, L^AT_EX, PGF, TikZ, y PGFPlots.

REFERENCIAS

- D'Elía J., Battaglia L., Cardona A., y Storti M. Full numerical quadrature of weakly singular double surface integrals in Galerkin boundary element methods. **International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering**, 27(2):314–334, 2011.
- D'Elía J., Battaglia L., Cardona A., Storti M., y Ríos Rodríguez G. Galerkin boundary elements for a computation of the surface tractions in exterior Stokes flows. **Journal of Fluids Engineering- Trans ASME**, 2014. To appear.
- Fachinotti V., Cardona A., D'Elía J., y Paquay S. BEM for the analysis of fluid flow around MEMS. En S.A. Elaskar, E.A. Pilotta, y G.A. Torres, editores, *Mecánica Computacional*, vol. XXIV, páginas 1104–1119. Asociación Argentina de Mecánica Computacional (AMCA), Córdoba, Argentina, 2007.
- Hackbusch W. *Integral equations*. Birkhäuser, 1995.
- Hebeker F.K. Efficient boundary element methods for three-dimensional exterior viscous flow. *Num. Meth. PDE*, 2(4):273–297, 1986.
- Kim S. y Karrila S.J. *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications*. Butterworth-Heinemann, 1991.
- Ladyzhenskaya O.A. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon and

- Breach Science Publishers, 2 edición, 1969.
- Magrab E.B. *Vibration of Elastic Systems with applications to MEMS and NEMS*. Springer, 2012.
- Mukherjee S., Telukunta S., y Mukherjee Y.X. BEM modeling of damping forces on MEMS with thin plates. *Eng. Anal. with Boundary Elements*, 29:1000–1007, 2005.
- Power H. y Miranda G. Second kind integral equation formulation of Stokes flows past a particle of arbitrary shape. *SIAM J. Appl. Math.*, 47(4):689–698, 1987.
- Power H. y Wrobel L.C. *Boundary Integral Methods in Fluid Mechanics*. Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1995.
- Sarraf S., López E., Ríos Rodríguez G., Battaglia L., y D'Elía J. Implementación eficiente de una estrategia de elementos de borde por ponderación de Galerkin. En C.G. Garino, A. Mirasso, y M. Storti, editores, *Mecánica Computacional*, volumen XXXII, páginas 1379–1388. 2013.
- Sarraf S., López E., Ríos Rodríguez G., y D'Elía J. Simulación del flujo reptante exterior a un toro tridimensional mediante el método de elementos de borde. En A. Cardona, P.H. Kohan, R.D. Quinteros, y M.A. Storti, editores, *Mecánica Computacional*, vol. XXXI, páginas 321–332. Salta, Argentina, 2012.
- Sarraf S., López E., Ríos Rodríguez G., y D'Elía J. Validation of a Galerkin technique on a boundary integral equation for creeping flow around a torus. **Computational and Applied Mathematics**, 33(1):63–80, 2014.
- Sauter S.A. y Schwab C. *Boundary element methods*. Springer, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- Wang X. *Fast Stokes: a Fast 3-D Fluid Simulation Program for Micro-Electro-Mechanical Systems*. Tesis de Doctorado, MIT, 2002.
- Xiao J. y Ye W. Wavelet BEM for large-scale Stokes flows based on the direct integral formulation. *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, 88(7):693–714, 2011.