

IMPLEMENTACIÓN DE LA TEORÍA REFINADA DE ZIGZAG EN ELEMENTOS DE LÁMINA CON GRANDES DESPLAZAMIENTOS Y ROTACIONES

Fernando G. Flores^a

^a*Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916,
5000 Córdoba-Argentina, y CONICET, fflores@efn.uncor.edu, <http://www.efn.uncor.edu>*

Palabras Clave: Elementos Finitos, Láminas, Zigzag, Materiales compuestos

Resumen. El presente trabajo muestra una posible implementación de la teoría refinada de zigzag en elementos de lámina basados en la teoría de Simo asociada habitualmente con la teoría de láminas deformable por corte de primer orden. La teoría refinada de zigzag permite tratar laminados en forma económica, adicionando sólo dos grados de libertad nodales, con muy buena precisión. Consiste en suponer que la variación de los desplazamientos en el espesor de la lámina tiene una forma zigzageante impuesta en función de la rigidez al corte de cada capa del laminado. Se parte de dos elementos existentes, un cuadrilátero bilineal de cuatro nudos (QL) y un triángulo lineal de 6 nudos (TLLL), con interpolación de la superficie media a partir de los vértices y del campo director a partir de los nudos en los lados. A la geometría de base se le agrega un campo de desplazamiento adicional (jerárquico) en el plano expresado en coordenadas locales (convectivas) usando la misma interpolación que para la geometría de la lámina. El objetivo es tener elementos sencillos y eficientes para el tratamiento de laminados con grandes desplazamientos y rotaciones, en régimen de pequeñas deformaciones inicialmente elásticas. Se presentan los aspectos generales de la implementación y en particular la técnica de deformaciones naturales impuestas para evitar el bloqueo por corte transversal. Se presentan varios ejemplos que permiten comparar por un lado con soluciones analíticas (lineales) de equilibrio y frecuencias naturales en placas, y por otro observar el comportamiento no-lineal con grandes desplazamientos y cargas de pandeo en láminas de doble curvatura. En estos últimos casos se compara con soluciones numéricas obtenidas con elementos de sólido. Los resultados obtenidos muestran muy buena correlación con las referencias utilizadas.

1. INTRODUCCIÓN

Tanto la teoría clásica de láminas delgadas (Love-Kirchhoff (1850)) como la teoría con deformaciones transversales de corte de primer orden (Mindlin-Reissner (1945), FSDT de su acrónimo en inglés) conducen a resultados razonablemente buenos al tratar materiales homogéneos. Sin embargo, la hipótesis básica que supone que fibras en la dirección normal a la lámina se mantendrán rectas conduce a predicciones pobres al tratar materiales con alto grado de heterogeneidad en el espesor.

Se han propuesto teorías con interpolación de los desplazamientos de mayor orden (cúbico o superior) en el espesor de la lámina a los fines de mejorar las predicciones (ver por ejemplo la monografía Reddy (2004)) sin embargo su uso no se ha generalizado debido a que su capacidad predictiva no es confiable.

Un análisis con elementos de sólido tridimensional se impone como la técnica adecuada para el tratamiento de materiales compuestos, pero esto se puede volver prohibitivamente costoso debido a que la cantidad de capas del laminado puede ser mayor a 100. En tales casos es factible agrupar dentro de un elemento a varias capas con las propiedades combinadas de las capas a fines de mantener el número de grados de libertad del problema dentro de límites manejables (Martinez et al. (2011)).

Una técnica más precisa que las basadas en las teorías de láminas son las aproximaciones por capas, en las cuales el espesor del laminado se divide en un número de capas (que puede o no coincidir con el número físico de capas) suponiendo una variación lineal de los desplazamientos (en el plano de la capa) entre capas. Una reseña de las mismas puede verse en Reddy y Robbins (1994). Esta aproximación claramente adolece del mismo problema del análisis con elementos de sólido tridimensionales.

Los modelos con elementos de sólidos y las aproximaciones por capa muestran que el perfil de los desplazamientos en el plano a lo largo de la normal al plano del laminado dista mucho de poder ser aproximado por un polinomio de orden superior. Eso ha dado lugar a la aparición de aproximaciones zigzag, donde las funciones de interpolación en el espesor son sólo C^0 continuas pero con forma de zigzag, es decir que la derivada primera (asociada con la deformación transversal de corte) es discontinua, lo cual naturalmente ocurre debido a los distintos módulos de elasticidad transversal de cada capa, que pueden ser distintos en varios órdenes de magnitud. En Carrera (2003) puede verse una reseña de estas teorías. Recientemente se ha presentado una versión refinada de esta propuesta (Tessler et al. (2010)), en la cual partiendo de la FSDT (5 Grados de libertad), se agregan sólo dos grados de libertad, que representan las amplitudes de desplazamientos jerárquicos sobre la hipótesis de desplazamientos lineales en el espesor. Esta teoría conduce a tensiones de corte transversales constantes en cada laminado (y por lo tanto discontinuas) pero permite tratar condiciones de contorno empotrado que era una limitación que presentaban las primeras teorías de zigzag.

Estas teorías refinadas de zigzag (ZZRT de su acrónimo en inglés) se han implementado en elementos viga 2D (Gherlone et al. (2011); Oñate et al. (2012)) y en elementos de placa plana (Tessler et al. (2010); Eijo et al. (2013); Iurlaro et al. (2013)) donde se muestra una muy buena aproximación al campo de desplazamientos en el espesor del laminado. Por otro lado las tensiones de corte obtenidas directamente usando la relación constitutiva y las deformaciones de corte en cada punto del espesor muestran una pobre aproximación. Una precisa recuperación de las tensiones de corte requiere de la integración en el espesor del laminado de las ecuaciones de equilibrio en el plano de la lámina, para lo cual hay que evaluar las derivadas de las tensiones entre elementos finitos.

No existe en conocimiento del autor la utilización de la ZZRT en láminas de doble curvatura. Por otro lado, los modelos geoméricamente no lineales se remiten a la utilización de la cinemática de von-Karman para placas a los fines de evaluar cargas de pandeo.

En el presente trabajo se muestra una posible implementación de la ZZRT en elementos de lámina basados en la teoría de Simo (Simo y Fox (1989)). Los elementos considerados son un cuadrilátero bilineal de 4 nudos y un triángulo lineal de 6 nudos, este último con interpolación no conforme del campo director (Flores et al. (1995)). El objetivo del presente trabajo se limita a pequeñas deformaciones elásticas y grandes desplazamientos y rotaciones.

En la siguiente sección se resume la formulación básica de la teoría de láminas propuesta por Simo (FSDT). A continuación se introducen los campos de desplazamientos adicionales (ZZRT) y se explica una forma posible de obtener su interpolación en el espesor. Luego se evalúan las matrices de elasticidad resultantes para las nuevas medidas de tensión y deformación generalizadas. En la sección 6 se resumen los elementos de láminas utilizados y las modificaciones necesarias para introducir la ZZRT en tanto que en la Sección 7 se explica el tratamiento del corte transversal para evitar el bloqueo. En la Sección 8 se presentan varios ejemplos mostrando la buena correlación con los resultados teóricos y comparaciones con modelos de sólidos 3D y finalmente se resumen algunas conclusiones.

2. GEOMETRÍA Y CINEMÁTICA BÁSICA

Para un planteo en grandes desplazamientos y rotaciones y pequeñas deformaciones compatibles con un laminado en régimen elástico, partimos de la aproximación propuesta por Simo y Fox (1989) donde la configuración de la lámina está definida por la posición de la superficie media φ y el campo director \mathbf{t} (pseudo normal). Las posiciones de un punto cualquiera antes y después de la deformación se escriben

$$\mathbf{X}(x, y, z) = \varphi_0(x, y) + z\mathbf{t}_0(x, y) \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(x, y, z) = \varphi(x, y) + z\mathbf{t}(x, y) \quad (2)$$

$$\mathbf{\Lambda}(x, y) = [\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2 \quad \mathbf{t}_3] \quad (3)$$

donde (x, y, z) son las coordenadas en un sistema local convectivo adecuadamente elegido con z en la dirección del director y (x, y) asociadas a dos direcciones ortogonales en el plano tangente a la superficie media, el director \mathbf{t} es la tercera componente (\mathbf{t}_3) del sistema local $\mathbf{\Lambda}$ y se ha supuesto que para pequeñas deformaciones el espesor no cambia durante la deformación.

Las medidas de deformación de interés resultan de evaluar el gradiente de la deformación referido al sistema convectivo

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = [\varphi_x + z\mathbf{t}_x, \varphi_y + z\mathbf{t}_y, \mathbf{t}] \quad (4)$$

con el cual el tensor derecho de Cauchy-Green resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{F}^T \mathbf{F} \\ &= \begin{bmatrix} \varphi_x \cdot \varphi_x & \varphi_x \cdot \varphi_y & \varphi_x \cdot \mathbf{t} \\ \varphi_y \cdot \varphi_x & \varphi_y \cdot \varphi_y & \varphi_y \cdot \mathbf{t} \\ \mathbf{t} \cdot \varphi_x & \mathbf{t} \cdot \varphi_y & 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \mathbf{t}_x \cdot \varphi_x & \mathbf{t}_x \cdot \varphi_y & 0 \\ \mathbf{t}_y \cdot \varphi_x & \mathbf{t}_y \cdot \varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ z^2 \begin{bmatrix} \mathbf{t}_x \cdot \mathbf{t}_x & \mathbf{t}_x \cdot \mathbf{t}_y & 0 \\ \mathbf{t}_y \cdot \mathbf{t}_x & \mathbf{t}_y \cdot \mathbf{t}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

donde habitualmente se desprecian los términos asociados con z^2 . Luego pueden distinguirse

- El tensor métrico de la superficie media

$$\begin{bmatrix} a_{xx} \\ a_{yy} \\ 2a_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_x \cdot \varphi_x \\ \varphi_y \cdot \varphi_y \\ 2\varphi_x \cdot \varphi_y \end{bmatrix} \quad (6)$$

de donde se obtiene el tensor de Green-Lagrange de la superficie media

$$\begin{bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ 2E_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{xx} - 1 \\ a_{yy} - 1 \\ 2a_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{E}_m \quad (7)$$

- el pseudo-tensor de curvatura

$$\begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_x \cdot \varphi_x \\ \mathbf{t}_y \cdot \varphi_y \\ \mathbf{t}_x \cdot \varphi_y + \mathbf{t}_y \cdot \varphi_x \end{bmatrix} \quad (8)$$

que permite evaluar cambios de curvatura respecto a la configuración original

$$\begin{bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ 2\chi_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{yy}^0 \\ 2\kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\chi} \quad (9)$$

- las deformaciones de corte transversal

$$\begin{bmatrix} a_{zx} \\ a_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \cdot \varphi_x \\ \mathbf{t} \cdot \varphi_y \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \cdot \varphi_x - \mathbf{t}^0 \cdot \varphi_x^0 \\ \mathbf{t} \cdot \varphi_y - \mathbf{t}^0 \cdot \varphi_y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{zx} \\ a_{zy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{zx}^0 \\ a_{zy}^0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Estas deformaciones generalizadas permiten obtener el tensor de deformaciones para cada punto en el espesor.

3. CAMPO ADICIONAL DE DESPLAZAMIENTOS

Para poder considerar la utilización de la ZZRT es necesario separar desplazamientos en la dirección del director y desplazamientos en el plano tangente a la lámina. Por otro lado estos nuevos desplazamientos son adicionales sobre la geometría básica (grados de libertad jerárquicos). Las funciones zigzag se introducen en el sistema convectivo de coordenadas locales con componentes en el plano tangente de la lámina (direcciones (x, y))

$$\begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_x(z) \\ \phi_y(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \boldsymbol{\phi}(z) \boldsymbol{\psi}(x, y) \quad (13)$$

donde $\boldsymbol{\psi}$ es la amplitud del desplazamiento jerárquico en tanto que las funciones de interpolación jerárquica en el espesor $\phi_i(z)$ (función zigzag) se anulan en las superficies externas

$$\boldsymbol{\phi}\left(\pm \frac{h}{2}\right) = \mathbf{0} \quad (14)$$

y sus derivadas en la dirección transversal (z), que se suponen constantes en cada capa,

$$\beta_i^k = \frac{\phi_i^k - \phi_i^{k-1}}{z^k - z^{k-1}} = \frac{\phi_i^k - \phi_i^{k-1}}{h^k} \quad (15)$$

$$\sum \beta_i^k h^k = 0 \quad (16)$$

dependen exclusivamente de las propiedades del laminado.

Debido a que se trabaja con pequeñas deformaciones es posible utilizar directamente los resultados de la ZZRT (Tessler et al. (2010)) para aumentar las deformaciones en el plano en cada capa k del laminado de la forma:

$$\mathbf{E}_m^k = \mathbf{E}_m + z\boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\Phi}^k \nabla \psi \quad (17)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{1} & z\mathbf{1} & \boldsymbol{\Phi}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m \\ \boldsymbol{\chi} \\ \nabla \psi \end{bmatrix} = \mathbf{S}_t^k \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (18)$$

donde se han definido dos matrices que incluyen a las funciones de forma ϕ y al gradiente de las amplitudes

$$\boldsymbol{\Phi}^k = \begin{bmatrix} \phi_x^k & & & \\ & \phi_y^k & & \\ & & \phi_x^k & \phi_y^k \end{bmatrix} \quad \nabla \psi = \begin{bmatrix} \psi_{x'x} \\ \psi_{y'y} \\ \psi_{x'y} \\ \psi_{y'x} \end{bmatrix} \quad (19)$$

y se han agrupado las distintas contribuciones a las deformaciones en el plano de la lámina en el arreglo $\boldsymbol{\varepsilon}_p$.

En tanto que las deformaciones de corte transversal resultan de la suma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^k \\ \gamma_{yz}^k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_x^k \psi_x \\ \beta_y^k \psi_y \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{1}_2, \boldsymbol{\beta}^k] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} \\ \psi \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\gamma}^k &= \mathbf{S}_t^k \boldsymbol{\varepsilon}_t \end{aligned} \quad (20)$$

donde $\mathbf{1}_2$ es la matriz identidad de orden 2, se ha definido la matriz

$$\boldsymbol{\beta}^k = \begin{bmatrix} \beta_x^k \\ \beta_y^k \end{bmatrix} \quad (21)$$

y se han agrupado las medidas de deformación transversal ($\boldsymbol{\gamma}$ y ψ) en $\boldsymbol{\varepsilon}_t$.

4. DETERMINACIÓN DE LAS FUNCIONES ZIGZAG

La ZZRT (Tessler et al. (2010)) nos indica el camino para obtener las funciones ϕ . Notar primero que por las propiedades de las funciones ϕ (ec. 14)

$$\int_h \gamma_{iz}(z) dz = \int_h (\gamma_{iz} + \beta_i \psi_i) dz = \gamma_{iz} h \quad (22)$$

Las tensiones, separando componentes en el plano de la lámina y corte transversal, en cada capa son

$$\boldsymbol{\sigma}^k = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \tau_{xy}^k \end{bmatrix} = \mathbf{D}_p^k \mathbf{E}^k = \mathbf{D}_p^k \mathbf{S}_p^k \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\tau}^k = \begin{bmatrix} \tau_{xz}^k \\ \tau_{yz}^k \end{bmatrix} = \mathbf{D}_t^k \boldsymbol{\gamma}^k = \mathbf{D}_t^k \mathbf{S}_t^k \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (24)$$

donde las matrices de elasticidad de cada capa \mathbf{D}_p^k y \mathbf{D}_t^k son en general llenas. En particular las deformaciones de corte transversal se pueden escribir

$$\begin{aligned} \gamma_{iz}^k &= \gamma_i + \beta_i^k \psi_i = (\gamma_i - \psi_i) + (1 + \beta_i^k) \psi_i \\ &= \eta_i + (1 + \beta_i^k) \psi_i \end{aligned} \quad (25)$$

Reemplazando en las tensiones de corte transversal (24) y reagrupando

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tau_{xz}^k \\ \tau_{yz}^k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G_{xx}^k & G_{xy}^k \\ G_{xy}^k & G_{yy}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_x + (1 + \beta_x^k) \psi_x \\ \eta_y + (1 + \beta_y^k) \psi_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_{xx}^k & G_{xy}^k \\ G_{xy}^k & G_{yy}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{xx}^k (1 + \beta_x^k) & G_{xy}^k (1 + \beta_y^k) \\ G_{xy}^k (1 + \beta_x^k) & G_{yy}^k (1 + \beta_y^k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

Si al término diagonal que multiplica a cada ψ_j se lo hace constante a través del espesor

$$G_{ii}^k (1 + \beta_i^k) = G_i = \text{cte.} \quad (27)$$

permite obtener una posible distribución de los β_i^k en el espesor

$$\beta_i^k = \frac{G_i}{G_{ii}^k} - 1 \quad (28)$$

en tanto que la condición

$$\begin{aligned} \int_h \beta_i dz &= \sum_{k=1}^N \beta_i^k h^k = \sum_{k=1}^N \left(\frac{G_i}{G_{ii}^k} - 1 \right) h^k \\ &= G_i \sum_{k=1}^N \frac{h^k}{G_{ii}^k} - \sum_{k=1}^N h^k = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

permite obtener cada G_i de la forma

$$G_i = \frac{\int_h dz}{\int \frac{dz}{G_{ii}^k}} = \frac{h}{\sum_{k=1}^N \frac{h_k}{G_{ii}^k}} \quad (30)$$

luego

$$G_{xy}^k (1 + \beta_x^k) = G_{xy}^k \left(\frac{G_x}{G_{xx}^k} \right) = G_x \left(\frac{G_{xy}^k}{G_{xx}^k} \right) \quad (31)$$

$$G_{yx}^k (1 + \beta_y^k) = G_{yx}^k \left(\frac{G_y}{G_{yy}^k} \right) = G_y \left(\frac{G_{yx}^k}{G_{yy}^k} \right) \quad (32)$$

Lo anterior permite obtener entonces una posible variación de las funciones zigzag en el espesor del laminado. La variable $\boldsymbol{\eta}$ no se utiliza en lo sucesivo y las tensiones de corte se calculan usando (24) y los esfuerzos de corte se obtienen integrando en el espesor.

5. MATRICES DE ELASTICIDAD EQUIVALENTE Y MEDIDAS DE TENSIÓN

Asociadas con las deformaciones jerárquicas aparecen nuevas medidas de tensión. Para un material elástico lineal la energía interna de deformación resulta de integrar en la sección:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int_h (\mathbf{E}^k \cdot \boldsymbol{\sigma}^k + \boldsymbol{\gamma}^k \cdot \boldsymbol{\tau}^k) dz & (33) \\
 &= \frac{1}{2} \int_h (\boldsymbol{\varepsilon}_p^T \mathbf{S}_p^T \mathbf{D}_p^k \mathbf{S}_p \boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_t^T \mathbf{S}_t^T \mathbf{D}_t^k \mathbf{S}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t) dz \\
 &= \frac{1}{2} \int_h \left(\boldsymbol{\varepsilon}_p^T \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ z\mathbf{1}_3 \\ \boldsymbol{\Phi}^k \end{bmatrix} \mathbf{D}_p^k [\mathbf{1}_3, z\mathbf{1}_3, \boldsymbol{\Phi}^k] \boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_t^T \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 \\ \boldsymbol{\beta}^k \end{bmatrix} \mathbf{D}_t^k [\mathbf{1}_2, \boldsymbol{\beta}^k] \boldsymbol{\varepsilon}_t \right) dz
 \end{aligned}$$

donde se ha escrito la energía como una forma cuadrática de las deformaciones generalizadas definidas en (17) y (20) a los fines de encontrar esfuerzos generalizados conjugados. Definiendo para el comportamiento en el plano de la lámina

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{D}_p)_{10 \times 10} &= \int_h \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ -z\mathbf{1}_3 \\ \boldsymbol{\Phi}^k \end{bmatrix}_{10 \times 3} (\mathbf{D}_p^k)_{3 \times 3} [\mathbf{1}_3, z\mathbf{1}_3, \boldsymbol{\Phi}^k]_{3 \times 10} dz & (34) \\
 &= \int_h \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p^k & \mathbf{D}_p^k z & \mathbf{D}_p^k \boldsymbol{\Phi}^k \\ & \mathbf{D}_p^k z^2 & \mathbf{D}_p^k \boldsymbol{\Phi}^k z \\ \text{sim} & & (\boldsymbol{\Phi}^k)^T \mathbf{D}_p^k \boldsymbol{\Phi}^k \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} (\mathbf{D}_p^{11})_{3 \times 3} & (\mathbf{D}_p^{12})_{3 \times 3} & (\mathbf{D}_p^{13})_{3 \times 4} \\ & (\mathbf{D}_p^{22})_{3 \times 3} & (\mathbf{D}_p^{23})_{3 \times 4} \\ \text{sim} & & (\mathbf{D}_p^{33})_{4 \times 4} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

donde \mathbf{D}_p^{11} , \mathbf{D}_p^{12} y \mathbf{D}_p^{22} son los términos estándar que aparecen al tratar laminados usando la teoría de láminas delgadas. En tanto que para las componentes transversales de corte

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{D}_t)_{4 \times 4} &= \int_h \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 \\ \boldsymbol{\beta}^k \end{bmatrix}_{4 \times 2} (\mathbf{D}_t^k)_{2 \times 2} [\mathbf{1}_2, \boldsymbol{\beta}^k]_{2 \times 4} dz \\
 &= \int_h \begin{bmatrix} \mathbf{D}_t^k & \mathbf{D}_t^k \boldsymbol{\beta}^k \\ \text{sim} & \boldsymbol{\beta}^k \mathbf{D}_t^k \boldsymbol{\beta}^k \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_t^{11} & \mathbf{D}_t^{12} \\ \text{sim} & \mathbf{D}_t^{22} \end{bmatrix} & (35)
 \end{aligned}$$

Donde aparece un término estándar de la teoría de láminas de 1er orden (FSDT)

$$\mathbf{D}_t^{11} = \int_h \mathbf{D}_t^k dz & (36)$$

mientras que en la contradiagonal:

$$\mathbf{D}_t^{12} = \int_h \mathbf{D}_t^k \boldsymbol{\beta}^k dz = \int_h \begin{bmatrix} G_{xx}^k & G_{xy}^k \\ G_{xy}^k & G_{yy}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{G_x}{G_{xx}^k} - 1 & \\ & \frac{G_y}{G_{yy}^k} - 1 \end{bmatrix} dz & (37)$$

y finalmente

$$\mathbf{D}_t^{22} = \int_h \boldsymbol{\beta}^k \mathbf{D}_t^k \boldsymbol{\beta}^k dz = \int_h \begin{bmatrix} \frac{G_x}{G_{xx}^k} - 1 & \\ & \frac{G_y}{G_{yy}^k} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{xx}^k & G_{xy}^k \\ G_{xy}^k & G_{yy}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{G_x}{G_{xx}^k} - 1 & \\ & \frac{G_y}{G_{yy}^k} - 1 \end{bmatrix} dz & (38)$$

Luego la expresión de la energía interna de deformación se puede escribir

$$W = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}_p^T \mathbf{D}_p \boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_t^T \mathbf{D}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t) \quad (39)$$

lo cual permite definir esfuerzos generalizados integrados en la sección

$$\begin{bmatrix} (\boldsymbol{\sigma}_p)_{10 \times 1} \\ (\boldsymbol{\sigma}_t)_{4 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{D}_p)_{10 \times 10} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{D}_t)_{4 \times 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\varepsilon}_p)_{10 \times 1} \\ (\boldsymbol{\varepsilon}_t)_{4 \times 1} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{14 \times 1} = \mathbf{D}_{14 \times 14} \boldsymbol{\varepsilon}_{14 \times 1} \quad (41)$$

Las integrales en el espesor resultan (llamando $\bar{z}_k = \frac{1}{2}(z_{k+1} + z_k)$ y $\bar{\Phi}_k = \frac{1}{2}(\Phi_{k+1} + \Phi_k)$):

$$\mathbf{D}_p^{11} = \sum_{k=1}^{NL} \mathbf{D}_p^k h_k \quad \mathbf{D}_p^{12} = \sum_{k=1}^{NL} \mathbf{D}_p^k h_k \bar{z}_k \quad \mathbf{D}_p^{13} = \sum_{k=1}^{NL} \mathbf{D}_p^k h_k \bar{\Phi}_k \quad (42)$$

$$\mathbf{D}_p^{22} = \sum_{k=1}^{NL} \mathbf{D}_p^k h_k \left(\bar{z}_k^2 + \frac{h_k^2}{12} \right) \quad \mathbf{D}_p^{23} = \sum_{k=1}^{NL} \mathbf{D}_p^k h_k \left[\bar{\Phi}_k \bar{z}_k + \beta^k \frac{h_k^2}{12} \right]$$

$$\mathbf{D}_p^{33} = \sum_{k=1}^{NL} h_k \left[(\Phi^k)^T \mathbf{D}_p^k \Phi^k + (\beta^k)^T \mathbf{D}_p^k \beta^k \frac{h_k^2}{12} \right] \quad (43)$$

$$\mathbf{D}_t^{11} = \sum_{k=1}^{NL} \mathbf{D}_t^k h_k \quad \mathbf{D}_t^{12} = \sum_{k=1}^{NL} \mathbf{D}_t^k h_k \beta^k \quad \mathbf{D}_t^{22} = \sum_{k=1}^{NL} (\beta^k)^T \mathbf{D}_t^k h_k \beta^k \quad (44)$$

Las medidas de tensión resultantes son entonces:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_p \\ \boldsymbol{\sigma}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_p \\ \boldsymbol{\varepsilon}_t \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M}_\phi \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{D}_p^{11})_{3 \times 3} & (\mathbf{D}_p^{12})_{3 \times 3} & (\mathbf{D}_p^{13})_{3 \times 4} \\ & (\mathbf{D}_p^{22})_{3 \times 3} & (\mathbf{D}_p^{23})_{3 \times 4} \\ \text{sim} & & (\mathbf{D}_p^{33})_{4 \times 4} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \mathbf{D}_t^{11} & \mathbf{D}_t^{12} \\ \text{sim} & \mathbf{D}_t^{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m \\ \boldsymbol{\chi} \\ \nabla \psi \\ \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix}$$

Puede fácilmente demostrarse que :

$$\mathbf{N} = \int_h \mathbf{D}_p \mathbf{E} dz = \int_h \boldsymbol{\sigma}_p dz \quad (46)$$

$$\mathbf{M} = \int_h z \mathbf{D}_p \mathbf{E} dz = \int_h z \boldsymbol{\sigma}_p dz \quad (47)$$

$$\mathbf{Q} = \int_h \mathbf{D}_t (\boldsymbol{\gamma} + \beta \boldsymbol{\psi}) dz = \int_h \boldsymbol{\tau} dz \quad (48)$$

es decir que representan lo que habitualmente se entiende por esfuerzos membranales, flexionales y de corte. En tanto que aparecen dos nuevas medidas de tensión

$$\mathbf{M}_\phi = \mathbf{D}_p^{31} \mathbf{E}_m + \mathbf{D}_p^{32} \boldsymbol{\chi} + \mathbf{D}_p^{33} \nabla \psi = \int_h \Phi^T \boldsymbol{\sigma}_p dz \quad (49)$$

$$\mathbf{Q}_\phi = \mathbf{D}_t^{21} \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{D}_t^{22} \boldsymbol{\psi} = \int_h \beta^T \boldsymbol{\tau} dz \quad (50)$$

asociadas con los gradientes de la función ψ en el plano de la lámina y en la dirección transversal respectivamente.

6. ELEMENTOS DE LÁMINA

6.1. Configuración y sistemas locales

La configuración del elemento queda definida por la posición de la superficie media φ respecto al sistema global, la dirección del director \mathbf{t} y el campo de desplazamientos adicionales ψ . En una configuración cualquiera resulta de interpolar a partir de los valores nodales

$$\varphi = \sum_{I=1}^{NN} N^I \varphi^I \quad (51)$$

$$\mathbf{t} = \sum_{I=1}^{NN} N^I \mathbf{t}^I \quad (52)$$

$$\psi = \sum_{I=1}^{NN} N^I \psi^I \quad (53)$$

además el director \mathbf{t} forma parte de la terna local cuyos otros dos ejes no necesariamente son parte del plano tangente a la superficie media.

$$\mathbf{\Lambda} = [\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2 \quad \mathbf{t}_3] \quad (54)$$

En el plano tangente a la superficie media, en la configuración original (subíndice 0) se define en cada punto de integración un sistema local $[\varphi_x, \varphi_y]_0^G$. En forma similar se requiere determinar un sistema local en cada nudo del elemento $[\varphi_x, \varphi_y]_0^I$ que pueda relacionarse con el sistema local $[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2]_0^I$, primero mediante un ángulo β entre \mathbf{t}_3 y la normal al plano tangente $\varphi_x \times \varphi_y$ y segundo mediante el ángulo α (rotación alrededor de \mathbf{t}_3 del sistema local para llevarlo al nodal) entre φ_x, φ_y y $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ que luego permita transformar las contribuciones a los grados de libertad ψ en el sistema correspondiente al nudo. Entonces los grados de libertad nodales jerárquicos se relacionan en cada nudo I

$$\begin{bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{bmatrix}^I = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^I \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}^I \quad (55)$$

$$\psi_L^I = \mathbf{R}_I \psi_G^I \quad (56)$$

lo cual debe considerarse al evaluar las contribuciones a las ecuaciones de equilibrio y a la matriz de rigidez.

Los elementos considerados en este trabajo son un cuadrilátero de cuatro nudos con interpolación bilineal estándar (QL) y un triángulo de 6 nudos (TLLL) donde la geometría de la superficie media φ se describe en forma lineal usando los vértices del triángulo, en tanto que los sistemas locales $\mathbf{\Lambda}$ se describen en forma “no conforme” a partir de nudos a la mitad de cada lado. Para los desplazamientos adicionales ψ se utiliza la misma aproximación (conforme) que para la geometría de la superficie media.

6.2. Deformaciones

A partir de la nueva variable ψ que proviene de la interpolación nodal

$$\Xi = \begin{bmatrix} N^1 & & & N^{NN} \\ & N^1 & \dots & \\ & & & N^{NN} \end{bmatrix}_{2 \times 2NN} \quad (57)$$

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\psi}^e \quad (58)$$

donde $\boldsymbol{\psi}^e$ incluye las variables nodales asociadas con el elemento, hay dos nuevas medidas de deformación a incluir y sus correspondientes matrices tangentes:

- El gradiente de $\boldsymbol{\psi}$ en el plano que se escribe como un arreglo de cuatro componentes

$$\begin{bmatrix} \psi_{x'x} \\ \psi_{y'y} \\ \psi_{x'y} \\ \psi_{y'x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x^1 & & \dots & N_x^{NN} \\ & N_y^1 & & \\ N_y^1 & & & N_y^{NN} \\ & N_x^1 & & \\ & & & N_x^{NN} \end{bmatrix} \boldsymbol{\psi}^e \quad (59)$$

$$\nabla\boldsymbol{\psi} = \mathbf{B}_{b\phi}\boldsymbol{\psi}^e \quad (60)$$

- La derivada en la dirección transversal

$$\begin{bmatrix} \gamma_{\phi x} \\ \gamma_{\phi y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_x\psi_x \\ \beta_y\psi_y \end{bmatrix} \quad (61)$$

Luego la variación de las medidas de deformación se escribe (la forma de las matrices \mathbf{B}_m , \mathbf{B}_b y \mathbf{B}_s pueden verse en los trabajos originales: [Simo et al. \(1990\)](#); [Flores et al. \(1995\)](#))

$$\delta \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m \\ \boldsymbol{\chi} \\ \nabla\boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m \\ \mathbf{B}_b^1 & \mathbf{B}_b^2 \\ \bar{\mathbf{B}}_s^1 & \bar{\mathbf{B}}_s^2 \\ \bar{\mathbf{B}}_{s\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u} \\ \delta\mathbf{T} \\ \delta\boldsymbol{\psi} \end{bmatrix} \quad (62)$$

allí se define a la variación de los sistemas locales $\boldsymbol{\Lambda}$ en función de las componentes en el plano tangente $\delta\mathbf{T}_{2 \times 1}$ del vector rotación (la componente en la dirección normal no interviene), en tanto que los $\delta\mathbf{u}_{3 \times 1}$ son la variación de los desplazamientos de la superficie media φ .

Las fuerzas nodales equivalentes resultan de integrar en el elemento

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{u} \\ \delta\mathbf{T} \\ \delta\boldsymbol{\psi} \end{bmatrix}^T \int_A \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m \\ \mathbf{B}_b^1 & \mathbf{B}_b^2 \\ \bar{\mathbf{B}}_s^1 & \bar{\mathbf{B}}_s^2 \\ \bar{\mathbf{B}}_{s\phi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M}_\phi \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}_\phi \end{bmatrix} dA \quad (63)$$

esta integración se realiza en forma numérica con NG puntos. Las contribuciones se dividen en dos partes

- la correspondiente a esfuerzos membranales y momentos (el subíndice G indica valuado en el punto de integración, w_G es el peso correspondiente y J es el determinante jacobiano de la aproximación isoparamétrica de la superficie media)

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{u} \\ \delta\mathbf{T} \\ \delta\boldsymbol{\psi} \end{bmatrix}^T \sum_{G=1}^{NG} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m \\ \mathbf{B}_b^1 & \mathbf{B}_b^2 \\ \mathbf{B}_{b\phi} \end{bmatrix}_G^T \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M}_\phi \end{bmatrix}_G J_G w_G \quad (64)$$

2. la correspondiente a los esfuerzos transversales de corte que se tratan usando una aproximación en deformaciones impuestas como se indica abajo

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{T} \\ \delta \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix}^T \sum_{G=1}^{NG} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_s^1 & \bar{\mathbf{B}}_s^2 \\ & \bar{\mathbf{B}}_{s\phi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}_\phi \end{bmatrix} J_G w_G \quad (65)$$

donde las matrices $\bar{\mathbf{B}}_s$ y $\bar{\mathbf{B}}_{s\phi}$ se obtienen por interpolación de las matrices evaluadas en los puntos de muestreo (dependiendo del elemento).

7. APROXIMACIÓN A LAS DEFORMACIONES DE CORTE

En la versión original de los elementos, para las deformaciones transversales de corte se han usado matrices sustitutas ($\bar{\mathbf{B}}_s$) provenientes de aproximaciones en deformaciones impuestas (ANS de su acrónimo en inglés). En la misma dirección es posible definir una aproximación similar para $\bar{\mathbf{B}}_{s\phi}$ suponiendo la misma interpolación que para las deformaciones de corte en coordenadas naturales. Veamos los detalles para los distintos elementos.

7.1. Cuadrilátero de cuatro nudos QL

Para el cuadrilátero de cuatro nudos la función $\boldsymbol{\psi}$ se interpola a partir de cuatro puntos de muestreo a la mitad de cada lado

$$\bar{\boldsymbol{\psi}} = \begin{bmatrix} \psi_\xi \\ \psi_\eta \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 - \eta & 0 & 1 + \eta \\ 1 - \xi & 0 & 1 + \xi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_\eta^A \\ \psi_\xi^B \\ \psi_\eta^C \\ \psi_\xi^D \end{bmatrix} = \mathbf{P}(\xi, \eta) \tilde{\boldsymbol{\psi}} \quad (66)$$

donde los valores de la función $\boldsymbol{\psi}$ en el sistema cartesiano convectivo en los puntos de muestreo resultan

$$\begin{bmatrix} \psi^A \\ \psi^B \\ \psi^C \\ \psi^D \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & & & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & & \\ & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \\ & & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{bmatrix} \quad (67)$$

Las componentes covariantes de la función $\boldsymbol{\psi}$ respecto al sistema natural (ξ, η) resultan de proyectar en las direcciones $\boldsymbol{\varphi}_\xi$ y $\boldsymbol{\varphi}_\eta$. Recordemos que restringidas a las componentes en el plano tangente de la lámina

$$[\boldsymbol{\varphi}_\xi, \boldsymbol{\varphi}_\eta] = \mathbf{J} \quad [\boldsymbol{\varphi}^\xi, \boldsymbol{\varphi}^\eta] = [\boldsymbol{\varphi}_\xi, \boldsymbol{\varphi}_\eta]^{-T} = \mathbf{J}^{-T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^\xi \cdot \mathbf{t}_x & \boldsymbol{\varphi}^\eta \cdot \mathbf{t}_x \\ \boldsymbol{\varphi}^\xi \cdot \mathbf{t}_y & \boldsymbol{\varphi}^\eta \cdot \mathbf{t}_y \end{bmatrix} \quad (68)$$

En los puntos de muestreo se utilizan sólo las componentes tangentes al contorno

$$\begin{bmatrix} \psi_\eta^A \\ \psi_\xi^B \\ \psi_\eta^C \\ \psi_\xi^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_\xi^S \cdot \psi^A \\ \boldsymbol{\varphi}_\xi^B \cdot \psi^B \\ \boldsymbol{\varphi}_\xi^C \cdot \psi^C \\ \boldsymbol{\varphi}_\xi^D \cdot \psi^D \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\varphi}_\eta^A)^T & & & (\boldsymbol{\varphi}_\eta^A)^T \\ (\boldsymbol{\varphi}_\xi^B)^T & (\boldsymbol{\varphi}_\xi^B)^T & & \\ & (\boldsymbol{\varphi}_\eta^C)^T & (\boldsymbol{\varphi}_\eta^C)^T & \\ & & (\boldsymbol{\varphi}_\xi^D)^T & (\boldsymbol{\varphi}_\xi^D)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{T}_{4 \times 8} \boldsymbol{\psi}^e \quad (70)$$

luego llevando a (66)

$$\bar{\psi} = \mathbf{P}(\xi, \eta) \mathbf{T} \psi^e \quad (71)$$

lo que permite reconstruir el vector

$$\psi = \bar{\psi}_\xi \varphi^\xi + \bar{\psi}_\eta \varphi^\eta \quad (72)$$

que se utiliza en los puntos de integración donde se recuperan las componentes cartesianas

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{bmatrix}^G &= \begin{bmatrix} \mathbf{t}_x \cdot \varphi^\xi & \mathbf{t}_x \cdot \varphi^\eta \\ \mathbf{t}_y \cdot \varphi^\xi & \mathbf{t}_y \cdot \varphi^\eta \end{bmatrix}^G \begin{bmatrix} \bar{\psi}_\xi \\ \bar{\psi}_\eta \end{bmatrix}^G \\ &= \mathbf{J}_G^{-T} \mathbf{P}(\xi_G, \eta_G) \mathbf{T} \psi^e \end{aligned} \quad (73)$$

Las fuerzas nodales equivalentes asociadas resultan de realizar directamente la integral

$$\begin{aligned} \int_A \mathbf{B}_{s\phi}^T \mathbf{Q}_\phi dA &= \mathbf{T}^T \int_A \mathbf{P}^T(\xi_G, \eta_G) \mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{Q}_\phi dA \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \varphi_\eta^A & \varphi_\xi^B & \varphi_\eta^C & \varphi_\xi^D \\ \varphi_\eta^A & \varphi_\xi^B & \varphi_\eta^C & \varphi_\xi^D \end{bmatrix}_{8 \times 4} \sum_{G=1}^{NG} \begin{bmatrix} 0 & 1 - \xi \\ 1 - \eta & 0 \\ 0 & 1 + \xi \\ 1 + \eta & 0 \end{bmatrix} \mathbf{J}_G^{-T} \mathbf{Q}_\phi J_G w_G \end{aligned} \quad (74)$$

donde es posible definir

$$\mathbf{q}_\phi = \frac{1}{2} \sum_{G=1}^{NG} \begin{bmatrix} 0 & 1 - \xi \\ 1 - \eta & 0 \\ 0 & 1 + \xi \\ 1 + \eta & 0 \end{bmatrix} \mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{Q}_\phi J_G w_G \quad (75)$$

entonces

$$\int_A \mathbf{B}_{s\phi}^T \mathbf{Q}_\phi dA = \mathbf{T}^T (\mathbf{q}_\phi)_{4 \times 1} \quad (76)$$

7.2. Triángulo de seis nudos TLLL

Para el triángulo de seis nudos con aproximaciones lineales para la geometría y el campo director la función ψ se re-interpola a partir de tres puntos de muestreo (a la mitad de cada lado). Por otro lado la evaluación de las tensiones (las de corte incluidas) se realiza habitualmente sólo en el centro del elemento. Para evitar un elemento excesivamente flexible debido a la subintegración, que conduce a la aparición de un modo espurio de corte, es conveniente utilizar algún tipo de estabilización. Por ello resulta conveniente escribir paralelamente:

$$\bar{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta & -\eta & 1 - \eta \\ \xi & \xi - 1 & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma_t^4 \\ -\gamma_\eta^5 \\ \gamma_\xi^6 \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\xi, \eta) \tilde{\gamma} \quad (77)$$

$$\bar{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_\xi \\ \psi_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta & -\eta & 1 - \eta \\ \xi & \xi - 1 & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\psi_t^4 \\ -\psi_\eta^5 \\ \psi_\xi^6 \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\xi, \eta) \tilde{\psi} \quad (78)$$

que en este caso las $\tilde{\psi}$ son los valores de la función en la dirección tangente en los nudos medios. Las componentes covariantes de la función ψ respecto al sistema natural (ξ, η) resultan de proyectar en las direcciones φ_ξ y φ_η .

Luego

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma_t^4 \\ -\gamma_\eta^5 \\ \gamma_\xi^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{2}\varphi_t^4)^T & & \\ & (-\varphi_\eta^5)^T & \\ & & (\varphi_\xi^6)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^4 \\ t^5 \\ t^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\varphi_t^4 \cdot t^4 \\ -\varphi_\eta^5 \cdot t^5 \\ \varphi_\xi^6 \cdot t^6 \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}\psi_t^4 \\ -\psi_\eta^5 \\ \psi_\xi^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{2}\varphi_t^4)^T & & \\ & (-\varphi_\eta^5)^T & \\ & & (\varphi_\xi^6)^T \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \psi^2 + \psi^3 \\ \psi^3 + \psi^1 \\ \psi^1 + \psi^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\varphi_t^4 \cdot (\psi^2 + \psi^3) \\ -\varphi_\eta^5 \cdot (\psi^3 + \psi^1) \\ \varphi_\xi^6 \cdot (\psi^1 + \psi^2) \end{bmatrix} \quad (80)$$

con la diferencia que en el primer caso los productos escalares son en el espacio 3D y ambos vectores van cambiando durante el proceso de deformación, en tanto que en el segundo caso es en el espacio 2D tangente a la lámina y los vectores tangentes al lado son inmutables debido a la naturaleza de la aproximación. En cada punto de interés la interpolación permite reconstruir los vectores

$$\gamma = \bar{\gamma}_\xi \varphi^\xi + \bar{\gamma}_\eta \varphi^\eta \quad (81)$$

$$\psi = \bar{\psi}_\xi \varphi^\xi + \bar{\psi}_\eta \varphi^\eta \quad (82)$$

que se utiliza en los puntos de integración donde se recuperan las componentes cartesianas

$$\begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix}^G = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_x \cdot \bar{\gamma} \\ \mathbf{t}_y \cdot \bar{\gamma} \end{bmatrix}^G = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_x \cdot \varphi^\xi & \mathbf{t}_x \cdot \varphi^\eta \\ \mathbf{t}_y \cdot \varphi^\xi & \mathbf{t}_y \cdot \varphi^\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_\xi \\ \bar{\gamma}_\eta \end{bmatrix} \\ = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{A}(\xi_G, \eta_G) \tilde{\gamma} \quad (83)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{bmatrix}^G = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_x \cdot \bar{\psi} \\ \mathbf{t}_y \cdot \bar{\psi} \end{bmatrix}^G = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_x \cdot \varphi^\xi & \mathbf{t}_x \cdot \varphi^\eta \\ \mathbf{t}_y \cdot \varphi^\xi & \mathbf{t}_y \cdot \varphi^\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_\xi \\ \bar{\psi}_\eta \end{bmatrix} \\ = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{A}(\xi_G, \eta_G) \tilde{\psi} \quad (84)$$

7.2.1. Fuerzas nodales equivalentes debidas al corte

Las fuerzas nodales asociadas al corte estándar resultan de la integral

$$\mathbf{r} = \int_A [\tilde{\mathbf{B}}_s]_{2 \times 15}^T \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} dA = \int_A [\tilde{\mathbf{B}}_s]_{3 \times 15}^T \mathbf{A}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{Q} dA \\ = [\tilde{\mathbf{B}}_s]_{3 \times 15}^T \int_A \begin{bmatrix} -\eta & \xi \\ -\eta & \xi - 1 \\ 1 - \eta & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{i1}^2 & L_{i2}^2 \\ L_{i1}^3 & L_{i2}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} dA \\ = [\tilde{\mathbf{B}}_s]_{3 \times 15}^T \bar{\mathbf{Q}} \quad (85)$$

donde las fuerzas generalizadas se corte $\bar{\mathbf{Q}}$ se definen como:

$$\bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1} = \int_A \begin{bmatrix} -\eta & \xi \\ -\eta & \xi - 1 \\ 1 - \eta & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{i1}^2 & L_{i2}^2 \\ L_{i1}^3 & L_{i2}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} dA \\ = \int_A \mathbf{A}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{Q} dA \quad (86)$$

en el caso elástico lineal es la suma de

$$\bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1}^1 = \int_A \begin{bmatrix} -\eta & \xi \\ -\eta & \xi - 1 \\ 1 - \eta & \xi \end{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_t^{11} \begin{bmatrix} -\eta & -\eta & 1 - \eta \\ \xi & \xi - 1 & \xi \end{bmatrix} dA \begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma_t^4 \\ -\gamma_n^5 \\ \gamma_\xi^6 \end{bmatrix} \quad (87)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1}^2 = \int_A \begin{bmatrix} -\eta & \xi \\ -\eta & \xi - 1 \\ 1 - \eta & \xi \end{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_t^{12} \begin{bmatrix} -\eta & -\eta & 1 - \eta \\ \xi & \xi - 1 & \xi \end{bmatrix} dA \begin{bmatrix} \sqrt{2}\psi_t^4 \\ -\psi_\eta^5 \\ \psi_\xi^6 \end{bmatrix} \quad (88)$$

con

$$\bar{\mathbf{D}}_t^{ij} = \mathbf{J}^{-1} \bar{\mathbf{D}}_t^{ij} \mathbf{J}^{-T} = \begin{bmatrix} L_{r_1}^2 & L_{r_1}^3 \\ L_{r_2}^2 & L_{r_2}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{t11}^{ij} & D_{t12}^{ij} \\ D_{t12}^{ij} & D_{t22}^{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{r_1}^2 & L_{r_2}^2 \\ L_{r_1}^3 & L_{r_2}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}^{ij} \quad (89)$$

Integrando explícitamente en el área

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1} &= \frac{A}{6} \begin{bmatrix} a + b - c & a - b + c & -a + b + c \\ & a + 3b + 3c & -a - b - 3c \\ \text{sim.} & & 3a + b + 3c \end{bmatrix}^{11} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma_t^4 \\ -\gamma_n^5 \\ \gamma_\xi^6 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{A}{6} \begin{bmatrix} a + b - c & a - b + c & -a + b + c \\ & a + 3b + 3c & -a - b - 3c \\ \text{sim.} & & 3a + b + 3c \end{bmatrix}^{12} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\psi_t^4 \\ -\psi_\eta^5 \\ \psi_\xi^6 \end{bmatrix} \\ &= \tilde{\mathbf{D}}_t^{11} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma_t^4 \\ -\gamma_n^5 \\ \gamma_\xi^6 \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{D}}_t^{12} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\psi_t^4 \\ -\psi_\eta^5 \\ \psi_\xi^6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (90)$$

En tanto que las fuerzas equivalentes asociadas con \mathbf{Q}_ϕ resultan en forma similar

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\phi &= \int_A [\bar{\mathbf{B}}_{\phi s}]_{2 \times 6}^T \begin{bmatrix} Q_{\phi 1} \\ Q_{\phi 2} \end{bmatrix} dA = \int_A [\tilde{\mathbf{B}}_{\phi s}]_{3 \times 6}^T \mathbf{A}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{Q}_\phi dA \\ &= [\tilde{\mathbf{B}}_{\phi s}]_{3 \times 6}^T \int_A \begin{bmatrix} -\eta & \xi \\ -\eta & \xi - 1 \\ 1 - \eta & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{r_1}^2 & L_{r_2}^2 \\ L_{r_1}^3 & L_{r_2}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{\phi 1} \\ Q_{\phi 2} \end{bmatrix} dA \\ &= [\tilde{\mathbf{B}}_{\phi s}]_{3 \times 6}^T \bar{\mathbf{Q}}_\phi \end{aligned} \quad (91)$$

donde las fuerzas generalizadas se corte $\bar{\mathbf{Q}}_\phi$ se definen como:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}_{\phi 3 \times 1} &= \int_A \begin{bmatrix} -\eta & \xi \\ -\eta & \xi - 1 \\ 1 - \eta & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{r_1}^2 & L_{r_2}^2 \\ L_{r_1}^3 & L_{r_2}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{\phi 1} \\ Q_{\phi 2} \end{bmatrix} dA \\ &= \int_A \mathbf{A}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{Q}_\phi dA \end{aligned} \quad (92)$$

en el caso elástico lineal es la suma de

$$\bar{\mathbf{Q}}_{\phi 3 \times 1}^1 = \int_A \begin{bmatrix} -\eta & \xi \\ -\eta & \xi - 1 \\ 1 - \eta & \xi \end{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_t^{21} \begin{bmatrix} -\eta & -\eta & 1 - \eta \\ \xi & \xi - 1 & \xi \end{bmatrix} dA \begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma_t^4 \\ -\gamma_n^5 \\ \gamma_\xi^6 \end{bmatrix} \quad (93)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_{\phi 3 \times 1}^2 = \int_A \begin{bmatrix} -\eta & \xi \\ -\eta & \xi - 1 \\ 1 - \eta & \xi \end{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_t^{22} \begin{bmatrix} -\eta & -\eta & 1 - \eta \\ \xi & \xi - 1 & \xi \end{bmatrix} dA \begin{bmatrix} \sqrt{2}\psi_t^4 \\ -\psi_\eta^5 \\ \psi_\xi^6 \end{bmatrix} \quad (94)$$

Integrando explícitamente en el área

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1} &= \frac{A}{6} \begin{bmatrix} a+b-c & a-b+c & -a+b+c \\ \text{sim.} & a+3b+3c & -a-b-3c \\ & & 3a+b+3c \end{bmatrix}^{21} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma_t^4 \\ -\gamma_n^5 \\ \gamma_\xi^6 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{A}{6} \begin{bmatrix} a+b-c & a-b+c & -a+b+c \\ \text{sim.} & a+3b+3c & -a-b-3c \\ & & 3a+b+3c \end{bmatrix}^{22} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\psi_t^4 \\ -\psi_\eta^5 \\ \psi_\xi^6 \end{bmatrix} \\ &= \tilde{\mathbf{D}}_t^{21} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma_t^4 \\ -\gamma_n^5 \\ \gamma_\xi^6 \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{D}}_t^{22} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\psi_t^4 \\ -\psi_\eta^5 \\ \psi_\xi^6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (95)$$

De esta forma la matriz de rigidez material asociada al corte resulta:

$$\mathbf{K}_s^M = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{B}}_s)_{3 \times 15} \\ (\tilde{\mathbf{B}}_{\phi s})_{3 \times 6} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_t^{11} & \tilde{\mathbf{D}}_t^{11} \\ \tilde{\mathbf{D}}_t^{21} & \tilde{\mathbf{D}}_t^{22} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{B}}_s)_{3 \times 15} \\ (\tilde{\mathbf{B}}_{\phi s})_{3 \times 6} \end{bmatrix} \quad (96)$$

7.2.2. Estabilización del corte

En el caso de que se use un único punto de integración en el centro del elemento resulta necesario estabilizar el corte para evitar la aparición de modos espurios de deformación sin energía asociada. Para ello primero pueden escribirse las deformaciones naturales de corte como la suma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\eta + \frac{1}{3} & -\eta + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \eta \\ \xi - \frac{1}{3} & \xi - \frac{1}{3} & \xi - \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma_t^4 \\ -\gamma_n^5 \\ \gamma_\xi^6 \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{A}_C + \mathbf{A}_H] \boldsymbol{\gamma}' = \begin{bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{bmatrix}_H \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \psi_\xi \\ \psi_\eta \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\eta + \frac{1}{3} & -\eta + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \eta \\ \xi - \frac{1}{3} & \xi - \frac{1}{3} & \xi - \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\psi_t^4 \\ -\psi_\eta^5 \\ \psi_\xi^6 \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{A}_C + \mathbf{A}_H] \boldsymbol{\psi}' = \begin{bmatrix} \psi_\xi \\ \psi_\eta \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} \psi_\xi \\ \psi_\eta \end{bmatrix}_H \end{aligned} \quad (98)$$

La primera componente corresponde a evaluar en el centro del elemento (subíndice “C”) y la segunda componente (subíndice “H”), que se anula en el centro y varía linealmente, puede utilizarse para realizar la estabilización requerida. Las fuerzas generalizadas se corte se dividen similarmente

$$\bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1} = \bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1}^C + \bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1}^H \quad (99)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_{\phi 3 \times 1} = \bar{\mathbf{Q}}_{\phi 3 \times 1}^C + \bar{\mathbf{Q}}_{\phi 3 \times 1}^H \quad (100)$$

con la componente evaluada en el centro

$$\bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1}^C = A \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{r1}^1 & L_{r2}^1 \\ L_{r1}^2 & L_{r2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}_C = \mathbf{A} \mathbf{A}_C^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{Q}_C \quad (101)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_{\phi 3 \times 1}^C = A \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{r1}^1 & L_{r2}^1 \\ L_{r1}^2 & L_{r2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{\phi x} \\ Q_{\phi y} \end{bmatrix}_C = \mathbf{A} \mathbf{A}_C^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{Q}_{\phi C} \quad (102)$$

Las componentes de deformación de corte γ'_H y ψ'_H pueden utilizarse de diversas formas para realizar la estabilización. Dentro de un esquema de avance implícito en cada paso resulta:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1}^H &= \int_A \begin{bmatrix} -\eta & \xi \\ -\eta & \xi - 1 \\ 1 - \eta & \xi \end{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \bar{\mathbf{D}}_t^{11} \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} -\eta + \frac{1}{3} & -\eta + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \eta \\ \xi - \frac{1}{3} & \xi - \frac{1}{3} & \xi - \frac{1}{3} \end{bmatrix} dA \begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma_t^4 \\ -\gamma_\eta^5 \\ \gamma_\xi^6 \end{bmatrix} \\ &+ \int_A \begin{bmatrix} -\eta & \xi \\ -\eta & \xi - 1 \\ 1 - \eta & \xi \end{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \bar{\mathbf{D}}_t^{12} \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} -\eta + \frac{1}{3} & -\eta + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \eta \\ \xi - \frac{1}{3} & \xi - \frac{1}{3} & \xi - \frac{1}{3} \end{bmatrix} dA \begin{bmatrix} \sqrt{2}\psi_t^4 \\ -\psi_\eta^5 \\ \psi_\xi^6 \end{bmatrix} \\ &= \int_A \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{D}}_t^{11} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_C) dA \boldsymbol{\gamma}' + \int_A \mathbf{A}_C^T \tilde{\mathbf{D}}_t^{12} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_C) dA \boldsymbol{\psi}' \end{aligned} \quad (103)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_{\phi 3 \times 1}^H = \int_A \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{D}}_t^{12} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_C) dA \boldsymbol{\gamma}' + \int_A \mathbf{A}_C^T \tilde{\mathbf{D}}_t^{22} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_C) dA \boldsymbol{\psi}' \quad (104)$$

Integrando explícitamente en el área

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1}^H &= \frac{A(a+b+c)^{11}}{18} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma_t^4 \\ -\gamma_\eta^5 \\ \gamma_\xi^6 \end{bmatrix} + \frac{A(a+b+c)^{12}}{18} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\psi_t^4 \\ -\psi_\eta^5 \\ \psi_\xi^6 \end{bmatrix} \\ &= \frac{A}{18} \left[(a+b+c)^{11} \left(\sqrt{2}\gamma_t^4 - \gamma_\eta^5 + \gamma_\xi^6 \right) + (a+b+c)^{12} \left(\sqrt{2}\psi_t^4 - \psi_\eta^5 + \psi_\xi^6 \right) \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (105)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_{\phi 3 \times 1}^H = \frac{A}{18} \left[(a+b+c)^{12} \left(\sqrt{2}\gamma_t^4 - \gamma_\eta^5 + \gamma_\xi^6 \right) + (a+b+c)^{22} \left(\sqrt{2}\psi_t^4 - \psi_\eta^5 + \psi_\xi^6 \right) \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (106)$$

con lo cual

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_{3 \times 1}^H \\ \bar{\mathbf{Q}}_{\phi 3 \times 1}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}^{H11} & \tilde{\mathbf{D}}^{H12} \\ \tilde{\mathbf{D}}^{H12} & \tilde{\mathbf{D}}^{H22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}' \\ \boldsymbol{\psi}' \end{bmatrix} \quad (107)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{D}}^{Hij} = \frac{A(a+b+c)^{ij}}{18} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ \text{sim.} & & 1 \end{bmatrix} \quad (108)$$

De esta forma la matriz de rigidez asociada a la estabilización del corte resulta:

$$\mathbf{K}_s^H = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{B}}_s)_{3 \times 15} & \\ & (\tilde{\mathbf{B}}_{\phi s})_{3 \times 6} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_t^{H11} & \tilde{\mathbf{D}}_t^{H12} \\ \tilde{\mathbf{D}}_t^{H21} & \tilde{\mathbf{D}}_t^{H22} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{B}}_s)_{3 \times 15} & \\ & (\tilde{\mathbf{B}}_{\phi s})_{3 \times 6} \end{bmatrix} \quad (109)$$

En tanto que la matriz de rigidez correspondiente a utilizar un punto de integración es:

$$\mathbf{K}_s^M = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{B}}_s)_{3 \times 15} & \\ & (\tilde{\mathbf{B}}_{\phi s})_{3 \times 6} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_t^{C11} & \tilde{\mathbf{D}}_t^{C11} \\ \tilde{\mathbf{D}}_t^{C21} & \tilde{\mathbf{D}}_t^{C22} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{B}}_s)_{3 \times 15} & \\ & (\tilde{\mathbf{B}}_{\phi s})_{3 \times 6} \end{bmatrix} \quad (110)$$

con

$$\tilde{\mathbf{D}}_s^{Cij} = \tilde{\mathbf{D}}_t^{ij} - \tilde{\mathbf{D}}^{Hij} = \frac{A}{9} \begin{bmatrix} a + b - 2c & a - 2b + c & -2a + b + c \\ & a + 4b + 4c & -2a - 2b - 5c \\ & & 4a + b + 4c \end{bmatrix}^{ij} \quad (111)$$

8. EJEMPLOS

En los presentes ejemplos se intenta mostrar que los resultados en modelos de placas coinciden o convergen a los resultados publicados en la literatura para la ZZRT. Es decir el objetivo es validar el modelo de elementos finitos. No es el objetivo de la presente sección (ni del trabajo) evaluar la ZZRT lo cual ya ha sido hecho por otros autores, que han comparado la variación de desplazamientos y tensiones en el espesor del laminado. Sin embargo cuando se tratan láminas curvas en régimen no lineal resulta necesario comparar con modelos numéricos confeccionados con elementos de sólido. En este caso nuevamente se intenta mostrar que los resultados son globalmente similares con ambos modelos lo cual aporta significativamente a la evaluación de la ZZRT pero no se comparan aquí detalladamente ni desplazamientos, ni tensiones en el espesor del laminado.

Los materiales involucrados en los ejemplos utilizados tienen las propiedades (E_I y G_{IJ} en GPa y la densidad (ρ) está expresada en Kg/m^3) indicadas en la Tabla 1, que incluye dos materiales más rígidos (1 y 4) usados en capas externas del laminado y tres materiales (2,3 y 5) usados en el interior (núcleo) del laminado. Los tres laminados considerados son simétricos respecto a la superficie media, de 5 capas y se definen en la Tabla 2 donde “orient.” indica el ángulo en grados que forma el eje principal de ortotropía 1 del material con la dirección x . Los espesores de cada capa se expresan en porcentaje del espesor total del laminado

Mat	E_1	E_2	E_3	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	G_{12}	G_{13}	G_{23}	ρ
1	50	10	10	0,05	0,05	0,25	5	5	5	1000
2	10^{-5}	10^{-5}	0,07585	0,01	0,01	0,01	0,0225	0,0225	0,0225	1000
3	0,01	0,01	0,07585	0,01	0,01	0,01	0,0225	0,0225	0,0225	1000
4	131	10,34	10,34	0,22	0,22	0,49	6,895	6,205	6,895	1627
5	0,00689			0,00						97

Tabla 1: Propiedades de los materiales involucrados (E_I y G_{IJ} en GPa)

Mat	Espesor	Orient.
1	5	0
1	5	90
2	80	0
1	5	90
1	5	0

(1)

Mat	Espesor	Orient.
1	5	0
1	5	90
3	80	0
1	5	90
1	5	0

(2)

Mat	Espesor	Orient.
4	4.1667	0
4	4.1666	90
5	83.334	0
4	4.1666	90
4	4.1667	0

(3)

Tabla 2: Distribución de los materiales en los laminados.

8.1. Placa cuadrada simplemente apoyada con carga sinusoidal

Este ejemplo fue tomado de [Iurlaro et al. \(2013\)](#), la sección está definida por el laminado 1 con un espesor total $t = 0,5\text{m}$. La placa es cuadrada de lado $a = 10\text{m}$ (la relación de aspecto es $a/h = 20$) y se encuentra simplemente apoyada en todo el contorno. La carga aplicada es de variación sinusoidal en ambas direcciones (máxima en el centro y se anula en el contorno) con amplitud $q_0 = 1\text{KPa}$.

Debido a la simetría se modela un cuarto de la placa cuyo centro coincide con el origen de coordenadas. Las condiciones de borde que se imponen son (tipo “hard”):

Borde	u	v	w	θ_x	θ_y	ψ_x	ψ_y
$x = 0$	0,0				0,0	0,0	
$y = 0$		0,0		0,0			0,0
$x = a/2$	0,0	0,0	0,0	0,0			0,0
$y = a/2$	0,0	0,0	0,0		0,0	0,0	

La malla es estructurada, con paso de malla uniforme igual en ambos sentidos $\Delta = 0,15625\text{m}$, que implica 33 nudos por lado, un total de 1089 nudos y 1024 elementos cuadriláteros de 4 nudos (QL) o 512 elementos triangulares de 6 nudos (TLLL).

El desplazamiento vertical del centro de la placa indicado en la referencia es

$$w(0,0) = 0,1118 \times \frac{D_{11}}{a^4} q_0 = 0,6742\text{mm}$$

Con el elemento QL (7232 GdL) se obtiene 0,6740(99,96 %) y con el elemento TLLL (2848 GdL) se obtiene 0,6752(100,14 %) que es ligeramente mayor que el valor de referencia, lo cual está asociado a que las rotaciones son no-conformes. Notar que el modelo con elementos QL tiene 2.5 veces el número de GdL que con elemento TLLL. Por otro lado los estados tensionales en los puntos de integración resultan mucho más suaves usando el elemento cuadrilátero por lo cual estos son en general preferibles si es posible usar mallas estructuradas. Si se considera la teoría de primer orden (FSDT), el valor teórico del desplazamiento vertical del centro de la placa es 0,2472 y los obtenidos por elementos finitos son respectivamente 0,2469(99,86 %) y 0,2483(100,41 %), ligeramente por debajo y por encima del valor de referencia. En la Figura 1 se muestra con carácter ilustrativo la amplitud del desplazamiento adicional para los dos elementos considerados

8.2. Placa empotrada bajo carga uniforme

Para la misma geometría y una carga uniforme $q = 1\text{KPa}$ se consideró el borde empotrado y se obtuvo para el modelo con elementos QL un desplazamiento máximo de $w_{max}^{QL} = 0,6916$

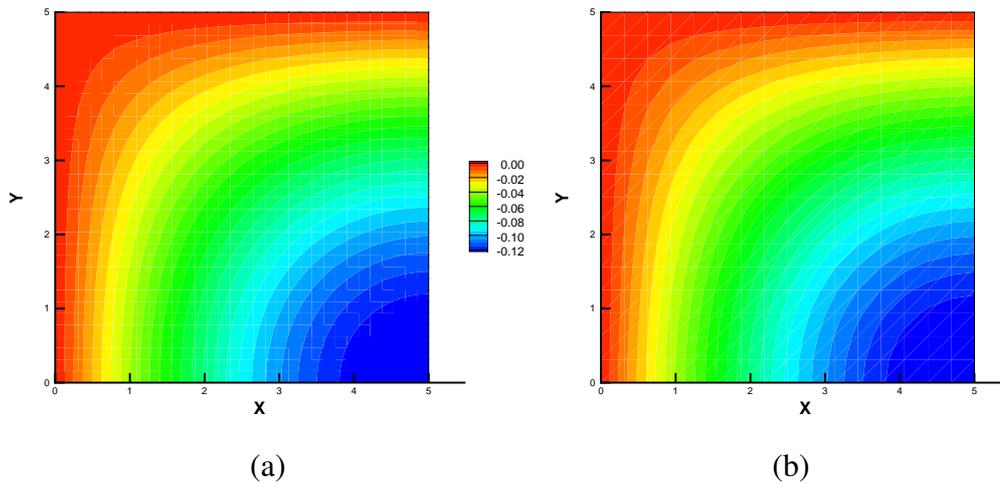


Figura 1: Amplitud de los desplazamiento adicional en la dirección x . (a) usando QL (b) usando TLLL

	Ref.		QL		TLLL	
Modo	$a/t = 10$	$a/t = 100$	$a/t = 10$	$a/t = 100$	$a/t = 10$	$a/t = 100$
(1,1)	1,852	11,95	1,851	11,95	1,850	11,92
(1,3)	5,241	36,17	5,324	37,30	5,143	37,02
(3,3)	7,704	49,80	7,679	49,68	7,733	49,48

Tabla 3: Frecuencias naturales de placas simplemente apoyadas.

y con elementos TLLL $w_{max}^{TLLL} = 0,6985$. En este caso se comparó con un modelo de elementos de sólidos estándar de 20 nudos y una malla de $16 \times 16 \times 9$ (un elemento por capa en las capas externas y 5 elementos en el núcleo). Para este último modelo el desplazamiento resultó $w_{max}^{Solag} = 0,6936$ (promedio entre superficies inferior y superior) que muestra una muy buena correlación entre los modelos de lámina y sólido. Por otro lado usando la FSDT el desplazamiento del centro es apenas $w_{max}^{FSDT} = 0,1134$.

8.3. Vibración de una placa cuadrada

A los fines de comparar con resultados existentes en la literatura (Iurlaro et al. (2013)) se han evaluado frecuencias naturales de una placa cuadrada simplemente apoyada. La sección utilizada es la del laminado 3 y se han considerado dos relaciones de aspecto $a/t = 10$ y $a/t = 100$. Se usó la misma discretización del primer ejemplo (con condiciones de simetría) por lo cual sólo es posible evaluar modos simétricos. En la tabla 3 se muestran las frecuencias adimensionales evaluadas con los dos elementos presentados y los reportados en la literatura. El modo indica el número de semi-ondas en cada dirección y se ha considerado una matriz de masa diagonalizada. Puede observarse una muy buena correlación entre ellas.

Por otro lado, la misma placa del primer ejemplo, simplemente apoyada bajo carga sinusoidal en ambas direcciones del plano, es analizada suponiendo que la carga se aplica temporalmente según una función escalón (Heaviside). La integración temporal se realiza usando el algoritmo de Newmark para el caso implícito y diferencias centrales dentro de un esquema explícito. Para la misma discretización usada antes, utilizando la matriz de rigidez en la configuración original y una matriz de masa diagonalizada, a partir de un análisis lineal de autovalores, se obtiene para el período fundamental $T_{QL}^{autov} = 0,1154$ y $T_{TLLL}^{autov} = 0,1156$. En la Figura 2 se muestra el des-

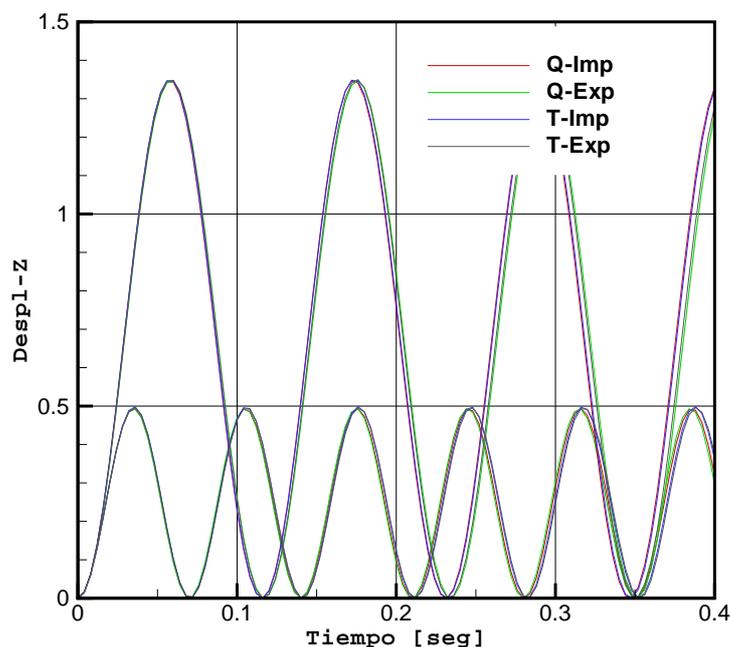


Figura 2: Placa cuadrada simplemente apoyada bajo carga senoidal. Comportamiento dinámico

plazamiento vertical del centro de la placa en función del tiempo. En esa figura se han incluido 8 curvas, cuatro corresponden a la FSDT (las de menor desplazamiento) y cuatro a la ZZRT. Las cuatro curvas corresponden a usar los modelos con cuadriláteros (Q) o triángulos (T) usando alternativamente los esquemas de integración implícitos (Imp) y explícito (Exp). Los resultados son casi idénticos cuando se considera la ZZRT. Las diferencias entre los modelos implícito y explícito son insignificantes y pueden deberse a que la masa rotacional en el esquema explícito ha sido modificada a los fines de hacer el tiempo crítico independiente del espesor de la lámina. Observando los resultados obtenidos con el esquema explícito se observa que las amplitudes de vibración dan ligeramente por debajo del doble del desplazamiento correspondiente a la carga estática $A_{QL} = 1,348$ y $A_{TLL} = 1,350$.

8.4. Sector esférico con cargas lineales

Para realizar comparaciones en láminas con doble curvatura y en el rango no lineal se ha utilizado un sector esférico como se indica en la Figura 3 con un radio $R = 10\text{m}$ y un ángulo de $\alpha = 30^\circ$. Las cargas aplicadas son cargas de líneas normales a la superficie y uniformes, salientes sobre los meridianos A-A ($+x$) y C-C ($-x$) y entrantes sobre los meridianos B-B ($-y$) y D-D ($+y$).

La sección utilizada es la 2 cuya diferencia con la 1 es que el material del núcleo es mucho más rígido en en plano de la lámina para evitar su colapso temprano. En este caso el espesor total es $t = 0,2\text{m}$. La carga de línea de referencia q_0 tiene un valor 1MN/m . La malla utilizada cubre un cuarto de la geometría con 40 divisiones en la dirección del paralelo y 14 en el meridiano, un total de 615 nudos y 520 elementos cuadriláteros o 260 elementos triangulares. A los efectos de comparar, se ha utilizado un modelo de sólidos de 8 nudos (Flores y Oñate (2011)) con la misma discretización de la superficie media y con 6 capas en el espesor. Este elemento de sólido

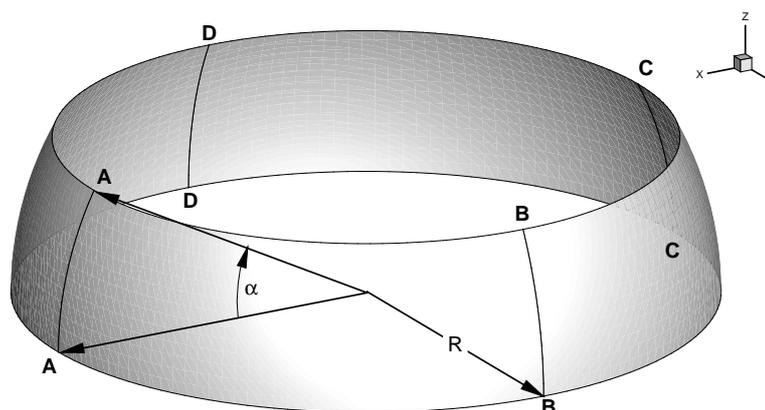


Figura 3: Sector esférico con cargas lineales

utiliza una aproximación en deformaciones impuestas para las deformaciones transversales de corte, de tal forma que el elemento sea adecuado para modelar láminas con elementos de alta relación de aspecto entre sus dimensiones en el plano de la lámina y su dimensión en el espesor de la lámina.

El análisis realizado es no-lineal geométrico y lineal material. El desplazamiento entrante máximo impuesto es de 3m (30 % del radio). En la Figura 4 se ha graficado los desplazamientos entrantes (mayores) y salientes (menores) de los puntos sobre el borde libre inferior del sector. Se incluyen los resultados obtenidos con el elemento cuadrilátero (QL), el triángulo (TLLL) y la aproximación con elementos de sólido (SOLAG). Puede observarse una excelente correlación entre los resultados obtenidos con elementos de lámina y sólido. El elemento triangular resulta en este caso ligeramente más rígido debido que el comportamiento membranar es más pobre y que la cantidad de grados involucrados es menor. Se ha incluido también los resultados obtenidos usando la FSDT con coeficientes de corte estándar $k_x = k_y = \frac{5}{6}$, puede verse que dicha solución es más rígida.

8.5. Pandeo de un cilindro

En este ejemplo se estudia el comportamiento de un cilindro bi-empotrado sometido alternativamente a cargas axiales y presión exterior. El radio del cilindro es 10 y el largo total 20 en tanto que el espesor es $t = 0,25$ con una sección definida por el laminado 2, donde la dirección principal del laminado es la dirección tangente al paralelo. Se ha modelado sólo un octavo del cilindro (1 cuadrante y la mitad de la longitud) imponiendo condiciones de simetría en 3 de sus borde y de empotramiento en el restante. Esto restringe arbitrariamente los modos de bifurcación a dichas simetrías pero alivia sustancialmente el modelo numérico de elementos de sólido usado como comparación. La discretización con elementos QL incluye 2623 nudos y 2520 elementos que resultan de una malla estructurada con 60 divisiones en el cuadrante considerado y 42 divisiones a lo largo de la mitad del cilindro. Nuevamente se ha recurrido a un modelo con elementos de sólido para tener una solución de comparación. La malla en este caso incluye la misma discretización en el plano de la lámina y 7 elementos en el espesor.

Las cargas críticas que se obtienen son las indicadas en la tabla 4, puede verse una muy buena correlación entre el modelo de sólidos y el de láminas cuando se usa la ZZRT.

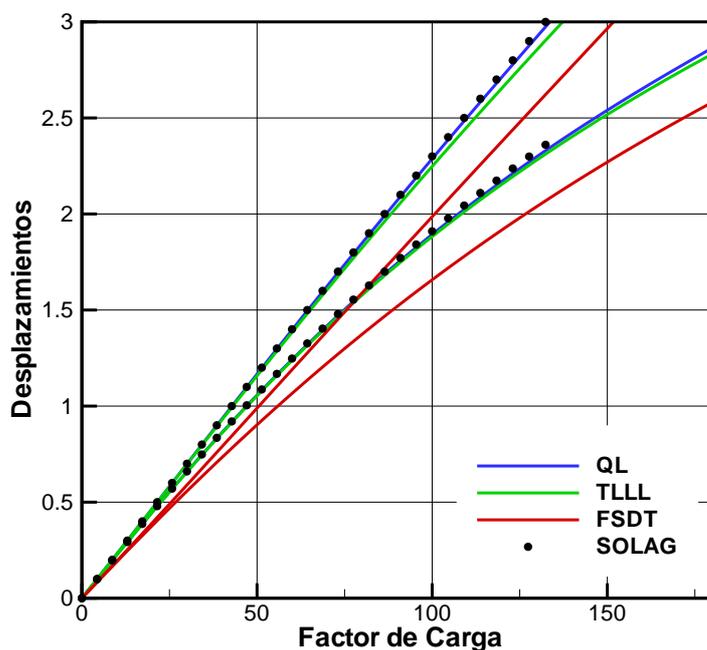


Figura 4: Sector esférico con cargas lineales

Modelo	Carga Axial [MN/m]	Presión Externa [MPa]
Sólidos	7,040	0,3888
ZZRT	7,093	0,3988
FSDT	20,529	0,6583

Tabla 4: Cargas críticas

Estas similitudes y diferencias entre cargas críticas tienen su correlación con la forma de los modos de pandeo. En la Figura 5 se muestran los modos de pandeo frente a carga axial. Allí puede notarse que en el caso axial el modo de pandeo predicho por la FSDT es sustancialmente diferente del que predice el modelo con elementos 3D, en tanto que si bien la ZZRT no indica el mismo número de ondas (lo cual puede deberse a una insuficiente discretización del modelo de sólidos), el patrón es similar. Finalmente en la Figura 6 se muestran los modos de pandeo debido a presión lateral, donde nuevamente puede apreciarse la similitud entre el modelo de sólidos y la ZZRT, en tanto que se aprecia la mayor rigidez que introduce la FSDT con un menor número de ondas circunferenciales.

9. CONCLUSIONES

Se ha presentado una posible implementación de la teoría refinada de zigzag (ZZRT) en dos elementos de lámina basados en la teoría de laminas propuesta por Simo y colaboradores. Los elementos son un cuadrilátero bilineal y un triángulo de 6 nudos con interpolación lineal para la geometría de la superficie media e interpolación lineal no conforme para el campo director.

Los aspectos principales en la implementación son:

- Los desplazamientos adicionales son desplazamientos jerárquicos expresados en coorde-

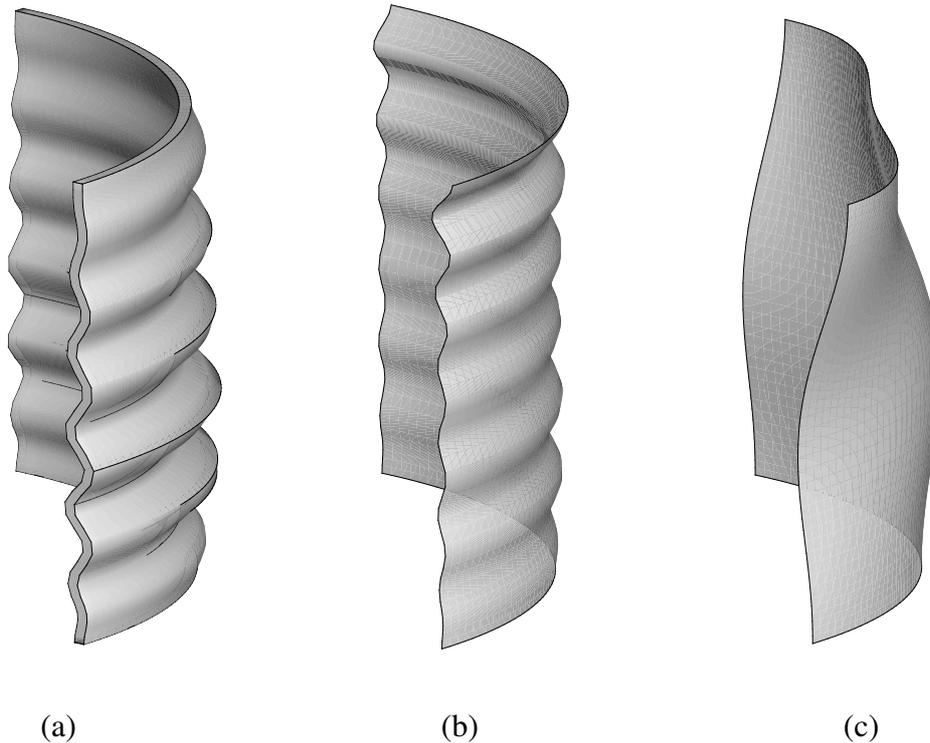


Figura 5: Modo de pandeo frente a carga axial (a) sólidos; (b)ZZRT; (c)FSDT

nadas locales de un sistema convectivo sobre la superficie media de la lámina

- Se restringe a modelos con pequeñas deformaciones elásticas por lo cual no se distingue entre distintas medidas de deformación.
- Las deformaciones se evalúan como la suma de las que provienen del cambio de configuración de la superficie media y su campo director (FSDT) más las que provienen de los desplazamientos adicionales tal como surge de la ZZRT.
- Las aproximaciones en desplazamientos impuestos (ANS) utilizadas para el corte transversal en la FSDT se aplican también para las deformaciones de corte adicionales provenientes de la ZZRT.
- Se ha considerado una matriz de masa diagonalizada

Las principales conclusiones que pueden mencionarse son:

- Ambos elementos propuestos muestran un buen comportamiento y convergen a los resultados de la ZZRT en los ejemplos de placas considerado, tanto en equilibrio estático como las frecuencias naturales de vibración.
- La implementación con matriz de masa diagonalizada indica un comportamiento dinámico adecuado con resultados idénticos en las dos versiones (implícita y explícita) consideradas.
- La comparación con modelos de sólido en ejemplos de láminas curvas muestra una excelente correlación lo cual no sólo valida los elementos sino que aumenta la potencialidad de la ZZRT.

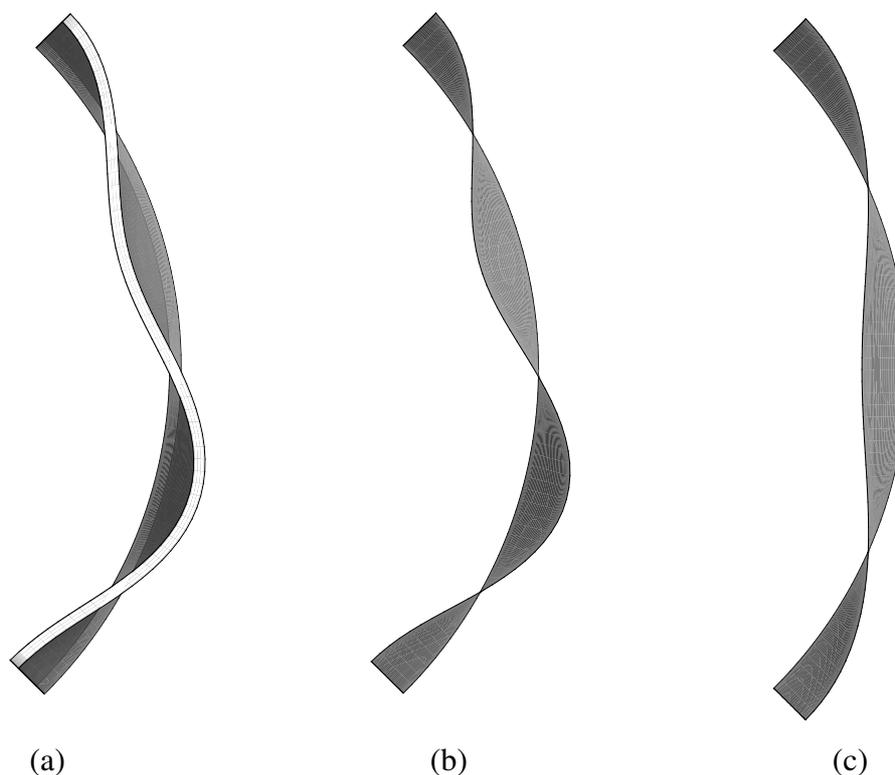


Figura 6: Modo de pandeo frente a presión externa (a) sólidos; (b)ZZRT; (c)FSDT

- La evaluación de cargas críticas en geometrías curvas muestra una excelente correlación en comparación con modelos de sólido y pone nuevamente de manifiesto las limitaciones de la FSDT.
- Las aproximaciones en deformaciones impuestas (ANS) para el corte funcionan correctamente. Lo mismo puede decirse del esquema de estabilización utilizado para el corte transversal en elemento TLLL con un punto de integración.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo financiero de CONICET (Argentina) y de la SeCyT-UNC. También agradece al Prof. Oñate de CIMNE-UPC por haberlo introducido en el tema.

REFERENCIAS

- Carrera E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*, 56:298–308, 2003.
- Eijo A., Oñate E., y Oller S. A four-noded quadrilateral element for composite laminated plates/shells using the refined zigzag theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 95:631–660, 2013.
- Flores F. y Oñate E. Un elemento de sólido con una mejora en el comportamiento del corte transversal para el tratamiento de láminas. *Rev. Int. Métodos Numér. Cál. Diseño Ing.*, 27(4):256–268, 2011.
- Flores F., Oñate E., y Zárata F. New assumed strain triangles for non linear shell analysis. *Computational Mechanics*, 17:107–114, 1995.

- Gherlone M., Tessler A., y M. D.S. C0 beam element based on the refined zigzag theory for multilayered composite and sandwich laminates. *Composite Structures*, 93:2882–2894, 2011.
- Iurlaro L., Gherlone M., Di Sciuva M., y Tessler. Assessment of the refined zigzag theory for bending, vibration, and buckling of sandwich plates: a comparative study of different theories. *Composite Structures*, 106:777–792, 2013.
- Kirchhoff G. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. *Journal für die reine und Angewandte Mathematik*, 40:51–88, 1850.
- Martinez X., Rastellini F., Oller S., Flores F., y Oñate E. Computationally optimized formulation for the simulation of composite materials and delamination failures. *Journal of Composites part B*, 42:134–144, 2011.
- Oñate E., Eijo A., y Oller S. Simple and accurate two-noded beam element for composite laminated beams using a refined zigzag theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213-216:362–382, 2012.
- Reddy J. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC Press, 2004.
- Reddy J. y Robbins D. Theories and computational models for composite laminates. *Appl Mech Revs*, 47:147–165, 1994.
- Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 12:69–79, 1945.
- Simo J. y Fox D. On a stress resultant geometrically exact shell model. part i: Formulation and optimal parametrization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 72:267–304, 1989.
- Simo J., Fox D., y Rifai M. On a stress resultant geometrically exact shell model. part iii: Computational aspects of the non-linear theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 79:21–70, 1990.
- Tessler A., Di Sciuva M., y Gherlone M. A consistent refinement of first-order shear deformation theory for laminated composite and sandwich plates using improved zigzag kinematics. *J Mech Mater Struct*, 5:341–367, 2010.