

## VIBRACIONES LIBRES DE UNA MICRO VIGA EULER BERNOULLI CON VÍNCULOS ELÁSTICOS

Graciela I. Guerrero <sup>a,b</sup>, Diana V. Bambill <sup>b,c</sup> y Daniel H. Felix <sup>b</sup>

<sup>a</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Patagonia San Juan Bosco, km 4, 9000  
Comodoro Rivadavia, Argentina, [graisague@hotmail.es](mailto:graisague@hotmail.es), <http://www.umpa.edu.ar/gmc>

<sup>b</sup>Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Alem 1253, 8000 Bahía Blanca,  
Argentina, <http://www.uns.edu.ar>

<sup>c</sup>CONICET, Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, <http://www.conicet.gov.ar>

**Palabras Clave:** Micro viga, Euler-Bernoulli, Teoría Modificada de la Tensión de Par, Vínculos elásticos, Frecuencia natural, Ritz.

**Resumen.** En este trabajo se presenta un análisis de las vibraciones libres de estructuras mecánicas a escalas micrométricas, mediante una formulación variacional basada en el principio de la mínima energía. El modelo posee un parámetro de escala de longitud interno del material para considerar el efecto de las micro dimensiones, a diferencia del modelo clásico de vigas Euler-Bernoulli. El análisis se basa en la Teoría Modificada de la Tensión de Par y se utiliza el Método de Ritz para encontrar una solución aproximada al problema de vibraciones transversales. Se presentan las tres primeras frecuencias naturales para una micro viga de sección constante sustentada por vínculos elásticos. Los resultados numéricos incluyen las frecuencias obtenidas para el modelo de viga clásica. Es observable la incidencia de la relación entre la altura de la viga y la constante de escala de longitud del material cuando se trabaja a escala micrométrica.

## 1 INTRODUCCIÓN

Los avances tecnológicos en el área de la electromecánica impulsaron el diseño de estructuras cada vez más pequeñas, sobretodo en sistemas micro y nano electromecánicos (MEMS y NEMS), por lo que fue necesario una nueva formulación para describir el comportamiento a de nivel micro y nano escala, allí donde se pone en evidencia la heterogeneidad de los materiales.

Lo expuesto se fundamenta por una parte, en que los métodos experimentales concluyeron en la importancia del efecto de escala en las propiedades mecánicas cuando los elementos estructurales son micrométricos. Por otra parte, en que la teoría clásica del medio continuo considera un comportamiento macroscópico de la materia y por lo tanto es incapaz de predecir fenómenos dependientes de tamaño, dado que asume que sus ecuaciones resultan válidas para cualquier escala.

Los primeros trabajos en micro estructuras corresponden a los hermanos Cosserat ([Cosserat and Cosserat, 1909](#)), quienes desarrollaron la teoría del medio continuo generalizado. En ella se manifiesta que el comportamiento mecánico de un punto material está determinado por todos los puntos del medio continuo. Este concepto, que se denomina no local y que corresponde a un medio polar continuo, considera la coexistencia de la tensión clásica con otra tensión de par. Aquí se incorpora la idea de que un punto material interactúa con sus vecinos a través de fuerzas y pares. Dichos puntos se consideran además como cuerpo rígido, por lo que se trasladan y rotan, dando lugar a seis grados de libertad. La teoría mencionada predice un comportamiento que depende de las dimensiones del cuerpo analizado, pudiéndose observar que la rigidez aumenta con la disminución del tamaño. Dicho cambio en el comportamiento a escala micrométrica se conoce como efecto de escala.

Los estudios de [Cosserat and Cosserat \(1909\)](#) recién cobraron relevancia con el desarrollo del modelo cinemático que planteó Mindlin ([Mindlin, 1964](#); [Mindlin et al., 1968](#)) en la década del sesenta, quien incorporó el concepto de micro estructura.

Se marcaron dos tendencias a partir de la teoría polar de Cosserat ([Cosserat and Cosserat, 1909](#)). Las teorías de grado superior (del primer gradiente, segundo gradiente, etc.) cuyos trabajos más importantes fueron publicados por [Mindlin \(1964\)](#), [Mindlin et al. \(1968\)](#), y las teorías de orden superior que consideran que el punto rota, se traslada y se deforma, incrementándose los grados de libertad a doce ([Eringen et al. 1964](#)). Entre ellas se desarrolló para esa época la Teoría de Tensión de Par, que incorpora dos constantes adicionales a las dos clásicas de Lamé para tener en cuenta el efecto de escala. Ante la dificultad para determinar experimentalmente dichas constantes, [Yang et al \(2002\)](#) propuso un modelo no local que involucra una sola constante, creando la Teoría Modificada de la Tensión de Par (Modified Couple Stress Theory, MCST), en la cual el tensor de tensión de Par es simétrico.

En los últimos quince años se publicaron numerosos estudios sobre análisis de vibraciones libres en micro vigas utilizando la MCST ([Park et al. 2006](#), [Asghari et al. 2010](#), [Nateghi et al. 2012](#); [Ma et al. 2008](#); [Jam et al. 2012](#); [Şimşek et al. 2012](#); [Wang et al. 2013](#); [Ghayesh et al. 2012](#); [Şimşek et al. 2013](#); [Sahmani et al. 2013](#); [Rezazadeh et al. 2012](#); [Kong et al. 2008](#); [Kong et al. 2009](#)). Entre ellos se destacan los de [Kong et al \(2008, 2009\)](#), allí se concluyó en que la diferencia de las frecuencias naturales halladas por la teoría clásica y aquellas que predice la MCST es significativa cuando las dimensiones de la viga son comparables con el parámetro de escala de longitud propia del material.

## 2 FORMULACIÓN

La Teoría de la Tensión de Par Modificada, para definir la energía interna propia de la

micro viga, incluye un término adicional debido a las tensiones de par originadas por una micro rotación independiente, que se agrega a la rotación clásica. En este modelo los grados de libertad se reducen a cuatro.

Esta teoría, al tener en cuenta una sola constante para hallar el tensor de tensión de par, resulta de aplicación sencilla. Dicha constante  $l$  es un parámetro de escala de longitud que depende del material y se determina experimentalmente.

Para un material elástico lineal isótropo, ocupando un dominio en el espacio de tres dimensiones  $\Omega$ , se plantea la energía interna de deformación  $U_1$  de una micro viga, de acuerdo a la MCST (Akgöz y Civalek, 2013):

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) d\Omega \quad (1)$$

siendo:

$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$	Tensor de Tensiones
$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$	Tensor de Deformaciones
$m_{ij} = 2l^2 \mu \chi_{ij}$	Tensor de Tensiones de Par Desviador
$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i})$	Tensor de Curvatura Simétrico
$\Omega$	Volumen de la micro viga
$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	Constante de Lamé
$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$	Constante de Lamé
$\theta_i = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j}$	Vector de Rotación
$E$	Módulo de Elasticidad
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$e_{ijk}$	Tensor de Levi Civita
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$u_i$	Campo de Desplazamientos
$l$	Parámetro de escala

El modelo de micro viga está indicado en la [Figura 1](#), la viga tiene sección transversal rectangular  $A$  y longitud  $L$ . En ambos extremos existen vínculos elásticos a traslación y rotación. El eje cartesiano  $x$  se asume coincidente con el eje longitudinal de la micro viga. Las vibraciones transversales se producen en el plano  $x$ - $z$ .

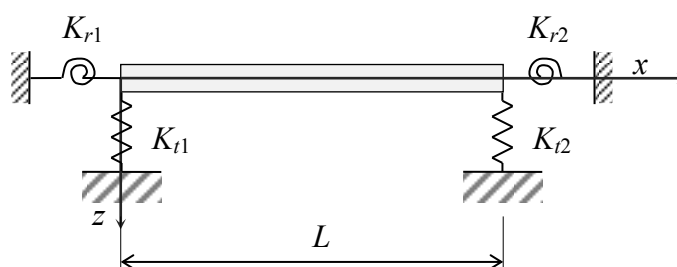


Figure 1: Micro viga con vínculos elásticos

Para hallar la ecuación característica que permite conocer los valores de las frecuencias naturales por el Método de Ritz, es necesario obtener la energía total del sistema.

Se consideraron tres instancias de cálculo, teniendo en cuenta distintas posibilidades de involucrar al coeficiente de Poisson en el término de la rigidez del cuerpo, como una opción surgida a partir del trabajo de Akgöz y Civalek, (2013)

## 2.1 Energía total del sistema

La energía total  $\pi$  está formada por energía interna de deformación  $U$ , energía potencial de las fuerzas externas  $V$  y energía cinética  $T$ :

$$\pi = U - V + T; \quad (2)$$

donde  $U = U_1 + U_2$ ; con  $U_2$  energía de los vínculos elásticos; en este caso particular por tratarse de vibraciones libres la energía potencial de las fuerzas externas  $V$  es nula.

### 3.1.a. Energía interna de deformación

La energía interna de deformación de la micro viga Euler-Bernoulli dada por la ecuación (1), se desarrolla en término de corrimientos. Se considera el campo de desplazamientos como se indica.

$$\begin{aligned} u_1 &= u(x, t) = -zw', \text{ corrimiento según el eje } x \text{ (axial)}; \\ u_2 &= v(x, t) = 0, \text{ corrimiento según el eje } y \text{ (normal al plano de la Figura)}; \\ u_3 &= w(x, t), \text{ corrimiento según el eje } z \text{ (transversal al eje de la viga)}. \end{aligned} \quad (3. a, b, c)$$

con  $w' = \frac{\partial w}{\partial x}$

Desarrollando la expresión de tensiones  $\sigma_{ij}$  se obtiene el tensor de tensiones clásico

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (\lambda + 2\mu) \begin{bmatrix} -zw'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

con  $w'' = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ . De manera similar con  $\varepsilon_{ij}$  se obtiene el tensor de deformaciones clásico

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -zw'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (5)$$

de  $\theta_i$  se obtiene el vector de rotación

$$\theta_i = [0, -w', 0]; \quad (6)$$

de  $\chi_{ij}$  el tensor de curvatura simétrico

$$\chi_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \chi_{12} & 0 \\ \chi_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & w'' & 0 \\ w'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (7)$$

del mismo modo se resuelve y obtiene el tensor de par desviador  $m_{ij}$ , que también resulta simétrico

$$m_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & m_{12} & 0 \\ m_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -l^2 \mu \begin{bmatrix} 0 & w'' & 0 \\ w'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Volviendo a la expresión (1) de la energía interna de la micro viga, desarrollando la energía de acuerdo con la notación indicial y considerando los términos no nulos se llega a:

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)(-zw''); \varepsilon_{11} = -zw''; \chi_{12} = -\frac{1}{2}w''; m_{12} = -l^2\mu w''; \quad (9.a-d)$$

tomando en cuenta que el diferencial de volumen es  $d\Omega = dA dx$ , el momento de inercia con respecto al eje  $y$ :  $I = \int z^2 dA$ , y además que  $\lambda + 2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ , la expresión de la energía interna propia de la micro viga resulta:

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^L [(\lambda + 2\mu)I + l^2\mu A](w'')^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L J(w'')^2 dx \quad (10)$$

donde  $J$  es la constante de rigidez de la viga:

$$J = ((\lambda + 2\mu)I + \mu A l^2) = \frac{EI(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{EA}{2(1+\nu)} l^2. \quad (11)$$

### 3.1.b. Energía de deformación de los vínculos elásticos

La energía de deformación debido a los vínculos elásticos es el trabajo generado al deformarse los mismos. Si se consideran restricciones elásticas a traslación y rotación en ambos extremos de la micro viga resulta:

$$U_2 = \frac{1}{2} \left[ K_{t1} w(0, t)^2 + K_{t2} w(L, t)^2 + K_{r1} (w')_{x=0}^2 + K_{r2} (w')_{x=L}^2 \right] \quad (12)$$

siendo  $K_{t1}$ ,  $K_{r1}$ ,  $K_{t2}$ ,  $K_{r2}$  las constantes de rigidez de los vínculos elásticos externos. [Figura 1](#)

### 3.1.c. Energía cinética

Es necesario considerar la energía cinética debido a que estamos frente a un problema dinámico, en el caso de la micro viga es:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A (\dot{w})^2 dx; \quad (13)$$

con  $\rho$  densidad del material y  $\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}$ .

### 3.1.d. Energía total

Finalmente la energía total (2) queda expresada como:

$$\pi = \frac{1}{2} \left[ \int_0^L J(w'')^2 dx + K_{t1} w(0, t)^2 + K_{r1} (w')_{x=0}^2 + K_{t2} w(L, t)^2 + K_{r2} (w')_{x=L}^2 + \int_0^L \rho A (\dot{w})^2 dx \right]. \quad (14)$$

Asumiendo un movimiento armónico proponemos una solución aproximada para describir el desplazamiento transversal de la micro viga para cualquier sección y en cualquier instante de tiempo  $t$ , de la forma:

$$w(x, t) = W(x) e^{i\omega t}; \quad (15)$$

donde  $W(x)$  es la amplitud del desplazamiento transversal y  $\omega$  la frecuencia circular natural de vibración transversal.

La energía total resulta:

$$\pi = \frac{1}{2} \left[ \int_0^L J(W'')^2 e^{i2\omega t} dx + K_{t1} W(0)^2 e^{i2\omega t} + K_{r1} (W')^2_{x=0} e^{i2\omega t} + K_{t2} W(L)^2 e^{i2\omega t} + K_{r2} (W')^2_{x=L} e^{i2\omega t} + \int_0^L \rho A (i\omega)^2 W^2 e^{i2\omega t} dx \right]; \quad (16)$$

Mediante la aplicación del principio de mínima energía del sistema, obtenemos la ecuación gobernante del problema planteado. La ecuación variacional resulta:

$$\delta\pi = 0.$$

La ecuación variacional planteada puede ser resuelta en forma aproximada mediante la aplicación de método de Ritz.

### 3 MÉTODO DE RITZ

En el método de Ritz se asume la función aproximada  $W_a(x)$  como amplitud de desplazamiento de la micro viga. Por ejemplo, para hallar las tres primeras frecuencias se necesita al menos una ecuación característica de tercer grado. En este caso se genera considerando tres términos para la función aproximada ( $n=3$ ).

$$W(x) \sim W_a(x) = \sum_{k=1}^n C_k \psi_k(x) = C_1 \psi_1(x) + C_2 \psi_2(x) + C_3 \psi_3(x) \quad (17)$$

con  $\psi_k(x)$  función que depende de las condiciones de borde y  $C_k$  constante desconocida que acompaña a la misma.

La energía total (16) se minimiza con respecto a las constantes que acompañan a los términos de la función aproximada y que son desconocidas, resulta así  $\frac{\partial \pi}{\partial C_j} = 0$ , de la cual se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial C_j} = & \int_0^L J W'' \frac{\partial W''}{\partial C_j} dx + K_{t1} W(0) \frac{\partial W(x)}{\partial C_j} \Big|_{x=0} + K_{r1} W'(0) \frac{\partial W'(x)}{\partial C_j} \Big|_{x=0} \\ & + K_{t2} W(L) \frac{\partial W(x)}{\partial C_j} \Big|_{x=L} + K_{r2} W'(L) \frac{\partial W'(x)}{\partial C_j} \Big|_{x=L} - \int_0^L \rho A \omega^2 W \frac{\partial W}{\partial C_j} dx = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Se obtiene un sistema de tres ecuaciones lineales en  $C_1, C_2$  y  $C_3$ .

$$\frac{\partial \pi}{\partial C_1} = 0; \quad \frac{\partial \pi}{\partial C_2} = 0; \quad \frac{\partial \pi}{\partial C_3} = 0; \quad (19)$$

Se adopta un parámetro adimensional para la frecuencia en función de las características físico-geométricas de la micro viga de la forma

$$\omega_- = \sqrt{\frac{\rho A \omega^2}{J}} L^4. \quad * \quad (20)$$

y para las constantes de los vínculos

$$k_{t1} = \frac{L^3 K_{t1}}{J}; \quad k_{t2} = \frac{L^3 K_{t2}}{J}; \quad k_{r1} = \frac{L K_{r1}}{J}; \quad k_{r2} = \frac{L K_{r2}}{J} \quad (21)$$

Finalmente las ecuaciones se convierten en

$$C_1(\eta_{1,1} - \omega_-^2 \lambda_{1,1}) + C_2(\eta_{1,2} - \omega_-^2 \lambda_{1,2}) + C_3(\eta_{1,3} - \omega_-^2 \lambda_{1,3}) = 0; \quad (22)$$

$$C_1(\eta_{2,1} - \omega_-^2 \lambda_{2,1}) + C_2(\eta_{2,2} - \omega_-^2 \lambda_{2,2}) + C_3(\eta_{2,3} - \omega_-^2 \lambda_{2,3}) = 0; \quad (23)$$

$$C_1(\eta_{3,1} - \omega_-^2 \lambda_{3,1}) + C_2(\eta_{3,2} - \omega_-^2 \lambda_{3,2}) + C_3(\eta_{3,3} - \omega_-^2 \lambda_{3,3}) = 0. \quad (24)$$

con

$$\eta_{i,j} = L^3 \int_0^L \psi_i(x) \psi_j(x) dx + k_{t1} \psi_i(0) \psi_j(0) + k_{r1} L^2 \psi_i'(0) \psi_j'(0) + k_{t2} \psi_i(L) \psi_j(L) + k_{r2} L^2 \psi_i'(L) \psi_j'(L); \quad (25)$$

$$\lambda_{i,j} = \frac{1}{L} \int_0^L \psi_i(x) \psi_j(x) dx. \quad (26)$$

Para descartar la solución trivial del sistema, el determinante de los coeficientes que multiplican a  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , debe ser nulo. Se halla así la ecuación de tercer grado que permite conocer los autovalores  $\omega_-$  del problema, la cual se puede expresar en la forma:

$$|[\eta] - \omega_-^2 [\lambda]| = 0 \quad (27)$$

#### 4 CÁLCULO DE LAS FUNCIONES APROXIMADAS

Se adoptan funciones polinómicas que dependen de las constantes que involucran las condiciones de vínculo y del índice  $k$  que varía de 1 a 3, de acuerdo al término que corresponda en las matrices de la ecuación (27):

$$\psi_k(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^{k-1} \Psi(x), \text{ con } \Psi(x) = \alpha_1 \left(\frac{x}{L}\right)^4 + \alpha_2 \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \alpha_3 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \alpha_4 \left(\frac{x}{L}\right)^1 + \alpha_5; \quad (28)$$

y  $k = i$  o  $k = j$ . Para hallar estas constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  y  $\alpha_5$  es necesario aplicar condiciones de borde. Planteamos un caso general. Se trata de una viga cuya sujeción es elástica, lo que implica que los apoyos permiten desplazamientos y rotaciones compatibles con los vínculos cuyas constantes elásticas son conocidas.

$$\text{Para } x=0 \quad M_{y1} = K_{r1} W'(0) \quad \text{y} \quad Q_{y1} = -K_{t1} W(0)$$

$$\Psi''(0) = \frac{k_{r1}}{L} \Psi'(0); \quad \Psi'''(0) = -\frac{k_{t1}}{L} \Psi(0) \quad (29)$$

$$\text{y para } x=L \quad M_y = -K_{r2} W'(L) \quad \text{y} \quad Q_y = K_{t2} W(L)$$

$$\Psi''(L) = \frac{k_{r2}}{L} \Psi'(L); \quad \Psi'''(L) = -\frac{k_{t2}}{L} \Psi(L) \quad (30)$$

Con el sistema de cuatro ecuaciones (29-30) con cinco incógnitas, adjudicando a la constante  $\alpha_3$  el valor 1 (uno), se obtienen el resto de las constantes. Estas expresiones permiten hallar las funciones aproximadas para todas las posibilidades de vinculación, desde las condiciones de sustentación rígidas hasta las de ausencia de vinculación, contemplando además las de vínculos elásticos para distintos valores de las constantes elásticas.

## 5 ANÁLISIS DE LA VINCULACIÓN

Es posible analizar distintas vinculaciones a partir del mismo planteo teniendo en cuenta los valores que adoptan las constantes elásticas de los vínculos, como por ejemplo se indica a continuación en la [Tabla 1](#)

Tipo de vínculo	$k_{t1}$	$k_{r1}$	$k_{t2}$	$k_{r2}$
Simplemente apoyada	$\rightarrow \infty$	0	$\rightarrow \infty$	0
Empotrada-empotrada	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$
Empotrada-libre	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	0	0
Elásticos	$> 0$	$> 0$	$> 0$	$> 0$

Tabla 1: Condiciones de vincula de la micro viga.

## 6 FRECUENCIAS NATURALES

Resolviendo la ecuación característica o trascendental (27) se obtienen los coeficientes de frecuencia dados por la expresión (20), y es aquí donde puede hacerse la distinción de los parámetros geométricos de la viga.

El término "J" contempla el caso de una viga clásica y el de una micro viga también, dado que depende del parámetro de escala de longitud "l", expresión (11). La constante del material  $\mu$  es también conocida módulo de elasticidad transversal (usualmente denominado con G). la expresión  $l/h$  es la relación entre la constante de escala l y la altura h de la micro viga. Para el caso de una sección rectangular la rigidez J se convierte en:

$$J = \frac{EI \left[ (1 - \nu) + 6 \left( \frac{l}{h} \right)^2 (1 - 2\nu) \right]}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (31)$$

Si el coeficiente  $\nu$  y el parámetro de escala de longitud l se consideran nulos, resulta el caso de una viga clásica con  $J = EI$ . A continuación se modelaron una serie de ejemplos numéricos, cuyos resultados se presentan en tablas y gráficos.

### 6.1. Modelo 1

En el primer modelo el coeficiente de Poisson se considera nulo en todo el cálculo, y por lo tanto de la ecuación (31) se obtiene

$$J = EI \left[ 1 + 6 \left( \frac{l}{h} \right)^2 \right]; \quad (32)$$

En la [Tabla 2](#) se muestran los dos primeros coeficientes de frecuencia natural  $\omega_{-p} = \omega_p^2 L^2 \sqrt{\rho A / J}$ , con  $p=1, 2$ ; para vigas con vínculos elásticos. Las condiciones de borde en los extremos de la viga se asumen simétricas:  $k_t = k_{t1} = k_{t2} \rightarrow \infty$ , constante, y  $k_r = k_{r1} = k_{r2}$  variable entre 0 e infinito. Cuando  $k_r$  asume los valores límite aparecen las condiciones de borde clásicas y es posible presentar una comparación con los coeficientes del trabajo de [Ghannadpour et al. \(2013\)](#), para la frecuencia fundamental de la viga simplemente apoyada S-S y empotrada-empotrada E-E. Puede observarse que para valores entre 1 y 100 de las constantes de rigidez del resorte rotacional, se producen las variaciones más notorias de los coeficientes de frecuencia fundamental. A partir del valor 100 y para valores mayores se puede asumir a los vínculos a rotación como rígidos.



		$l/h$				
		0	0.25	0.50	0.75	1
$\omega_{-1}$	$k_{r1} = k_{r2}$					
	0	9.87157029	11.5754422	15.6083231	20.6478712	26.1177202
	Ghannadpour et al. (2013)	9.8696	-	-	-	-
	0.01	9.89113239	11.7039152	15.7815560	20.8770368	26.4075943
	0.1	10.0678200	11.8055655	15.9186212	21.0583570	26.6369482
	0.5	10.7843404	12.6457602	17.0515395	22.5570671	28.5326832
	1	11.5546960	13.5490821	18.2695785	24.1683813	30.5708523
	10	17.2735925	20.2550828	27.3119480	36.1303120	45.7016305
	100	21.5424696	25.2607849	34.0616354	45.0593094	56.9960178
	1000	22.2849276	26.1313941	35.2355645	46.6122717	58.9603769
	10000	22.3648161	26.2250716	35.3618792	46.7793704	59.1717420
	100000	22.3728630	26.2345074	35.3746025	46.7962017	59.1930321
	1000000	22.3736675	26.2355295	35.3758746	46.7978845	59.1951607
$\rightarrow \infty$	22.3737569	26.2355557	35.3760159	46.7980715	59.1953972	
Ghannadpour et al. (2013)	22.3733	-	-	-	-	
$\omega_{-2}$	0	11.5890896	13.5894123	18.3239597	24.2403209	30.6618494
	0.01	34.9157557	40.9423530	55.2066574	73.0315449	92.3784073
	0.1	44.1326409	51.7501090	69.7798325	92.3104409	116.763993
	0.5	44.6404452	52.3455622	70.5827415	93.3721928	118.107517
	1	45.2433420	53.0525214	71.5360051	94.6332421	119.702632
	10	51.9487247	60.9152796	82.1381460	108.658556	137.443407
	100	60.6927508	71.1685591	95.9636653	126.947999	160.577926
	1000	62.6799010	73.4986994	99.1056257	131.104423	165.835431
	10000	62.9034180	73.7607962	99.4590371	131.571942	166.426802
	100000	62.9259882	73.7872622	99.4947237	131.611513	166.486517
	1000000	62.9282925	73.7901505	99.4983671	131.623971	166.492613
	$\rightarrow \infty$	62.9285308	73.7902437	99.4987440	131.624469	166.493244
	$\omega_{-3}$	0	44	51.5945736	69.5701087	92.0326055
0.01		44.0130662	51.6098952	69.5907682	92.0599355	116.447628
0.1		119.357027	139.958521	188.720031	249.653141	315.789014
0.5		115.392374	135.309553	182.451363	241.360473	305.299527
1		115.086489	134.950871	181.967717	240.720669	304.490232
10		114.492357	134.254190	181.028313	239.477954	302.918308
100		123.477933	144.790711	195.235755	258.272634	326.691906
1000		127.132214	149.075736	201.013681	265.916112	336.360226
10000		127.580562	149.601471	201.722582	266.853900	337.546443
100000		127.626407	149.655229	201.795069	266.949792	337.667738
1000000		127.631109	149.661201	201.802503	266.959625	337.680176
$\rightarrow \infty$		127.631500	149.661201	201.803122	266.960444	337.681213

Tabla 2: Coeficientes de frecuencia con distintas condiciones de vínculo:  $k_{t1} \rightarrow \infty$ ;  $k_{t2} \rightarrow \infty$ ;

$$J = EI \left[ 1 + 6 \left( \frac{l}{h} \right)^2 \right]. \text{ Modelo 1}$$

		$l/h$				
$k_{r1} = k_{r2}$		0	0.25	0.50	0.75	1
$\omega_{-1}$	0	9.87157029	11.2052608	14.4875045	18.7199798	23.3924658
	0.01	9.89113239	11.3296252	14.6482977	18.9277482	23.6520929
	0.1	10.0678200	11.4280247	14.7755203	19.0921385	23.8575149
	0.5	10.7843404	12.2413501	15.8270849	20.4509141	25.5554394
	1	11.5546960	13.1157839	16.9576577	21.9117800	27.3809357
	10	17.2735925	19.6073274	25.3507033	32.7568254	40.9328923
	100	21.5424696	24.4529478	31.6157022	40.8521224	51.0487664
	1000	22.2849276	25.2957149	32.7053326	42.2600847	52.8081544
	10000	22.3648161	25.3863966	32.8225768	42.4115814	52.9974645
	100000	22.3728630	25.3955307	32.8343864	42.4268412	53.0165331
	1000000	22.3736675	25.3964440	32.8355671	42.4283668	53.0184396
	10000000	22.3737346	25.3965201	32.8356656	42.4284940	53.0185985
$\rightarrow \infty$	22.3737569	25.3965454	32.8356983	42.4285364	53.0186514	
$\omega_{-2}$	0	11.5890896	13.1548243	17.0081338	21.9770025	27.4624377
	0.01	34.9157557	39.6330210	51.2423205	66.2125908	82.7391792
	0.1	44.1326409	50.0951461	64.7690100	83.6910568	104.580250
	0.5	44.6404452	50.6715568	65.5142629	84.6540328	105.783584
	1	45.2433420	51.3559075	66.3990735	85.7973379	107.212257
	10	51.9487247	58.9672155	76.2398850	98.5131090	123.101870
	100	60.6927508	68.8925963	89.0726070	115.094867	143.822417
	1000	62.6799010	71.1482189	91.9889463	118.863205	148.531328
	10000	62.9034180	71.0193397	92.3169795	119.287072	149.060991
	100000	62.9259882	71.4275535	92.3501036	119.329873	149.114476
	1000000	62.9282925	71.4301691	92.3534853	119.334243	149.119936
	10000000	62.9285308	71.4304396	92.3538351	119.334695	149.120501
$\rightarrow \infty$	62.9285308	71.4304396	92.3538351	119.334695	149.120501	
$\omega_{-3}$	0	44	49.9445847	64.5743463	83.4395227	104.265934
	0.01	44.0130662	49.9594163	64.5935223	83.4643009	104.296896
	0.1	119.357027	135.482663	175.168227	226.343031	282.837998
	0.5	115.392374	130.982368	169.349707	218.824650	273.443037
	1	115.086489	130.635157	168.900791	218.244584	272.718188
	10	114.492357	129.960756	168.028844	217.117902	271.310287
	100	123.477933	140.160320	181.216064	234.157723	292.603228
	1000	127.132214	144.383107	186.579083	241.087530	301.262707
	10000	127.580562	144.817232	187.237078	241.937756	302.325148
	100000	127.626407	144.869271	187.304360	242.024694	302.433787
	1000000	127.631109	144.874607	187.311259	242.033609	302.444927
	10000000	127.631500	144.875052	187.311834	242.034352	302.445855
$\rightarrow \infty$	127.631500	144.875052	187.311834	242.034352	302.445855	

Table 3: Coeficientes de frecuencia con distintas condiciones de vínculo:  $k_{t1} \rightarrow \infty$ ;  $k_{t2} \rightarrow \infty$ ;

$$v=0.3; J = \frac{EI[(1+v)+6(l/h)^2]}{(1+v)}. \text{ Modelo 2}$$

## 6.2. Modelo 2

En el segundo modelo tal como se trata en el trabajo de [Akgöz y Civalek, \(2013\)](#) se asume que para una viga esbelta con una gran relación de aspecto el efecto del coeficiente de Poisson es secundario y puede ser despreciado al aproximar el término  $(\lambda + 2\mu)I \sim EI$ , [Park et al, \(2006\)](#) por ello se asume:

$$J = \frac{EI \left[ (1 + \nu) + 6 \left( \frac{l}{h} \right)^2 \right]}{(1 + \nu)} \quad (33)$$

En la [Tabla 3](#) se presentan los coeficientes de frecuencia para este modelo considerando un valor de  $\nu = 0.30$ .

## 6.3. Modelo 3

El tercer modelo considera la expresión completa de la constante  $J$ :

$$J = \frac{EI \left[ (1 - \nu) + 6(1 - 2\nu) \left( \frac{l}{h} \right)^2 \right]}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (34)$$

En particular se adopta  $\nu = 0.3$  para calcular los valores de frecuencia presentados en la [Tabla 4](#). Las variaciones de los coeficientes de frecuencia en función del aumento de rigidez de los resortes rotacionales también resultan ser muy similares a los de la [Tabla 3](#), pero en todos los casos su valor es mayor.

## 6.4. Modelo 2. Viga cantiléver (empotramiento elástico)

Finalmente en la [Tabla 5](#) se retoma el caso del modelo 2 y se indican los valores de los coeficientes de frecuencia para la viga con condiciones de borde *empotrada elásticamente - libre*, y se compara con los valores de [Akgöz and Civalek, \(2013\)](#) donde los resultados se obtuvieron con una aproximación de diez términos utilizando el método de Ritz. El modelo utiliza  $\nu = 0.3$ .

El acuerdo de valores calculados para  $k_{t1} = k_{r1} \rightarrow \infty$  con los obtenidos por [Akgöz et al., \(2013\)](#) en el caso de los coeficientes de la frecuencia fundamental es excelente. Para los coeficientes de la segunda frecuencia la diferencia entre valores es del 1,4%. Finalmente y como era de esperarse en una aproximación de tres términos, la precisión disminuye para la tercera frecuencia y la diferencia aumenta.

		<i>l / h</i>				
<i>k<sub>r1</sub> = k<sub>r2</sub></i>		0	0.25	0.50	0.75	1
$\omega_{-1}$	0	11.4533780	12.6210079	15.6083231	19.6002454	24.1026848
	0.01	11.4760747	12.6460184	15.6392535	19.6390864	24.1504481
	0.1	11.6810745	12.8719172	15.9186212	19.9899040	24.5818532
	0.5	12.5124092	13.7880035	17.0515394	21.4125729	26.3313282
	1	13.4062056	14.7729191	18.2695786	22.9421328	28.2122486
	10	20.0414907	22.0846472	27.3119479	34.2971424	42.1756562
	100	24.9944065	27.5424946	34.0616343	42.7731016	52.5986570
	1000	25.8558357	28.4917433	35.2355645	44.2472714	54.4114633
	10000	25.9485254	28.5938824	35.3618793	44.4058919	54.6065212
	100000	25.9578618	28.6041706	35.3746025	44.4218693	54.6261687
	1000000	25.9587952	28.6051991	35.3758746	44.4234666	54.6281330
	10000000	25.9588730	28.6052849	35.3759807	44.4235998	54.6282968
$\rightarrow \infty$	25.9588989	28.6053134	35.3760159	44.4236441	54.6283513	
$\omega_{-2}$	0	13.4461104	14.816892	18.3239596	23.0104222	28.2962249
	0.01	40.5106114	44.6405197	55.2066573	69.3260909	85.2512243
	0.1	51.2043984	56.4244991	69.7798324	87.6264430	107.755413
	0.5	51.7935726	57.0737375	70.5827415	88.6347009	108.995281
	1	52.4930769	57.8445536	71.5360051	89.8317673	110.467330
	10	60.2729214	66.4175248	82.1381461	103.145469	126.839368
	100	70.4180790	77.5969440	95.9636653	120.506948	148.189011
	1000	72.7236476	80.1375568	99.1056257	124.452484	153.040889
	10000	72.9829807	80.4233280	99.4590371	124.896282	153.586634
	100000	73.0091675	80.4521844	99.4947237	124.941096	153.641742
	1000000	73.0118410	80.4551305	99.4983671	124.945671	153.647368
	10000000	73.0121175	80.4554352	99.4987439	124.946144	153.647950
$\rightarrow \infty$	73.0121175	80.4554352	99.4987439	124.946144	153.647950	
$\omega_{-3}$	0	51.0505033	56.2549149	69.5701087	87.3630812	107.431553
	0.01	51.0656632	56.2716204	69.5907682	87.3890245	107.463456
	0.1	138.482643	152.600441	188.720031	236.986310	291.425246
	0.5	133.882699	147.531549	182.451364	229.114394	281.745045
	1	133.527800	147.140469	181.967717	228.507052	280.998188
	10	132.838465	146.380860	181.028313	227.327389	279.547541
	100	143.263878	157.869105	195.235755	245.168470	301.486958
	1000	147.503717	162.541180	201.013681	252.424136	310.409347
	10000	148.023907	163.114402	201.722582	253.314342	311.504046
	100000	148.077099	163.173016	201.795070	253.405369	311.615982
	1000000	148.082553	163.179026	201.802503	253.414703	311.627461
	10000000	148.083008	163.179527	201.803122	253.415481	311.628417
$\rightarrow \infty$	148.083008	163.179527	201.803122	253.415481	311.628417	

Table 4: Coeficientes de frecuencia con distintas condiciones de vínculo:  $k_{t1} \rightarrow \infty$ ;  $k_{t2} \rightarrow \infty$ ;

$$\nu=0.3; J = \frac{EI[(1-\nu)+6(1-2\nu)(l/h)^2]}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \text{ Modelo 3}$$

		$l/h$				
$k_{t1} = k_{r1}$		0	0.25	0.50	0.75	1
$\omega_{-1}$	1	0.8679199	0.98517952	1.27375819	1.64588232	2.05669271
	10	2.2804692	2.58857017	3.34681382	4.32457413	5.40398298
	100	3.3451905	3.79713978	4.90939750	6.34366134	7.92703209
	1000	3.4997428	3,97257275	5.13621826	6.63674702	8.29327164
	10000	3.5144558	3.98927354	5.15781104	6.66464806	8.32813674
	100000	3.5159209	3.99093658	5.15996122	6.66742641	8.33160856
	1000000	3.5160631	3.99109799	5.16016992	6.66769607	8.33194553
	Akgöz et al., 2013	3.5160	-	5.1601	-	8.3318
$\omega_{-2}$	1	3.4443577	3.90970489	5.05493516	6.53171733	8.16202665
	10	9.3690554	10.6348541	13.7500143	17.7670343	22.2016662
	100	19.7668662	22.4374528	29.0098287	37.4849519	46.8411538
	1000	22.2547073	25.2614117	32.6609813	42.2027763	52.7365419
	10000	22.3461629	25.3652234	32.7952014	42.3762084	52.9532624
	100000	22.3510626	25.3707850	32.8023922	42.3854999	52.9648732
	1000000	22.3515100	25.3712929	32.8030488	42.3863484	52.9659334
	Akgöz et al., 2013	22.0345	-	32.3378	-	52.2147
$\omega_{-3}$	1	30.9384065	35.1183151	45.4051676	58.6701335	73.314133
	10	45.3257101	51.4494039	66.5199568	85.9535368	107.407443
	100	76.8792559	87.2659662	112.827902	145.790191	182.179260
	1000	90.8571406	103.132322	133.341829	172.297192	215.302378
	10000	91.8887370	104.303291	134.855798	174.253463	217.746932
	100000	91.9731482	104.399107	134.979680	174.413536	217.946959
	1000000	91.9813568	104.408424	134.991727	174.429103	217.966411
	Akgöz et al., (2013)	61.6972	-	90.5468	-	146.2027

Table 5: Coeficientes de frecuencia con distintas condiciones de vínculo:  $k_{t2} = k_{t2} = 0$ ;

$$\nu=0.3; J = \frac{EI[(1+\nu)+6(l/h)^2]}{(1+\nu)}. \text{ Modelo 2}$$

## 7 CONCLUSIONES

De lo expuesto se puede concluir que

- cuando disminuye la altura de la viga aumenta la frecuencia natural.
- a medida que el parámetro de escala de longitud se acerca a el valor de la altura de la micro viga, la frecuencia aumenta.
- al aumentar la constante de escala propia del material que indica mayor rigidez, para una altura dada, la frecuencia aumenta.

Por otra parte, se aprecia que la tendencia para los distintos valores del coeficiente de Poisson marca que:

- para  $l/h=0$ , es decir  $l = 0$ , donde no se tiene en cuenta el factor de escala de longitud, las frecuencias coinciden para el caso de  $\nu=0$
- para el modelo 2, en se desprecia el coeficiente de Poisson al aproximar el término  $(\lambda + 2\mu)I \sim EI$ , la frecuencia es menor para cualquier valor de  $l/h$ , que para los modelos 1 y 3

Si se observa la incidencia de los vínculos elásticos, la frecuencia aumenta rápidamente al

augmentar la rigidez de los vínculos hasta 100 y luego comienza a estabilizarse estando próxima a la frecuencia de una micro viga con apoyos rígidos en todos los casos.

## AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue auspiciado por la Universidad Nacional de la Patagonia, la Universidad Nacional del Sur y por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

## REFERENCIAS

- Akgöz y Civalek, (2013) Ö., Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Bernoulli-Euler microbeams based on the modified couple stress theory, *Composite Structures*, 98:314-322, 2013.
- Asghari M., Ahmadian M.T., Kahrobaiyan M.H. and Rahaeifard M., On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams. *Materials & Design*, 31:2324-2329, 2010.
- Ghannadpour S.A.M., Mohammadi B. and Fazilati J., Bending, buckling and vibration problems of nonlocal Euler beams. *Composite Structures*, 96:584-589, 2013.
- Ghayesh M. H., Farokhi H. and Amabili M., Nonlinear dynamics of a microscale beam based on the modified couple stress theory, *Composites: Part B*, 50:318-324, 2013.
- Jam J.E., Taati E., Abadi M.N., Abad M.R.A.A., Mohammadi M., On the size- dependent static behavior of viscoelastic micro-beams, *Journal of Science and today's world*, 2012.
- Kong S., Zhou S., Nie Z. and Wang K., Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory, *Int. J. Eng. Sci.*, 47:487-498, 2009.
- Kong S., Zhou S., Nie Z. and Wang K., The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler micro-beams, *Int. J. Eng. Sci.*, 46:427-437, 2008.
- Ma H.M., Gao X.L. and Reddy J.N., A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56:3379-3391, 2008.
- Mindlin R.D, Micro-structure in Linear Elasticity, *Technical Report of Columbia University*, New York, USA, 1964.
- Mindlin R.D. and Eshel N.N., On First Strain-gradient theories in linear Elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 4:109-124, 1968.
- Nateghi A., Salamat-talab M., Rezapour J. and Daneshian B., Size dependent buckling analysis of functionally graded micro beams on modified couple stress theory, *Applied Mathematical Modelling* 36:4971-4987, 2012.
- Park S. K. and Gao X.L., Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 16:2355-2359, 2006.
- Rezazadeh G., Vahdat A.S., Tayefeh-rezaei S. and Cetinkaya C., Thermoelastic damping in a micro-beam resonator using modified couple stress theory, *Acta Mechanica*, 223:1137-1152, 2012.
- Sahmani S., Ansari R., Gholami R. and Darvizeh A., Dynamic stability analysis of functionally graded higher-order shear deformable microshells based on the modified couple stress elasticity theory, *Composites: Part B*, 51:44-53, 2013.
- Simsek M. and Reddy J.N., Bending and vibration of functionally graded microbeams using a new higher order beam theory and the modified couple stress theory, *Int. Journal of Engineering Science*, 64:37-53, 2013.
- Simsek M., Kocatürk T., Akbas S.D., Static bending of a functionally graded microscale Timoshenko beam based on the modified couple stress theory, *Composite Structures*, 95:740-747, 2013.

- Simsek M. and Reddy J.N., An unified higher order beam theory for buckling of a functionally graded microbeam embedded in elastic medium using modified couple stress theory. *Composite Structures*, 101:47-58, 2013.
- Wang Y.G., Lin W.H. and Liu N., Nonlinear free vibration of a microscale beam based on modified couple stress theory, *Physica E. Low Dimensional Systems and nanostructures*, 47:80-85,2013.
- Yang F., Chong A.C.M., Lang D.C.C. and Tong P., Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 39:2731-2743, 2002.