

VIBRACIONES DE VIGAS CON UN NÚMERO ARBITRARIO DE RÓTULAS Y RESTRICCIONES ELÁSTICAS CON CARGAS AXIALES

Javier L. Raffo^a, Ricardo O. Grossi^b

^a*Grupo de Mecánica Computacional, Facultad Regional Delta, Universidad Tecnológica Nacional, San Martín 1171, 2804 Campana, Argentina, jraffo@frd.utn.edu.ar, <http://www.frd.utn.edu.ar/grupo-de-mecanica-computacional>*

^b*INIQUI-CONICET, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta, Avenida Bolivia 5150, Salta, Argentina, grossiro@unsa.edu.ar, <http://www.unsa.edu.ar/iniqui/>*

Palabras Clave: Vibraciones de vigas, restricciones elásticas, formas modales, cálculo de variaciones, rótulas, cargas axiales.

Resumen. El estudio del comportamiento de componentes estructurales es un importante procedimiento de diseño. Un entendimiento adecuado de las vibraciones libres es crucial para el diseño y la evaluación de la dinámica de un sistema mecánico.

En este trabajo se analiza el problema de vibraciones transversales en una viga de tramos múltiples con propiedades diferentes, sujeta a fuerzas axiales generales, con varias rótulas intermedias afectadas por restricciones elásticas traslacionales y rotacionales, y a su vez, ubicadas arbitrariamente. Ambos extremos de la viga también se encuentran restringidos elásticamente contra rotación y traslación. Los desarrollos teóricos se basan en la hipótesis de la teoría de viga de Euler-Bernoulli.

Mediante una aplicación rigurosa del principio de Hamilton, se obtienen: las ecuaciones diferenciales, las condiciones de contorno y las condiciones de transición que corresponden al problema del comportamiento estático y dinámico del sistema mecánico en estudio.

Se determina la solución exacta que es aplicable cuando la viga tiene varios tramos uniformes, proponiendo la solución analítica en cada tramo, mediante la aplicación del método de separación de variables, en combinación con series de funciones. Se presenta además, la formulación débil correspondiente al problema de contorno para resolver el problema de vibraciones libres bajo la acción de una carga axial variable.

Para obtener indicadores sobre los resultados obtenidos con la metodología propuesta, se realizan comparaciones de estos, con ciertos casos particulares que figuran en la literatura correspondiente. Se presentan resultados nuevos que consisten en: frecuencias naturales y formas modales de vibración para una viga con diferentes características.

1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo se analiza el problema de vibraciones transversales en una viga compuesta por varios tramos conectados por un número arbitrario de rótulas y restricciones elásticas. Los diferentes tramos están caracterizados por distintas propiedades mecánicas tal como espesor variable y distinto material. Concretamente la viga está sujeta a fuerzas axiales generales, con una carga trasversal general distribuida variable en el tiempo, con varias rótulas intermedias afectadas por restricciones elásticas traslacionales y rotacionales, y a su vez, ubicadas arbitrariamente. Ambos extremos de la viga también se encuentran restringidos elásticamente contra rotación y traslación. Los desarrollos teóricos se basan en la hipótesis de la teoría de viga de Euler-Bernoulli.

Existe una gran cantidad de trabajos publicados en revistas científicas sobre vibraciones de vigas con restricciones elásticas en un punto intermedio y/o en los extremos. Realizando una breve descripción de los trabajos realizados al momento sin la intención de hacer una revisión completa de la bibliografía actual, solamente se citan algunos trabajos de referencia. [Chun \(1972\)](#) derivó la ecuación de frecuencias de una viga con un extremo libre y el otro con una restricción contra rotación. [Rutemberg \(1978\)](#) obtuvo la ecuación de frecuencia para una viga empotrada, de sección constante con una restricción elástica contra rotación en un punto intermedio. [Gelos y Laura \(1982\)](#), aplicaron el método de Rayleigh en el estudio del comportamiento dinámico de una barra con un soporte rígido intermedio, con la viga de sección variable sometida a un esfuerzo axial, con una restricción elástica contra rotación en un extremo y con una masa concentrada en un punto interior. [Maurizi y Bambill \(1987\)](#) analizaron las vibraciones transversales de vigas empotradas con una restricción elástica traslacional intermedia. [Grossi y Bath \(1991\)](#) estudiaron el comportamiento dinámico de vigas ahusadas con restricciones elásticas contra rotación en sus extremos aplicando el método de Rayleigh-Ritz.

[Grossi y Albarracín \(1998\)](#) demostraron que la utilización de polinomios ortogonales que satisfacen las condiciones de contorno naturales en problemas de vibración de vigas con restricciones elásticas en los extremos, pueden conducir a resultados menos precisos que cuando éstas son ignoradas. [Nallim y Grossi \(1999\)](#) presentaron un algoritmo general para el análisis de vibración de vigas; en el modelo se pueden incluir características tales como sección variable, restricciones elásticas contra traslación y rotación en los extremos, masas concentradas y fuerzas axiales. [Qiao et al. \(2002\)](#) resolvieron el problema de vibración de una viga con un número arbitrario de apoyos elásticos intermedios traslacionales donde además derivaron las expresiones analíticas exactas para los casos de vigas que soportan un número arbitrario de masas y vigas con varios sobresaltos en su sección. [Naguleswaran \(2003\)](#) obtuvo la ecuación de frecuencias de una viga hasta con 6 apoyos elásticos contra traslación y rotación, incluyendo los puntos del contorno. [Raffo y Grossi \(2012\)](#) realizaron un estudio de sensibilidad sobre las primeras frecuencias naturales que consiste en la influencia de la posición y valor de una restricción elástica intermedia en vigas con rótulas intermedias.

Esta revisión de la literatura al momento revela que se realizó mucho esfuerzo en analizar la influencia de los parámetros de restricciones elásticas, ubicados en los extremos y en puntos intermedios para analizar las características dinámicas de vigas. Sin embargo, no hay trabajos donde se analice el efecto sobre las frecuencias naturales y formas modales de vigas Euler-Bernoulli con un número arbitrario de rótulas con restricciones elásticas intermedias sometida a cargas axiales.

El objetivo de este trabajo es presentar la solución débil al problema de vibraciones libres de una viga compuesta por varios tramos conectados por un número arbitrario de rótulas y

restricciones elásticas, donde los tramos están caracterizados por distintas propiedades mecánicas tal como espesor variable y distinto material, donde además la viga se encuentra sujeta a fuerzas axiales generales, con una carga transversal general distribuida variable en el tiempo, con los extremos de la viga restringidos elásticamente contra rotación y traslación. Los desarrollos teóricos se basan en la hipótesis de la teoría de viga de Euler-Bernoulli.

Se presentan resultados nuevos que consisten en: frecuencias naturales y formas modales de vibración para una viga con diferentes características. Se presentan varias tablas donde se realizan comparaciones de resultados obtenidos por otros investigadores en ciertos casos particulares.

2 FORMULACIÓN VARIACIONAL Y OBTENCIÓN DEL PROBLEMA DE CONTORNO

Sea una viga de N tramos que ejecuta vibraciones transversales y está sometida a una fuerza externa transversal dada por una función $q = q(x, t)$ de dirección opuesta al desplazamiento transversal u y está sometida a una carga de tensión $s = s(x)$ a lo largo de toda la viga. Los extremos y puntos intermedios de la viga están elásticamente restringidos contra rotación y traslación, tal como se muestra en la Figura 1. Los vínculos rotacionales están caracterizados por los coeficientes de rigidez r_0 , r_l , r_{c_i} y $r_{i,i+1}$, con $i = 1, \dots, N - 1$, y los vínculos traslacionales por t_0 , t_l y t_{c_i} , con $i = 1, \dots, N - 1$.

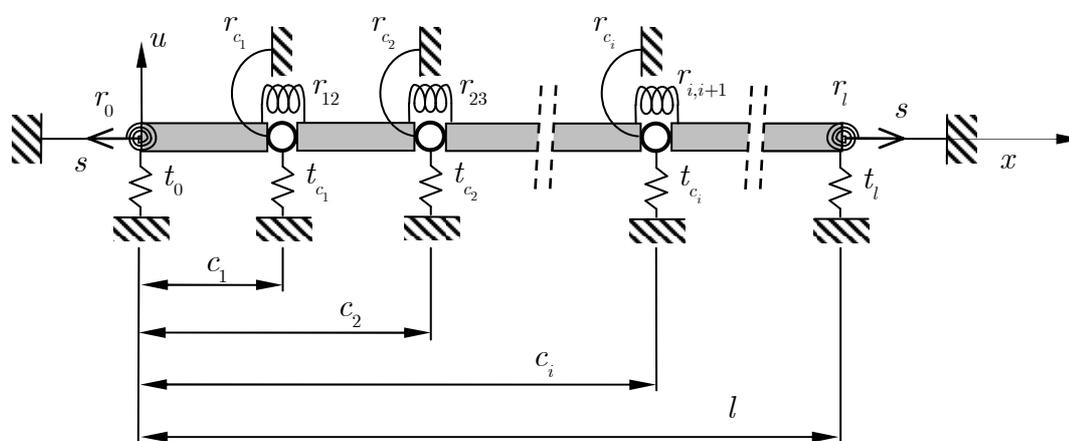


Figura 1: Viga analizada restringida elásticamente en los extremos y en los puntos intermedios

Al adoptar valores adecuados de los coeficientes de rigidez de los extremos, se pueden generar distintas combinaciones de apoyos clásicos, esto es: empotrado, simplemente apoyado y libre. Por otra parte, al dar valores adecuados a los coeficientes de rigidez de las restricciones elásticas intermedias, se pueden generar, por ejemplo, el caso de una viga continua de N tramos o el caso de N vigas empotradas en puntos intermedios $x = c_i$, entre muchos otros casos de tipos de apoyos.

Si el desplazamiento transversal de la línea media correspondiente a un punto x y en un instante t , es descrito por la función $u = u(x, t)$, $\forall x \in [0, l]$, la energía cinética de la viga antes descrita está dada por

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} (\rho A)_i(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 dx, \quad (1)$$

donde $c_0 = 0, c_N = l$, $(\rho A)_i = \rho_i A_i$, $i = 1, \dots, N-1$ es el valor de la función resultante del producto de la densidad por el área de la sección correspondiente al tramo entre los puntos c_{i-1} y c_i .

De acuerdo con la teoría del modelo denominado de Euler-Bernoulli la energía de deformación de la viga está dada por

$$E_d = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} (EI)_i(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right)^2 dx, \quad (2)$$

donde el producto $(EI)_i = E_i I_i$, $i = 1, 2, \dots, N$ denota la rigidez a la flexión correspondiente al tramo entre c_{i-1} y c_i . En consecuencia, la energía potencial total debida a la deformación elástica de la viga y de las restricciones elásticas, a la carga transversal y a la deformación por la tensión axial está dada por

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[(EI)_i(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right)^2 + s(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 - 2q(x, t)u(x, t) \right] dx + \sum_{i=0}^N \left[r_{c_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2 + t_{c_i} \left(u(c_i, t) \right)^2 \right] + \sum_{i=1}^{N-1} r_{i,i+1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2 \right\}, \quad (3)$$

donde para facilitar los desarrollos analíticos se adopta $c_0^- \equiv 0^+$. Las notaciones 0^+ , l^- , c_i^+ y c_i^- con $i = 1, 2, \dots, N-1$ indican que se usan límites laterales y derivadas laterales. Las restricciones r_{c_i} y t_{c_i} con $i = 0, 1, \dots, N$, están conectadas a un punto fijo, con $r_{c_0} = r_0$, $t_{c_0} = t_0$, $r_{c_N} = r_l$, $t_{c_N} = t_l$, mientras que las restricciones $r_{i,i+1}$ con $i = 1, 2, \dots, N-1$ indican que las mismas están conectadas a ambos lados de la viga, en los puntos intermedios ubicados en c_i . Esto se esquematiza en la [Figura 1](#).

El principio de Hamilton establece que de todas las configuraciones posibles que el sistema puede tener, al pasar de una configuración inicial dada en un instante t_a a otra dada en un instante t_b , la que realmente adopta el sistema es la que hace estacionario al funcional

$$F(u) = \int_{t_a}^{t_b} L dt, \text{ en el espacio de funciones admisibles, donde el Lagrangeano } L \text{ es igual a}$$

$$L = E_c - U.$$

Por lo tanto, el funcional energético de acuerdo con (1) y (3) está dado por

$$\begin{aligned}
F(u) = & \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[(\rho A)_i(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 - (EI)_i(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - s(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right)^2 + 2q(x,t)u(x,t) \right] dx \right. \\
& \left. - \sum_{i=0}^N \left[r_{c_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2 + t_{c_i} u^2(c_i, t) \right] \right. \\
& \left. - \sum_{i=1}^{N-1} r_{i,i+1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-, t) \right)^2 \right\} dt.
\end{aligned} \tag{4}$$

Es conveniente introducir los dominios $G_i = (c_{i-1}, c_i)$, cuyas clausuras respectivas son $\bar{G}_i = [c_{i-1}, c_i]$, con $i = 1, 2, \dots, N$. Para realizar los desarrollos analíticos que requiere la aplicación de las técnicas del cálculo de variaciones se supone: $u(x, \bullet) \in C^2[t_a, t_b]$, $u(\bullet, t) \in C[0, l]$, $u(\bullet, t)|_{\bar{G}_i} \in C^4(\bar{G}_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Dado que las derivadas clásicas $\partial^n u(x, t)/\partial x^n$, $n = 2, 3, 4$, no necesariamente existen en el intervalo $(0, l)$, se deben imponer las condiciones $u(\bullet, t)|_{\bar{G}_i} \in C^4(\bar{G}_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Dado que las derivadas $\partial^n u(x, t)/\partial x^n$, $n = 2, 3, 4$, se pueden extender como funciones continuas hasta los extremos del intervalo $[c_{i-1}, c_i]$, las derivadas laterales $\partial^n u(c_{i-1}^+, t)/\partial x^n$ y $\partial^n u(c_i^-, t)/\partial x^n$, existen, pero $\partial^n u(x, t)/\partial x^n$, no es necesariamente continua en los extremos del intervalo \bar{G}_i . No obstante tiene como máximo un punto de discontinuidad de primera especie.

Sobre la base de todas estas observaciones y dado que el principio de Hamilton establece que en los instantes t_a y t_b las posiciones del sistema son conocidas, el espacio de funciones admisibles está dado por

$$\begin{aligned}
D = & \left\{ u; u(x, \bullet) \in C^2[t_a, t_b], u(\bullet, t) \in C([0, l]), u(\bullet, t)|_{\bar{G}_i} \in C^4(\bar{G}_i), \right. \\
& \left. i = 1, 2, \dots, N-1, u(x, t_a), u(x, t_b) \text{ dadas}, \forall x \in [0, l] \right\}.
\end{aligned} \tag{5}$$

La condición de funcional estacionario que requiere el principio de Hamilton se formula matemáticamente mediante el planteo:

$$\delta F(u; v) = 0, \forall v \in D_a, \tag{6}$$

donde D_a es el espacio de direcciones admisibles. Este espacio se construye teniendo en cuenta que las únicas direcciones admisibles v en $u \in D$, son aquellas para las cuales $u + \varepsilon v \in D$ para un ε suficientemente pequeño y $\delta F(u; v)$ existe. En consecuencia, y en

virtud de (5), el espacio de direcciones admisibles D_a está dado por

$$D_a = \left\{ v; v(x, \bullet) \in C^2[t_a, t_b], v(\bullet, t) \in C([0, l]), v(\bullet, t)|_{\bar{G}_i} \in C^4(\bar{G}_i), \right. \\ \left. i = 1, 2, \dots, N, v(x, t_a) = v(x, t_b) = 0, \forall x \in [0, l] \right\}. \quad (7)$$

La variación primera, del funcional definido por (4), en el punto u y en la dirección de v , está dada por

$$\delta F(u; v) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} F(u + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0}. \quad (8)$$

De esta forma, la variación mencionada está dada por

$$\delta F(u; v) = \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \left[\int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[(\rho A)_i(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) dx \right. \right. \right. \\ \left. \left. - (EI)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) - s(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \right. \right. \\ \left. \left. + q(x, t) v(x, t) \right] dx - r_{c_i} \frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) - t_{c_i} u(c_i, t) v(c_i, t) \right. \\ \left. - r_{i,i+1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \right\} dt, \quad (9)$$

con $c_{-1} \equiv c_0 \equiv 0$, $(\rho A)_0 = 0$, $(EI)_0 \equiv (EI)_1$ y $r_{0,1} = r_{N,N+1} = 0$.

Integrando por partes los tres primeros términos del integrando en (9) y al adoptar $v(x, t_a) = v(x, t_b) = 0$, se obtiene:

$$\int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} (\rho A)_i(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) dx \right\} dt = \\ - \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} (\rho A)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) v(x, t) dx \right\} dt, \quad (10)$$

$$\int_{c_{i-1}}^{c_i} (EI)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) dx = \\ \int_{c_{i-1}}^{c_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(EI)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right] v(x, t) dx \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left[(EI)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right] v(x, t) \Big|_{c_{i-1}}^{c_i} + (EI)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \Big|_{c_{i-1}}^{c_i}, \quad (11)$$

$$\int_{c_{i-1}}^{c_i} s(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) dx = - \int_{c_{i-1}}^{c_i} \frac{\partial}{\partial x} \left(s(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right) v(x,t) dx + s(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) v(x,t) \Big|_{c_{i-1}}^{c_i}. \quad (12)$$

Al introducir (10) a (12) en (9) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta F(u;v) = & \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \left[\int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[-(\rho A)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((EI)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \right) \right. \right. \right. \\ & + \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(s(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right) + q(x,t) \right] v(x,t) dx - s(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) v(x,t) \Big|_{c_{i-1}}^{c_i} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left((EI)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \right) v(x,t) \Big|_{c_{i-1}}^{c_i} - t_{c_i} u(c_i,t) v(c_i,t) \\ & - (EI)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) \Big|_{c_{i-1}}^{c_i} - r_{c_i} \frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-,t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-,t) \\ & \left. \left. - r_{i,i+1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(c_i^+,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-,t) \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+,t) - \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-,t) \right) \right] \right\} dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Si se supone que los extremos y los puntos intermedios c_i de la viga están rígidamente empotrados (situación que se logra haciendo tender a infinito a todas las restricciones elásticas) se cumple que es $u(c_i,t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-,t) = 0$, con $i = 0, 1, \dots, N$. Como consecuencia de estas consideraciones, se obtiene $u(c_i,t) + \varepsilon v(c_i,t) = 0, \forall \varepsilon > 0$, lo que implica que necesariamente debe ser

$$v(c_i,t) = 0, \quad (14)$$

de igual forma, de $\frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-,t) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-,t) = 0, \forall \varepsilon > 0$, se deduce

$$\frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-,t) = 0, \quad (15)$$

con $i = 0, 1, \dots, N, \forall t \in [t_a, t_b]$. Al aplicar (14) y (15) en (13) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta F(u;v) = & \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \left[\int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[-(\rho A)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((EI)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(s(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right) + q(x,t) \right] v(x,t) dx \right] \right\} dt. \end{aligned} \quad (16)$$

De acuerdo con las observaciones realizadas, el espacio de direcciones admisibles D_a^* se reduce a

$$D_a^* = \left\{ v; v(x, \bullet) \in C^2[t_a, t_b], v(\bullet, t) \in C([0, l]), v(\bullet, t)|_{\bar{G}_i} \in C^4(\bar{G}_i), i = 1, 2, \dots, N, \text{ y } v \right. \\ \left. \text{satisface las condiciones (14)-(15) y } v(x, t_a) = v(x, t_b) = 0, \forall x \in [0, l] \right\}. \quad (17)$$

De (16), (17) y teniendo en cuenta (6), resulta que la condición de funcional estacionario es

$$\delta F(u; v) = \\ \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \left[\int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[-(\rho A)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((EI)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(s(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) + q(x, t) \right] v(x, t) dx \right] \right\} dt = 0, \forall v \in D_a^*. \quad (18)$$

Dado que $u, v \in C^4(\bar{G}_i)$, y la función v verifica las condiciones establecidas en (17), se puede aplicar el lema fundamental del cálculo de variaciones en \mathbb{R} , de donde se deduce que la función u debe satisfacer las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

$$\left(\rho A \right)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((EI)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right) \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(s(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) = q(x, t), \forall t > 0, i = 1, \dots, N. \quad (19)$$

Si ahora se vuelve al caso original, que es cuando existen restricciones elásticas, dado que se verifica $D_a^* \subset D_a$, resulta que se verifica la condición $\delta F(u; v) = 0, \forall v \in D_a^*$, de donde surge que la función u debe satisfacer las ecuaciones (19) y la condición para funcional estacionario se reduce a

$$\delta F(u; v) = \\ \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \sum_{i=0}^N \left[-s(c_i) \frac{\partial u}{\partial x}(c_i, t) v(c_i, t) + s(c_{i-1}) \frac{\partial u}{\partial x}(c_{i-1}, t) v(c_{i-1}, t) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left((EI)_i(c_i) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_i, t) \right) v(c_i, t) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left((EI)_i(c_{i-1}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_{i-1}, t) \right) v(c_{i-1}, t) \right. \right. \\ \left. \left. - (EI)_i(c_i) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_i, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i, t) + (EI)_i(c_{i-1}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_{i-1}, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_{i-1}, t) \right. \right. \\ \left. \left. - t_{c_i} u(c_i, t) v(c_i, t) - r_{c_i} \frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-, t) \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right. \right. \\ \left. \left. - r_{i,i+1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \right] \right\} dt = 0. \quad (20)$$

Al reagrupar términos en (20) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \delta F(u; v) = & \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \left[s(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left((EI)_1(0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) \right) - t_0 u(0, t) \right] v(0, t) \right. \\
 & + \left[(EI)_1(0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0^+, t) - r_0 \frac{\partial u}{\partial x}(0^+, t) \right] \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) \\
 & + \sum_{i=1}^N \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left((EI)_i(c_i^-) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_i^-, t) \right) - t_{c_i} u(c_i, t) \right. \right. \\
 & - \left. \left. s(c_i^-) \frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-, t) \right] v(c_i, t) \right. \\
 & + \left. \left[r_{i,i+1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-, t) \right) - r_{c_i} \frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-, t) \right. \right. \\
 & - \left. \left. (EI)_i(c_i^-) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_i^-, t) \right] \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t) \right. \\
 & + \left. \left[s(c_i^+) \frac{\partial u}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left((EI)_{i+1}(c_i^+) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_i^+, t) \right) \right] v(c_i, t) \right. \\
 & + \left. \left[(EI)_{i+1}(c_i^+) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_i^+, t) \right. \right. \\
 & \left. \left. - r_{i,i+1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-, t) \right) \right] \frac{\partial v}{\partial x}(c_i^+, t) \right\} \Bigg\} dt = 0.
 \end{aligned} \tag{21}$$

De la condición (21) surgen las condiciones de contorno y de transición, así por ejemplo suponiendo que el extremo derecho de la viga y donde se encuentran los puntos intermedios están rígidamente empotrados, y que en el extremo izquierdo de la viga se encuentra simplemente apoyado, se verifican las condiciones $u(c_i, t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-, t) = 0$, con $i = 1, \dots, N$, $u(0, t) = 0$, y dado que $\frac{\partial v}{\partial x}(0^+, \bullet)$, es continua y arbitraria, de la aplicación de la condición (21) se obtiene

$$(EI)_1(0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0^+, t) - r_0 \frac{\partial u}{\partial x}(0^+, t) = 0. \tag{22}$$

Dado que las funciones continuas $v(0^+, \bullet), v(l^-, \bullet), \frac{\partial v}{\partial x}(l^-, \bullet), v(c_i^-, t)$ y $\frac{\partial v}{\partial x}(c_i^-, t), i = 1, \dots, N$, son arbitrarias al igual que el intervalo $[t_a, t_b] = [0, t]$, con un procedimiento análogo al realizado para obtener (22), se deduce que la función u debe satisfacer $\forall t \geq 0$, las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} (\rho A)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((EI)_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right) \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(s(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) = q(x, t), \forall t > 0, i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (23)$$

$$-t_0 u(0, t) + s(0^+) \frac{\partial u}{\partial x}(0^+, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left((EI)_1(0^+) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0^+, t) \right) = 0, \quad (24)$$

$$-r_0 \frac{\partial u}{\partial x}(0^+, t) + (EI)_1(0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0^+, t) = 0, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} -t_{c_i} u(c_i, t) + s(c_i^+) \frac{\partial u}{\partial x}(c_i^+, t) - s(c_i^-) \frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-, t) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left((EI)_i(c_i^-) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_i^-, t) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left((EI)_{i+1}(c_i^+) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_i^+, t) \right) = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$i = 1, 2, \dots, N - 1,$

$$u(c_i^+, t) - u(c_i^-, t) = 0, i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} r_{i,i+1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-, t) \right) - r_{c_i} \frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-, t) \\ - (EI)_i(c_i^-) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_i^-, t) = 0, i = 1, 2, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} -r_{i,i+1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(c_i^-, t) \right) + (EI)_{i+1}(c_i^+) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_i^+, t) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (29)$$

$$-t_l u(l, t) - s(l) \frac{\partial u}{\partial x}(l^-, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left((EI)_N(l) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l^-, t) \right) = 0, \quad (30)$$

$$r_l \frac{\partial u}{\partial x}(l^-, t) + (EI)_N(l) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l^-, t) = 0. \quad (31)$$

Dado que el dominio del problema es $G = (0, l)$, es un intervalo abierto, el contorno está compuesto solamente por los puntos 0 y l. En consecuencia solo las expresiones (24), (25), (30) y (31) corresponden a condiciones de contorno. Los puntos c_i son puntos interiores del abierto $(0, l)$, entonces las condiciones formuladas en $x = c_i$ se denominan condiciones de transición y están dadas por (26) a (29) (Grossi y Quintana, 2008).

Se debe observar que tanto las ecuaciones diferenciales como las condiciones de borde y las de transición se obtuvieron de forma rigurosa por la aplicación del cálculo de variaciones.

Para una ecuación diferencial de orden $2m$, las condiciones de borde que contienen a la función u , y a las derivadas de u hasta las de orden $m - 1$ se las llama condiciones de contorno estables, geométricas o esenciales, mientras que a las condiciones de borde que contienen derivadas de u con un orden mayor a $m - 1$ son las condiciones de borde inestables, o naturales (Necas, 1967).

La presencia de los distintos coeficientes de rigidez permite generar distintas situaciones de apoyo, así por ejemplo, para considerar, que la viga no tiene ninguna restricción intermedia se debe adoptar $t_{c_i} = r_{c_i} = 0$ y $r_{i,i+1} = \infty$, con $i = 1, 2, \dots, N - 1$, y si se considera $t_0 = t_l = \infty$ y $r_0 = r_l = 0$, se obtiene el caso de una viga simplemente apoyada en sus extremos.

3 EL MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Para realizar un análisis de vibraciones libres y determinar los modos normales de vibración del sistema mecánico, se deben determinar los valores de las frecuencias naturales para los cuales las ecuaciones diferenciales (23) tienen como solución no trivial la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \cos(\omega t - \varphi), \quad (32)$$

donde $U(x) = U_n(x)$ son las formas modales del modo n -ésimo de vibración natural, ω representa la frecuencia de oscilación de la viga en su estado libre por lo cual se denomina frecuencia natural y φ es un corrimiento o desfase angular que no depende de t . Luego, en virtud de la continuidad de la función coseno y de sus derivadas, la función dada por (32) es continua junto con sus derivadas de cualquier orden respecto de t .

Para poder aplicar este método se supone que $(\rho A)_i$, la rigidez a la flexión y s_i son constantes entre c_{i-1} y c_i con $i = 1, 2, \dots, N$.

Al reemplazar (32) en las ecuaciones diferenciales (23), suponiendo que no existe carga distribuida aplicada, se obtiene

$$-(\rho A)_i \omega^2 + (EI)_i \frac{d^4 U}{dx^4}(x) - s_i \frac{d^2 U}{dx^2}(x) = 0, \quad (33)$$

$$\forall t > 0, i = 1, 2, \dots, N,$$

Si se aplica el cambio de variable $\bar{x} = x/l$, se obtiene

$$\lambda_i U(\bar{x}) - \frac{d^4 U}{d\bar{x}^4}(\bar{x}) + S_i \frac{d^2 U}{d\bar{x}^2}(\bar{x}) = 0, \quad \forall t > 0, i = 1, 2, \dots, N, \quad (34)$$

donde es: $S_i = \frac{s_i l^2}{(EI)_i}$, $\lambda_i^4 = \lambda^4 \frac{EI (\rho A)_i}{\rho A (EI)_i}$ y λ denota al coeficiente de frecuencias

$\lambda^4 = \frac{\rho A}{EI} l^4 \omega^2$, comúnmente usado en los trabajos sobre vibraciones de vigas. Cabe destacar que ρ, A, I y E son coeficientes genéricos, que permiten referenciar las expresiones analíticas a determinado tramo de la viga. Esto cobra importancia al comparar valores de dichos coeficientes con los adoptados por otros investigadores que hayan usado expresiones

analíticas diferentes.

Si se introduce (32) en las condiciones de contorno y de transición (24) a (31), se obtienen las siguientes expresiones que describen las condiciones mencionadas para el caso del sistema mecánico cuando ejecuta vibraciones naturales:

$$-T_0 U(0) + S_1 \frac{dU}{d\bar{x}}(0) - \frac{d^3 U}{d\bar{x}^3}(0) = 0, \quad (35)$$

$$-R_0 \frac{dU}{d\bar{x}}(0) + \frac{d^2 U}{d\bar{x}^2}(0) = 0, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} -T_{c_i} U(\bar{c}_i) + S_{i+1} \frac{(EI)_{i+1}}{(EI)_i} \frac{dU}{d\bar{x}}(\bar{c}_i^+) - S_i \frac{dU}{d\bar{x}}(\bar{c}_i^-) + \frac{d^3 U}{d\bar{x}^3}(\bar{c}_i^-) \\ - \frac{(EI)_{i+1}}{(EI)_i} \frac{d^3 U}{d\bar{x}^3}(\bar{c}_i^+) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (37)$$

$$U(\bar{c}_i^+) - U(\bar{c}_i^-) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} R_{i,i+1} \left(\frac{dU}{d\bar{x}}(\bar{c}_i^+) - \frac{dU}{d\bar{x}}(\bar{c}_i^-) \right) - R_{c_i} \frac{dU}{d\bar{x}}(\bar{c}_i^-) - \frac{d^2 U}{d\bar{x}^2}(\bar{c}_i^-) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} -R_{i,i+1} \frac{(EI)_i}{(EI)_{i+1}} \left(\frac{dU}{d\bar{x}}(\bar{c}_i^+) - \frac{dU}{d\bar{x}}(\bar{c}_i^-) \right) + \frac{d^2 U}{d\bar{x}^2}(\bar{c}_i^+) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (40)$$

$$-T_l U(1) - S_N \frac{dU}{d\bar{x}}(1) + \frac{d^3 U}{d\bar{x}^3}(1) = 0, \quad (41)$$

$$R_l \frac{dU}{d\bar{x}}(1) + \frac{d^2 U}{d\bar{x}^2}(1) = 0, \quad (42)$$

donde $\bar{c}_i = c_i/l$, $T_0 = \frac{t_0 l^3}{(EI)_1}$, $R_0 = \frac{r_0 l}{(EI)_1}$, $T_{c_i} = \frac{t_{c_i} l^3}{(EI)_i}$, $R_{c_i} = \frac{r_{c_i} l}{(EI)_i}$, $R_{i,i+1} = \frac{r_{i,i+1} l}{(EI)_i}$, con $i = 1, 2, \dots, N-1$, $T_l = \frac{t_l l^3}{(EI)_N}$, $R_l = \frac{r_l l}{(EI)_N}$.

4 SOLUCIÓN EXACTA PROPUESTA

Para el caso en que no hay carga distribuida ni carga axial, las ecuaciones diferenciales (34) se reducen a:

$$\frac{d^4 U}{d\bar{x}^4}(\bar{x}) - \lambda_i U(\bar{x}) = 0, \forall t > 0, i = 1, 2, \dots, N. \quad (43)$$

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales (43) están dadas por

$$U_i(\bar{x}) = C_{i1} \cosh(\lambda_i \bar{x}) + C_{i2} \sinh(\lambda_i \bar{x}) + C_{i3} \cos(\lambda_i \bar{x}) + C_{i4} \sin(\lambda_i \bar{x}), \quad (44)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

Las constantes C_{ij} con $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, 4$ son las incógnitas de un sistema de ecuaciones algebraicas que matricialmente se puede representar como

$$[A] \cdot \{C\} = \{0\}, \quad (45)$$

donde $[A]$ es la matriz de los coeficientes del sistema de dimensión $4N \times 4N$ y $\{C\}$ es un vector de dimensión $4N$ cuyos elementos son los coeficientes C_{ij} con $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, 4$.

Dado que el sistema (45) es homogéneo, para existencia de solución no trivial, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser nulo. Esto conduce a la ecuación de frecuencias:

$$G(T_{c_i}, R_{c_i}, R_{i,i+1}, S_i, (EI)_i, \bar{c}_i, \lambda) = 0. \quad (46)$$

5 FORMULACIÓN DÉBIL

La solución exacta del problema (23) a (31) cuando no hay restricciones o rótulas en puntos intermedios, es una función $u(\bar{x}, t)$ tal que $u(\bar{x}, \bullet) \in C^2[t_a, t_b]$, $u(\bullet, t) \in C^4(0, 1)$, y $u(\bullet, t) \in C^2[0, 1]$. Esto quiere decir que $u(\bullet, t)$ debe tener derivadas continuas hasta la de cuarto orden en el intervalo abierto $G = (0, 1)$, para satisfacer las ecuaciones diferenciales. Además debe ser continua junto con las derivadas de primer, segundo y tercer orden en el intervalo cerrado $\bar{G} = [0, 1]$, para satisfacer las condiciones de contorno de los extremos.

Cuando en un punto intermedio de la viga existe una rótula con restricciones elásticas, la derivada primera $\frac{\partial u}{\partial \bar{x}}$, es discontinua y por lo tanto las derivadas $\frac{\partial^n u}{\partial \bar{x}^n}$ con $n \geq 2$, no existen en el intervalo abierto G . En consecuencia, el problema de contorno (23) a (31) no admite una solución exacta válida en todo el dominio. Debido a estas observaciones, se recurre a analizar la existencia de una solución débil.

Si se considera que $u_i = u(\bullet, t)|_{\bar{G}_i} \in C^4(\bar{G}_i)$, son las soluciones clásicas en cada tramo del problema de contorno (34) a (42), donde es $S_i \in C^1(\bar{G}_i)$, entonces el problema original se puede transformar en uno que exista una solución débil.

Para obtener la solución débil, es necesario definir al espacio de Sobolev

$$H^2(G) = \left\{ u \in L^2(G); D^\alpha u \in L^2(G), \alpha = 1, 2 \right\}, \quad (47)$$

equipado con la norma $\|u\|_{H^2(G)} = \left[\sum_{\alpha=0}^2 \int_G (D^\alpha u)^2 d\bar{x} \right]^{\frac{1}{2}}$, donde $D^\alpha u = u^{(\alpha)}$ es la derivada débil de orden α de la función u .

Para el caso en que las restricciones elásticas $T_{c_i}, R_{c_i}, R_{i,i+1}$, con $i = 1, \dots, N-1$, y además los coeficientes T_0, R_0, T_N, R_N , toman valores finitos, se introducen los espacios V_i definidos como

$$V_i = \{v_i; v_i \in H^2(G_i)\}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (48)$$

Para encontrar la forma bilineal $B(u, v)$, se adoptan funciones $v_i \in V_i$. Se multiplica (34) por v_i y luego se integra sobre el dominio correspondiente. Realizando este procedimiento se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_{G_i} \frac{d^4 U_i}{d\bar{x}^4}(\bar{x}) v_i(\bar{x}) d\bar{x} - \int_{G_i} S_i \frac{d^2 U_i}{d\bar{x}^2}(\bar{x}) v_i(\bar{x}) d\bar{x} \\ & = \lambda_i \int_{G_i} U_i(\bar{x}) v_i(\bar{x}) d\bar{x}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (49)$$

Se supone el mismo material y espesor en toda la viga, esto es $(\rho A)_i = \rho A$ y $(EI)_i = EI$. Para simplificar la notación se considera $\bar{x} = x$ y $U = u$, y en consecuencia es $u = u(x)$. Al desarrollar (49) y teniendo en cuenta las condiciones de contorno y transición (35) a (42) resulta

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \\ & \sum_{i=1}^N \left[\int_{G_i} \frac{d^2 u_i}{dx^2}(x) \frac{d^2 v_i}{dx^2}(x) dx + \int_{G_i} S(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx \right] \\ & + \sum_{i=0}^N \left[T_{c_i} u_i(c_i) v_i(c_i) + R_{c_i} \frac{du_i}{dx}(c_i^-) \frac{dv_i}{dx}(c_i^-) \right. \\ & \left. + R_{i,i+1} \left(\frac{du_i}{dx}(c_i^+) - \frac{du_i}{dx}(c_i^-) \right) \left(\frac{dv_i}{dx}(c_i^+) - \frac{dv_i}{dx}(c_i^-) \right) \right] \\ & = \lambda \int_G u(x) v(x) dx, \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (50)$$

donde $T_{c_0} = T_0$, $R_{c_0} = R_0$, $T_{c_N} = T_N$, $R_{c_N} = R_N$ y $R_{0,1} = 0$, y donde el espacio V está dado por

$$V = \left\{ v; v \in H^1(G), v|_{G_i} \in H^2(G_i), i = 1, 2, \dots, N \right\}. \quad (51)$$

Los términos correspondientes a las integrales de la (50) constituyen la forma bilineal $A(u, v)$ asociada a las ecuaciones diferenciales de (34). Los otros términos que involucran las condiciones de contorno y transición, corresponden a la forma bilineal $a(u, v)$. Esto es que

$$B(u, v) = A(u, v) + a(u, v) = \lambda \int_G uv dx = \lambda(u, v), \forall v \in V, \quad (52)$$

donde (u, v) es la forma lineal dada por $(u, v) = \int_G uv dx$.

El problema de autovalores consiste en determinar el número λ y la función u tales que se verifica:

$$\begin{aligned} (i) \quad & u \in V, u \neq 0, \\ (ii) \quad & B(u, v) - \lambda(u, v) = 0, \forall v \in V, \end{aligned} \quad (53)$$

donde λ es el autovalor del problema, $B(u, v)$ la forma bilineal dada por (50) y $(u, v) = \int_G uv dx$. Si la $B(u, v)$ es simétrica, continua y V -elíptica, entonces tiene un conjunto numerable de autovalores y están dados por (Necas, 1967; Rektorys, 1980):

$$\lambda = \min \left\{ \frac{B(v, v)}{(v, v)}, v \in V, v \neq 0 \right\}, \quad (54)$$

$$\lambda = \min \left\{ \frac{B(v, v)}{(v, v)}, v \in V, v \neq 0, (v, v_1) = \dots = (v, v_M) = 0 \right\}. \quad (55)$$

6 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE RITZ EN COMBINACIÓN CON EL MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Teniendo en cuenta que la única condición de transición es la que requiere la continuidad de la deflexión en los puntos donde se encuentran las rótulas, se deben imponer las siguientes restricciones:

$$u(c_i^-) = u(c_i^+) = u(c_i), \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (56)$$

El método de los multiplicadores de Lagrange requiere que sea estacionario el funcional aumentado (Luenberger, 1969)

$$F_\nu(u) = F(u) + \sum_{i=1}^{N-1} \nu_i [u(c_i^-) - u(c_i^+)], \quad (57)$$

donde $\nu_i \in \mathbb{R}$ son los multiplicadores de Lagrange.

En este trabajo, la deflexión transversal está representada por $u(x) = u_i(x)$, $\forall x \in G_i$, con $i = 1, \dots, N$, donde

$$u_i(x) = \sum_{j=1}^M b_{i,j} \varphi_{i,j}, \quad \forall x \in G_i, \quad (58)$$

donde $\{\varphi_{i,j}\}_{j=1}^M$, $i = 1, \dots, N$ es una base del espacio V_i definido por (48).

Condiciones de contorno clásicas	$\varphi_{1,1}$
L-L	1
L-S	$x - 1$
L-E	$(x - 1)^2$
S-L	x
S-S	$x(x - 1)$
S-E	$x(x - 1)^2$
E-L	x^2
E-S	$x^2(x - 1)$
E-E	$x^2(x - 1)^2$

Tabla 1: Primer elemento del conjunto $\{\varphi_{1,j}\}_{j=1}^M$, cuando $N = 1$, para las condiciones de contorno clásicas.

La aplicación del método de Ritz en combinación con el método de los multiplicadores de Lagrange conduce a la ecuación de frecuencias:

$$\left\| [K] - \lambda [M] \right\| = 0, \quad (59)$$

La elección de las funciones que aproximan el campo de desplazamiento (58) depende solo de las condiciones de contorno del tramo analizado. Como ejemplo, en la [Tabla 1](#) se muestra el primer elemento del conjunto $\{\varphi_{1,j}\}_{j=1}^M$, donde $N = 1$, para los casos de apoyos clásicos, donde L, indica extremo libre, S indica simplemente apoyado y E indica empotrado. Para aclarar la nomenclatura utilizada, por ejemplo, una viga E-L, indica que en $x = 0$, la viga se encuentra empotrada y en $x = 1$, se encuentra libre.

Los elementos restantes se obtienen como polinomios simples, que se generan automáticamente de la siguiente manera

$$\{\varphi_{i,j}\}_{j=1}^M = \{\varphi_{i,1}, \varphi_{i,1}x, \varphi_{i,1}x^2, \dots, \varphi_{i,1}x^{M-1}\}, i = 1, \dots, N, \quad (60)$$

7 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para establecer las distintas condiciones de apoyo clásicas en los extremos de la viga, se adopta la notación donde E denota que el extremo está empotrado, S denota que el extremo está simplemente apoyado y L denota que el extremo está libre. Como ejemplo, si se indica la condición de borde de una viga E-S, denota que el primer tramo, en $\bar{x} = 0$, el extremo se encuentra empotrado, mientras que en el segundo tramo, en $\bar{x} = 1$, el extremo se encuentra simplemente apoyado. Los valores numéricos del coeficiente de frecuencia λ , se calculan

según:

$$\lambda^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 l^4, \quad (61)$$

donde $\rho A = (\rho A)_1$ y $EI = (EI)_1$ siempre que no se especifique otro valor.

En la [Tabla 2](#) se compara el primer valor de λ_1 , para una viga L-L, de dos tramos, para diferentes relaciones de $(EI)_2/(EI)_1$ y $(\rho A)_2/(\rho A)_1$, donde se recuerda que $\lambda_1^4 = \frac{(\rho A)_1}{(EI)_1} l^4 \omega^2$. Los resultados son comparados con los presentados en [Grossi y Quintana \(2008\)](#).

En la [Tabla 3](#) se comparan los primeros tres valores de λ para una viga uniforme con una carga axial $S(\bar{x}) = 4\bar{x}$, $\forall \bar{x} \in [0,1]$, para distintas condiciones de contorno clásicas. Las comparaciones se realizan con los resultados presentados por [Grossi y Quintana \(2008\)](#). Se utilizó el método de Ritz en combinación con el método de los Multiplicadores de Lagrange considerando $M = 12$.

En la [Tabla 4](#) se presentan los primeros tres valores exactos de λ con sus correspondientes formas modales para una viga uniforme con dos rótulas internas para diferentes condiciones de borde simétricas y diferentes valores de $\bar{c}_i, i = 1,2$, con $T_{c_1} = T_{c_2} = 1$.

En la [Tabla 5](#) se comparan los primeros cuatro valores exactos de λ con sus correspondientes formas modales para una viga continua uniforme con condiciones en los extremos L-L con los valores obtenidos por [Blevins \(2001\)](#).

$(EI)_2/(EI)_1$	Referencia	$(\rho A)_2/(\rho A)_1$	
		0.5	0.75
1	Grossi y Quintana (2008)	5.11	4.89
	Solución exacta	5.108	4.894
0.8	Grossi y Quintana (2008)	4.98	4.76
	Solución exacta	4.983	4.761
0.6	Grossi y Quintana (2008)	4.8	4.57
	Solución exacta	4.806	4.570
0.4	Grossi y Quintana (2008)	4.51	4.27
	Solución exacta	4.509	4.270

Tabla 2: Comparación del primer valor de λ_1 , para una viga L-L, de dos tramos, para diferentes relaciones de $(EI)_2/(EI)_1$ y $(\rho A)_2/(\rho A)_1$.

C. C.	Referencia	Secuencia modal		
		1	2	3
E-E	Grossi y Quintana (2008)	4.7869	7.9002	11.0326
	Ritz y M. de Lagrange	4.78693	7.90025	11.03259
S-S	Grossi y Quintana (2008)	3.2884	6.3611	9.4773
	Ritz y M. de Lagrange	3.28844	6.36112	9.47734
L-L	Grossi y Quintana (2008)	2.1771	4.9449	7.9629
	Ritz y M. de Lagrange	2.17715	4.94491	7.96286
L-S	Grossi y Quintana (2008)	1.5634	4.0703	7.1423
	Ritz y M. de Lagrange	1.56344	4.07025	7.14227

Tabla 3: Comparación de los primeros tres valores de λ para una viga uniforme para distintas condiciones de contorno clásicas, con una carga axial $S(\bar{x}) = 4\bar{x}, \forall \bar{x} \in [0,1]$, con los obtenidos en Grossi y Quintana (2008).

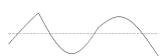
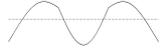
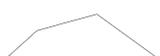
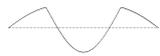
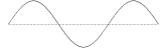
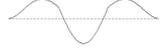
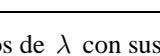
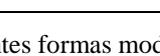
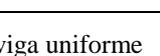
C.C.	\bar{c}_1	\bar{c}_2	λ_1		λ_2		λ_3	
F-F	0.2	0.6	1.375081		1.643200		9.362790	
	0.25	0.75	1.337032		1.618163		8.120665	
	1/3	2/3	1.414102		1.638014		10.669474	
	0.5	0.75	1.445185		1.681667		8.680980	
S-S	0.2	0.6	1.342282		1.583975		8.273242	
	0.25	0.75	1.315682		1.565026		7.855269	
	1/3	2/3	1.377333		1.564958		9.424777	
	0.5	0.75	1.390513		1.608228		7.173072	
C-C	0.2	0.6	3.772331		6.656591		9.738941	
	0.25	0.75	4.686472		6.031293		8.680536	
	1/3	2/3	4.248089		4.958357		10.740080	
	0.5	0.75	3.324057		6.124616		8.655705	

Tabla 4: Primeros tres valores exactos de λ con sus correspondientes formas modales para una viga uniforme con dos rótulas internas para diferentes condiciones de borde simétricas y diferentes valores de $\bar{c}_i, i = 1, 2$, con

$$T_{c_1} = T_{c_2} = 1.$$

Referencia	Secuencia modal			
	1	2	3	4
Blevins (2001)	7.65	7.74	16.62	18.55
Exacto	7.649344	7.739650	16.614940	18.550505
				

Tabla 5: Comparación de los primeros cuatro valores exactos de λ con sus correspondientes formas modales para una viga continua uniforme con condiciones en los extremos L-L con los valores obtenidos por Blevins (2001).

A continuación se presentan resultados obtenidos con el método de Ritz en combinación con el método de multiplicadores de Lagrange (R&ML) para una viga con cargas axiales. Se considera $M=12$ para definir el grado de los polinomios aproximantes.

En la [Tabla 6](#) se comparan los primeros cuatro valores de λ para una viga uniforme S-S, para distintos valores de carga axial $S = sl^2/(EI)$, con los resultados obtenidos por [Blevins \(2001\)](#).

S	Referencia	Secuencia modal			
		1	2	3	4
1000	Blevins (2001)	9.99174315	14.23291328	17.63499043	20.67873546
	R&ML	9.99174315	14.23291328	17.63499043	20.67873546
100	Blevins (2001)	5.73844636	8.61423444	11.38023591	14.20605601
	R&ML	5.73844636	8.61423444	11.38023591	14.20605601
10	Blevins (2001)	3.74215905	6.64804399	9.67952066	12.76075721
	R&ML	3.74215905	6.64804399	9.67952066	12.76075721
1	Blevins (2001)	3.21831368	6.32260158	9.45119253	12.58621791
	R&ML	3.21831368	6.32260158	9.45119253	12.58621791
0	Blevins (2001)	3.14159265	6.28318531	9.42477796	12.56637061
	R&ML	3.14159265	6.28318531	9.42477796	12.56637061

Tabla 6: Comparación de los primeros cuatro valores de λ obtenidos con el método de Ritz en combinación con el método de los multiplicadores de Lagrange (R&ML) para una viga uniforme S-S, para distintos valores de $S = sl^2/(EI)$, con los resultados obtenidos por [Blevins \(2001\)](#).

En la [Tabla 7](#) se comparan los primeros cuatro valores de λ obtenidos con R&ML para una viga uniforme con $T_0 = 0$, $R_0 = \infty$, y simplemente apoyada en el otro extremo, para distintos valores de carga axial $S = sl^2/(EI)$, con los resultados obtenidos por [Blevins \(2001\)](#).

S	Referencia	Secuencia modal			
		1	2	3	4
1000	Blevins (2001)	7.05224681	12.27454033	15.99719593	19.18672862
	R&ML	7.05224681	12.27454033	15.99719593	19.18672862
100	Blevins (2001)	3.98755209	7.21762377	9.99337977	12.78377717
	R&ML	3.98755209	7.21762377	9.99337977	12.78377717
10	Blevins (2001)	2.35507055	5.17138438	8.15458858	11.21620844
	R&ML	2.35507055	5.17138438	8.15458858	11.21620844
1	Blevins (2001)	1.71025536	4.76456758	7.88562092	11.01824053
	R&ML	1.71025536	4.76456758	7.88562092	11.01824053
0	Blevins (2001)	1.57079633	4.71238898	7.85398163	10.99557429
	R&ML	1.57079633	4.71238898	7.85398163	10.99557429

Tabla 7: Comparación de los primeros cuatro valores de λ obtenidos con R&ML para una viga uniforme con $T_0 = 0$, $R_0 = \infty$, y simplemente apoyada en el otro extremo, para distintos valores de $S = sl^2/(EI)$, con los resultados obtenidos por Blevins (2001).

En la [Tabla 8](#) se presentan los primeros cuatro valores de λ obtenidos con R&ML y sus correspondientes formas modales para una viga uniforme de cinco tramos iguales con el valor de todas las restricciones elásticas (extremos e intermedias) igual a 10, para $S = 10$ y $S = 2 + 3\bar{x}$.

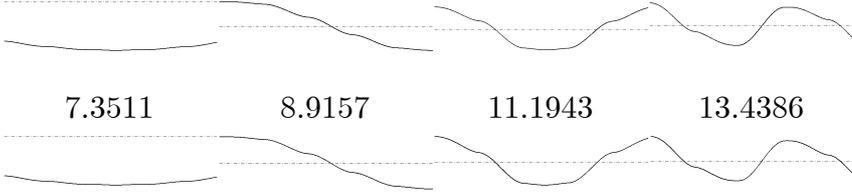
S	Secuencia modal			
	1	2	3	4
10	2.7814	4.9302	7.2296	9.5207
$2 + 3\bar{x}$	2.7812	4.7883	7.0460	9.3345

Tabla 8: Primeros cuatro valores de λ y sus correspondientes formas modales obtenidos con R&ML para una viga uniforme de cinco tramos iguales con el valor de todas las restricciones elásticas igual a 10, para $S = 10$ y $S = 2 + 3\bar{x}$.

En la [Tabla 9](#) se presentan los primeros cuatro valores de λ y sus correspondientes formas modales obtenidos con R&ML para una viga uniforme de cinco tramos iguales con el valor de todas las restricciones elásticas (extremos e intermedias) igual a 500, para $S = 10$ y $S = 10 + 20\bar{x}^2$.

En la [Tabla 10](#) se presentan los primeros cuatro valores de λ y sus correspondientes formas modales obtenidos con R&ML para una viga uniforme de cinco tramos iguales con el valor de todas las restricciones elásticas (extremos e intermedias) igual a 1000, para $S = 10$ y $S = 1000\bar{x}$.

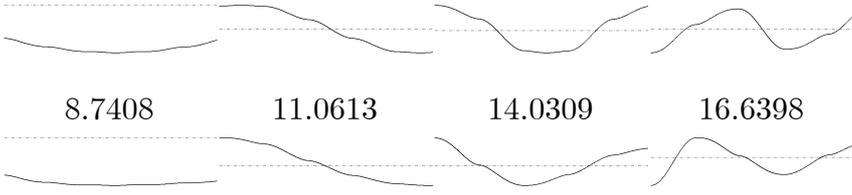
S	Secuencia modal			
	1	2	3	4
10	7.3500	8.8933	11.1424	13.3658
$10 + 20\bar{x}^2$	7.3511	8.9157	11.1943	13.4386



The figure shows the first four modal shapes for the beam in Table 9. For $S=10$, the modes are shown as solid lines. For $S=10 + 20\bar{x}^2$, the modes are shown as dashed lines. The shapes illustrate the increasing complexity and frequency of the modes as the stiffness parameter S increases.

Tabla 9: Primeros cuatro valores de λ y sus correspondientes formas modales obtenidos con R&ML para una viga uniforme de cinco tramos iguales con el valor de todas las restricciones elásticas igual a 500, para $S = 10$ y $S = 10 + 20\bar{x}^2$.

S	Secuencia modal			
	1	2	3	4
10	8.6955	9.9485	11.8859	13.9456
$1000\bar{x}$	8.7408	11.0613	14.0309	16.6398



The figure shows the first four modal shapes for the beam in Table 10. For $S=10$, the modes are shown as solid lines. For $S=1000\bar{x}$, the modes are shown as dashed lines. The shapes illustrate the increasing complexity and frequency of the modes as the stiffness parameter S increases.

Tabla 10: Primeros cuatro valores de λ y sus correspondientes formas modales obtenidos con R&ML para una viga uniforme de cinco tramos iguales con el valor de todas las restricciones elásticas igual a 1000, para $S = 10$ y $S = 1000\bar{x}$.

8 CONCLUSIONES

Se analizó el problema de vibraciones transversales en una viga compuesta por varios tramos conectados por un número arbitrario de rótulas y restricciones elásticas. Con los diferentes tramos caracterizados por distintas propiedades mecánicas tal como espesor variable y distinto material. Concretamente, la viga estaba sujeta a fuerzas axiales generales, con una carga trasversal general distribuida variable en el tiempo, con varias rótulas intermedias afectadas por restricciones elásticas traslacionales y rotacionales, y a su vez, ubicadas arbitrariamente. Ambos extremos de la viga también se encontraban restringidos elásticamente contra rotación y traslación. Los desarrollos teóricos se basaron en la hipótesis de la teoría de viga de Euler-Bernoulli.

Se presentaron diferentes valores de frecuencias naturales y formas modales de vibración de vigas donde además algunos casos fueron comparados con los obtenidos por otros autores, y de esta manera demostrar la excelente concordancia de los valores obtenidos con el modelo propuesto.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta y en la Facultad Regional Delta de la Universidad Tecnológica Nacional, con el auspicio del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET PIP 242).

REFERENCIAS

- Blevins, R. D., *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*. Van Nostrand Reinhold, 1979.
- Chun, R., Free vibration of a beam with one end spring-hinged and the other free, *Journal of Applied Mechanics*, 39:1154-1155, 1972.
- Gelos, R. y Laura, P. A. A., Vibrations of elastically restrained-Free beam with an intermediate support and carrying concentrated masses, *Journal of Sound and Vibrations*, 83(1):139-142, 1982.
- Grossi, R. O. y Albarracín, C. M., A variant of method of orthogonal polynomials, *Journal of Sound and Vibration*, 212:749-752, 1998.
- Grossi, R. O., Bhat, R. B., A note on vibrating tapered beams, *Journal of Sound and Vibration*, 47:174-178, 1991.
- Grossi, R. O., Quintana, M. V., The transition condition in the dynamics of elastically restrained beams, *Journal of Sound and Vibration*, 316:274-297, 2008.
- Luenberger D.G., *Optimization by vector space methods*. John Wiley & Sons, New York, 1969.
- Maurizi, M. J., Bambill, D. V., Free vibration of a clamped-clamped beam with an intermediate elastic support, *Journal of Sound and Vibration*, 119:173-176, 1987.
- Naguleswaran, S., Transverse vibration of an Euler–Bernoulli uniform beam on up to five resilient supports including ends, *Journal of Sound and Vibration*, 261:372-384, 2003.
- Naguleswaran, S., Transverse vibration of a uniform Euler–Bernoulli beam under linearly varying axial force, *Journal of Sound and Vibration*, 275:47–57, 2004.
- Nallim, L., Grossi, R. O., A general algorithm for the study of the dynamical behaviour of beams, *Applied Acoustics*, 57:345-356, 1999.
- Necas, J., *Les Méthodes Directes en Theorie des Equations Elliptiques*. Academia, Praga, 1967.
- Qiao, H., Li, Q. S. y Li, G. Q., Vibratory characteristics of flexural non-uniform Euler–Bernoulli beams carrying an arbitrary number of spring–mass systems, *International Journal of Mechanical Sciences*, 44:725–743, 2002.
- Raffo, J. L. y Grossi, R. O., A study on mode shapes of beams with internal hinges and intermediate elastic restraints, *Mecánica Computacional*, 31:2593-2610, 2012.
- Rektorys, K., *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*. D. Reidel Co., 1980.
- Rutemberg, A., Vibration frequencies for a uniform cantilever with a rotational constraint at a point, *Journal of Applied Mechanics*, 45:422-123, 1978.