

COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE MAPEOS LOGÍSTICOS ACOPLADOS OPERANDO SOBRE TEXTURAS

M.V. Cifuentes^a y A. Clause^b

^a*CICPBA y Universidad Nacional del Centro, 7000 Tandil*

^b*CNEA-CONICET y Universidad Nacional del Centro, 7000 Tandil*

Palabras Clave: Método de Lattice Boltzmann, Mapas Acoplados, Ecuación Logística, Detección de Textura, Caos.

Resumen. Los mapeos acoplados (CML) son una clase de autómatas celulares que permite simular fenómenos de acoplamiento por vecindades, a través de reglas de transporte o fuerzas de interacción. En trabajos anteriores se mostró que esta técnica permite en algunos casos diferenciar características texturales que son muy difíciles de distinguir a simple vista o por medio de métodos de umbralado. En este trabajo se presentan los avances alcanzados en la aplicación de CML actuando sobre imágenes digitales, con el objetivo de caracterizar texturas. En este caso se estudiaron las características dinámicas de los mapeos guiados por *kernels* cuadráticos construidos a partir de la textura local de las imágenes, como ciclos periódicos y caóticos.

1 INTRODUCCIÓN

Las grillas de mapeos acoplados (CML) son autómatas celulares que actúan en vecindades definidas en espacios discretizados. Desde un punto de vista numérico, CML podrían considerarse como una generalización de esquemas de diferencias finitas, donde se exploran funciones generales de acoplamiento entre celdas, aunque éstas no provengan de ecuaciones diferenciales de algún campo subyacente en el espacio continuo asociado a la grilla del mapeo. Originalmente CML se propuso como un modelo sencillo de caos espacio-temporal, y fue aplicado en la simulación de redes neuronales, reacciones químicas, dinámica poblacional y sistemas físicos complejos en general (Kaneko, 1989; Kaneko, 1990; Kaneko, 1993; Ouchi et al, 2000).

Un ejemplo sencillo de CML es el caso de osciladores no lineales acoplados. Cada oscilador es capaz de generar su propio ritmo y tiene la habilidad de ajustarlo debido a una pequeña interacción con los osciladores vecinos. Esta coordinación de ritmos, que ocurre para un cierto rango de desajuste de valores de los parámetros del sistema, se manifiesta como el fenómeno no lineal de sincronización (Picovsky et al., 2001). Esta idea aplicada a la detección de texturas en imágenes digitales está basada en encontrar discontinuidades o similitudes en la dinámica de elementos vecinos.

En trabajos anteriores se estudiaron CML basados en el método de lattice Boltzmann que combinan reglas de evolución lineal (Cifuentes et al, 2012) y no lineal para segmentar texturas. El mapeo lineal gobierna el transporte de pseudo-partículas entre píxeles vecinos sobre un medio de propagación que es una matriz de dispersión construida a partir de las distribuciones de gris de los píxeles de cada vecindad. El mapeo no lineal (cuadrático) gobierna la interacción entre las poblaciones de pseudo-partículas sobre un medio de propagación matricial que incorpora información adicional sobre la dirección de la textura; relaciona dos direcciones de entrada con una de salida.

Finalmente se obtuvo un CML no lineal similar a la ecuación logística capaz de segmentar texturas en imágenes digitales naturales con facilidad (Cifuentes et al, 2013). Pero una ecuación tan sencilla como lo es la ecuación logística puede dar resultados tan sorprendentes como los mapeos caóticos (Grassberger & Procaccia, 1983; Sprott, 2003; Strogatz, 2000; Tufillaro et al, 1992). La sincronización de sistemas caóticos no es trivial, depende sensiblemente de las condiciones iniciales, y por tanto, dos trayectorias que surgen de condiciones iniciales muy cercanas se separan exponencialmente a lo largo del tiempo. Ya Pecora y Carrol (1990) demostraron que dos comportamientos caóticos aleatorios e imprevisibles que inicialmente evolucionan sobre trayectorias diferentes, pueden fundirse en una única trayectoria común si se acoplan de manera conveniente.

En el contexto de los sistemas caóticos acoplados, este trabajo presenta los avances alcanzados en la aplicación de CML actuando sobre imágenes digitales, con el objetivo de caracterizar texturas. Se estudiaron las características dinámicas de los mapeos guiados por *kernels* cuadráticos construidos a partir de la textura local de las imágenes, como ciclos periódicos y caóticos. Este enfoque experimental resulta adecuado para explorar la sincronización de éstos sistemas caóticos.

2 MAPEOS ACOPLADOS DIRECCIONALES

Consideremos una grilla 2D regular cuadrada, que puede representar una imagen digital cada uno de cuyos píxeles se identifica con una celda de la grilla. El estado de cada píxel \vec{x} está caracterizado por 9 funciones reales $f_i(\vec{x}, t)$, $i = 0, 1, \dots, 8$, cada una de las cuales se asocia a una dirección preferencial en la grilla definida por un vector \vec{e}_i , a saber: $\vec{e}_0 = (0,0)^T$, $\vec{e}_1 = (1,0)^T$, $\vec{e}_2 = (1,1)^T$, $\vec{e}_3 = (0,1)^T$, $\vec{e}_4 = (-1,1)^T$, $\vec{e}_5 = (-1,0)^T$, $\vec{e}_6 = (-1,-1)^T$, $\vec{e}_7 = (0,-1)^T$ y $\vec{e}_8 = (1,-1)^T$. En este sentido, el mapeo se representa en la misma manera que las grillas de Lattice Boltzmann (Chen & Doolen, 1998; Geist & Westall, 2011) utilizando un esquema de vecindad basado en la red de Moore.

En trabajos previos se propuso un mapeo relacionando la función $f_i(\vec{x}, t)$ con una combinación lineal y una combinación cuadrática de las funciones de celdas del vecindario, esto es (Cifuentes et al, 2013):

$$f_i(\vec{x} + \vec{e}_i, t + 1) = \sum_{j=0}^8 A_{ij}(\vec{x}) f_j(\vec{x}, t) - \sum_{j=0}^8 \sum_{k=0}^8 B_{jik}(\vec{x}) f_j(\vec{x}, t) f_k(\vec{x}, t) \quad (1)$$

A_{ij} y B_{ijk} son *kernels* que se construyen con los tonos de gris de los píxeles correspondientes al vecindario de \vec{x} de acuerdo a:

$$m_{ij}(\vec{x}) = a \frac{g(\vec{x} + \vec{e}_j)}{g(\vec{x} + \vec{e}_i)} \quad M_{ikl}(\vec{x}) = b \frac{g(\vec{x} + \vec{e}_k) + g(\vec{x} + \vec{e}_l)}{g(\vec{x} + \vec{e}_i)} \quad (2)$$

donde $g(\vec{x})$ es el tono de gris del píxel \vec{x} , y a y b son constantes de control.

En los trabajos previos se aplicó el mapeo dado por la Ecs. (1) y (2) en el estudio de imágenes digitales, y se encontró que ofrecen la posibilidad de detectar las texturas en imágenes digitales. En esos trabajos se estudiaron condiciones de punto fijo estables que llevan a estados estacionarios que pueden ser usados para segmentación de regiones (Cifuentes et al, 2013). En esos estudios se encontró que cuando el mapeo se vuelve inestable, se dan casos en que emergen patrones dinámicos interesantes, como aglutinaciones de mapas vecinos sincronizados o limitados por las variaciones espaciales bruscas en el nivel de gris.

Supongamos ahora el caso particular una imagen plana en la que todos los píxeles tiene una misma intensidad g_0 . De acuerdo con las Ecs. (2) todos los elementos de los *kernels* A_{ij} y B_{ijk} son iguales para todos los píxeles de la imagen, es decir $A_{ij} = a$ y $B_{ijk} = 2b$. Si se parte de un estado inicial uniforme, la Ec. (1) resulta entonces:

$$f_i(t + 1) = a \sum_{j=0}^8 f_j(t) - 2b \sum_{k=0}^8 \sum_{l=0}^8 f_l(t) f_k(t) = \rho(t)[a - 2b\rho(t)] \quad (4)$$

donde se definió la densidad $\rho = \sum_{j=0}^8 f_j$.

Sumando sobre i , se obtiene el mapeo de la densidad:

$$\rho(t + 1) = \rho(t) [9a - 18b \rho(t)] \quad (5)$$

que es la conocida ecuación logística, paradigma de los mapeos caóticos, cuya ecuación de puntos fijos es:

$$\rho_0 = \rho_0(9a - 18b \rho_0) \quad (6)$$

Una de las soluciones de la Ec. (6) es el $\rho_0 = 0$. El otro punto fijo es:

$$\rho_0 = \frac{9a-1}{18b} \quad (7)$$

Si nos restringimos a valores positivos de ρ debe cumplirse entonces $a > \frac{1}{9}$.

Para analizar la estabilidad de este punto fijo definimos la variable $x = \rho - \rho_0$ y quedándonos sólo con los términos lineales en x se obtiene:

$$x_{n+1} = (1 - 18b\rho_0)x_n \quad (8)$$

Esta es una ecuación en diferencias lineal que es inestable cuando el coeficiente de x_n es menor que -1 , lo cual se cumple para $b\rho_0 > \frac{1}{9}$. Combinando esta condición con la Ec.

(7) se obtiene la condición de estabilidad $a > \frac{1}{3}$.

Ahora bien, según el valor inicial este mapeo es posible que diverja o dar valores negativos, lo cual es inconveniente para posibles aplicaciones. Para controlar que el mapeo nunca diverja o se haga negativo, se propone aquí modificar el mapeo dado por la Ec. (1) tomando el valor absoluto del seno del miembro de la derecha. Esto introduce una mezcla acotada pero con valores muy dispersos, por lo cual hay que tratar de mantenerse cerca del mapeo original. Esto ocurre cuando el seno del argumento es aproximadamente igual al argumento, o sea $\sin \theta \cong \theta$, lo cual se cumple cuando $\theta \ll 1$. Es decir, hay que asegurar que el miembro de la derecha del mapeo se mantenga en valores $\ll 1$. Mirando la ecuación logística de la densidad, se puede ver que es una parábola que tiene un máximo en el valor de ρ que cumple:

$$a - 4b\rho = 0 \quad (9)$$

Para ese valor, el máximo de la parábola es:

$$\rho_{m\acute{a}x} = \frac{a}{4b} \left(9a - \frac{9}{2}a \right) = \frac{9a^2}{8b} \quad (10)$$

Entonces, la condición $\frac{9a^2}{8b} \ll 1$ asegura que el argumento del seno sea pequeño. Entonces, el rango de valores ideales del mapeo para aplicaciones en imágenes será:

- $a > 1/9$ moviéndose alrededor de $1/3$ que es donde se inestabiliza el mapeo y aparecen efectos interesantes como aglutinaciones entre celdas vecinas o estructuras parecidas a laberintos, por ejemplo. Se comienza a analizar siempre la zona estable ($<1/3$) y se va aumentando a de a poco.
- $\frac{9a^2}{8b} \ll 1$, que sabiendo que a será a lo sumo ~ 1 , implica: $b \gg 1$.
- El valor inicial del mapeo debe ser bastante menor que $\rho_o/9$. Para $b=10$, queda:

$$f_{inicial} < \frac{1}{9} \frac{9}{180} a = \frac{a}{180}$$

3 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Se realizó una serie de experimentos numéricos de mapeos dados por la Ec. (1) modificada operando con *kernels* de interacción construidos con imágenes típicas. El objetivo de los experimentos es explorar cómo influye la textura en el comportamiento caótico de los mapeos.

La **Figura 1** muestra los casos de prueba de una imagen plana cuyos píxeles tienen la misma intensidad y una imagen de textura uniforme que se construye repitiendo un mismo patrón de textura en toda la imagen. La **Figura 2** muestra el tercer caso de prueba, que es una imagen cuya textura parece uniforme a simple vista, pero es el resultado de fusionar tres imágenes: una textura uniforme, un objeto de textura similar (que ocupa la máscara que se muestra en la figura del medio abajo) y un logotipo. La textura del objeto se construye intercalando el patrón de 3×3 píxeles usado para la primera capa junto a otro patrón al que se le incrementó en una unidad la intensidad de su píxel central. La tercera capa se escaló para que entre en la imagen fusionada resultante.

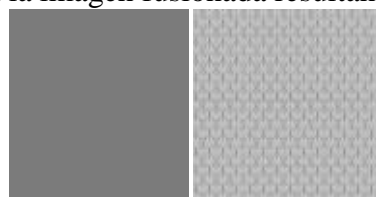


Figura 1. Imagen plana y uniforme sintética.

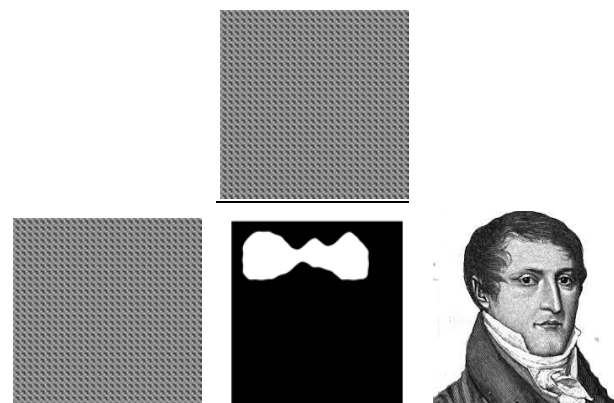


Figura 2. La imagen de arriba es el caso de estudio, formado por la fusión de las tres capas que se muestran abajo: uniforme sintética (izq.), máscara de una zona con textura similar al fondo (centro), logotipo de Manuel Belgrano.

Imagen plana. Los resultados numéricos obtenidos para el caso de la imagen plana verifican que para $a < 1/3$ el modelo es estable. Para $a = 0.4$, partiendo condiciones iniciales uniformes se obtienen variaciones caóticas en bloque, como era de esperar. Se estudiaron los mapas de retorno del promedio ρ , es decir ρ_{n+1} vs ρ_n . En la Figura 3 se muestran los retornos obtenidos para diferentes valores del parámetro b . Se observa que se sigue la parábola dada por la Ec. (5), que se hace cada vez más alta a medida que b baja.

Textura uniforme: En la Figura 4 se comparan los mapas de retorno de la densidad para un pixel de la imagen plana y la de textura sintética (Fig. 1), obtenido $b = 10$ y distintos valores de a . Al igual que en la conocida ruta de transición al caos de la ecuación logística, van apareciendo ciclos con duplicación de períodos, es decir aparecen órbitas de período 2, 4, 8, etc. para $a = 0.35$, 0.385 y 0.39 respectivamente. Valores mayores lleva a comportamientos caóticos. Puede observarse que los comportamientos de la densidad en las dos imágenes son iguales.

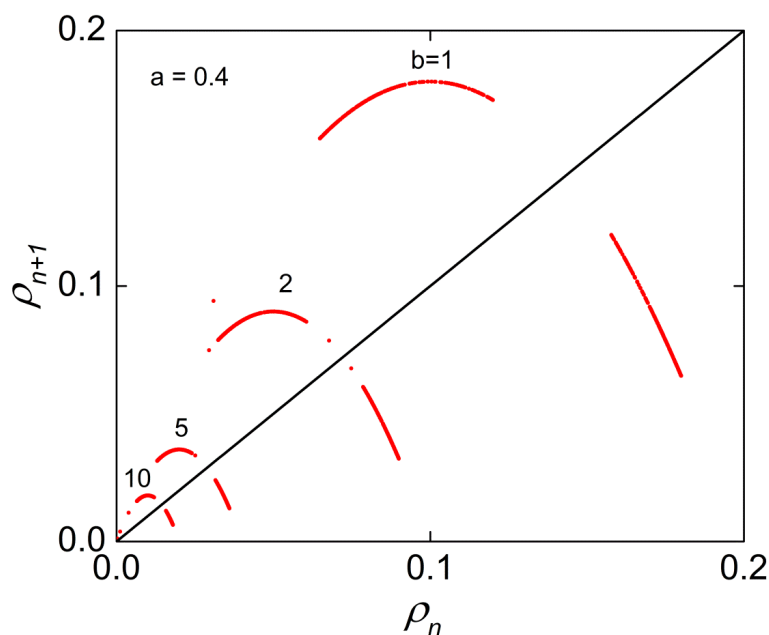


Figura 3. Imagen plana. Mapeos de retorno de la densidad para $a = 0.4$ y variando b .

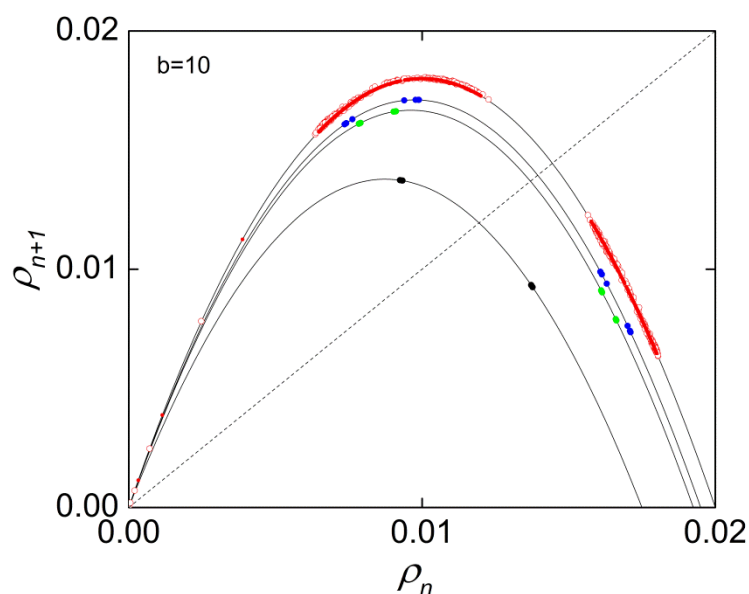


Figura 4. Mapeos de retorno de la densidad para imágenes planas (círculos llenos) y textura uniforme (círculos vacíos). Variando el parámetro a aparecen los ciclos: 2 ciclos cuando $a=0.35$ (negro), 4 ciclos cuando $a=0.385$ (verde), 8 ciclos cuando $a=0.39$ (azul); para $a=0.4$ (rojo) la dinámica es caótica. Las parábolas en líneas llenas corresponden a la Eq. (5).

Caso imagen aparentemente uniforme: La imagen estudiada es la que se muestra en la parte superior de la Figura 2, que fusiona varias regiones con diferentes texturas que no son distinguibles a simple vista. Primeramente se estudió el comportamiento del mapeo en la zona estable, fijando $a = 0.2$ y $b = 10$. En la Figura 5 (izq.) se muestra el mapa de densidad asintótico donde se pueden distinguir las siluetas de la capa texturada y el logotipo. Se muestra también el mapa de desplazamiento medio, definido como el módulo del vector:

$$\vec{u} = \sum_{j=0}^8 f_j \vec{e}_j$$

en el cual el prócer es más distinguible.

Aumentando el parámetro a se obtienen mapeos caóticos de retorno de la densidad, que se van desviando de la Eq. (5) para a grandes. En la Figura 6 se muestran los mapas de retorno de la densidad en tres píxeles característicos de la imagen: un píxel de la textura de fondo (puntos negros), un píxel de la región texturada (puntos azules) y un píxel del logotipo. Para $a=0.28$ (arriba) se observan órbitas estables de período 2, que son de distinta amplitud en cada caso. La amplitud de la oscilación por tanto podría ser útil para operaciones de segmentación. Separar las texturas (o segmentar) consiste en calcular indicadores estadísticos conocidos a partir de las series temporales o mapas en cada celda. Es interesante observar que los valores de la densidad no caen sobre la parábola dada por la Ec. (5), la cual se muestra en el gráfico. Este efecto no es extraño dado que la Ec. (5) es válida solamente si la textura es uniforme en toda la imagen.

Para $a = 0.35$ el comportamiento es caótico, y el mapa de retorno sigue una parábola pero con una pequeña dispersión. La Ec. (5) se acerca más a los puntos del retorno, pero los retornos de los distintos píxeles se mezclan. Para $a = 0.4$ la dispersión es mayor.

Las oscilaciones espaciales en este régimen mostraron la formación de patrones con cierta auto-organización. En la Figura 7 se muestran las distribuciones mapas de densidad instantáneas obtenidas para dos valores de a . Aunque la correspondencia no es

concluyente, para $a = 0.35$, cercano al límite entre el comportamiento oscilatorio estable y el caos, se forman estructuras elongadas que en cierta manera delimitan la zona texturada y el logotipo por un lado y el triángulo inferior izquierdo de textura de fondo.

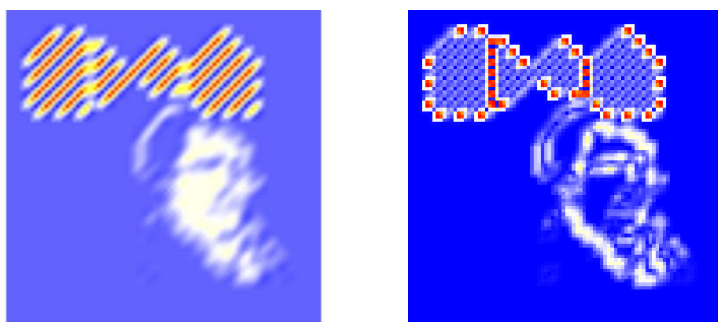
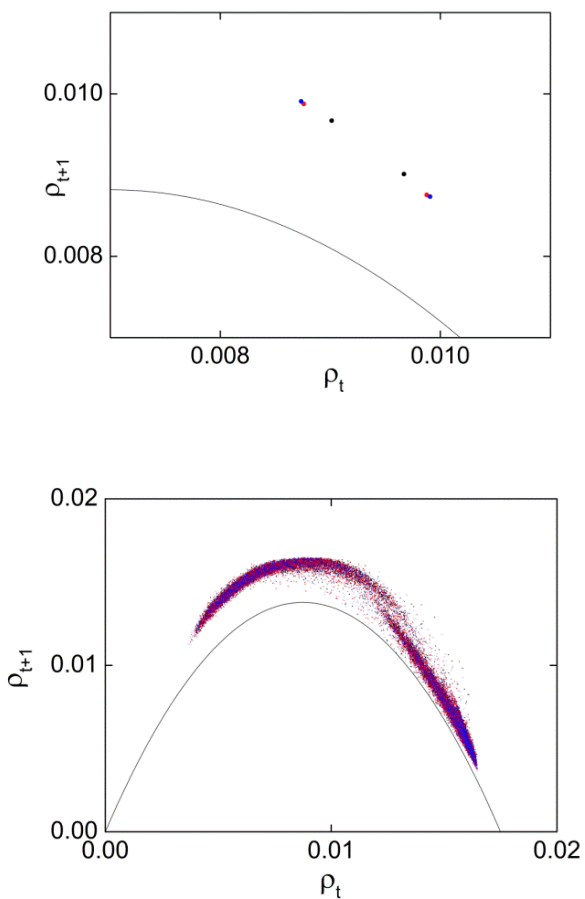


Figura 5. Mapas de la densidad (izq.) y el desplazamiento medio (der.) obtenidos con un mapeo estable sobre la imagen que se muestra en la Figura 2.



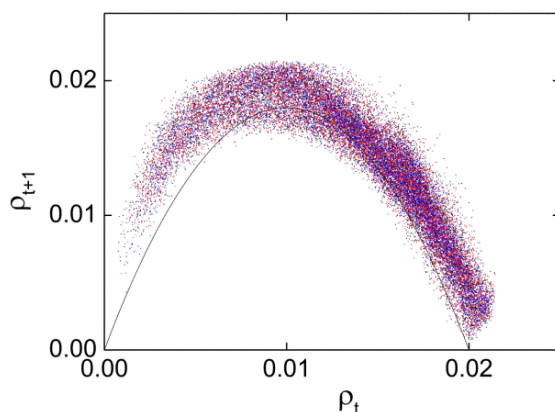


Figura 6. Mapeos de retorno de la densidad para la imagen de la Figura 2. De arriba hacia abajo $a = 0.28$, 0.35 y 0.4 . Los puntos negros corresponden a un pixel del fondo, azules un pixel de la zona texturada, y rojos al zona del logotipo.

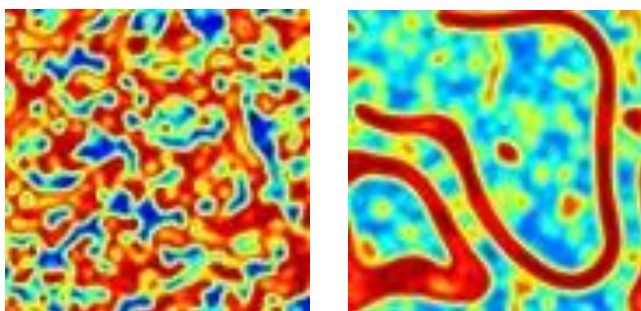


Figura 7. Caso de la Figura 2. Distribución instantánea de la densidad para $a = 0.4$ (izquierda) y $a = 0.35$ (derecha).

4 CONCLUSIÓN

Se presentó un estudio de exploración numérica de un mapeo cuadrático guiado por *kernels* de interacción construidos a partir de la textura de imágenes digitales 2D. El mapeo mostró comportamientos análogos a la ecuación logística, incluyendo puntos fijos estables, ciclos con doblaje de periodos, y caos. Se encontró que este tipo de mapeos es extremadamente sensible a la textura, por lo que lo hace un candidato interesante para el diseño de herramientas complementarias a los métodos tradicionales de segmentación de texturas.

REFERENCIAS

- Chen S.; Doolen G. D. Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows. *Annual Reviews Fluid 1102 Mechanics*, 30:329-64, 1998.
- Cifuentes, V.; Iarussi, E.; Clausse, A. Método de lattice-Boltzmann para segmentación de texturas en imágenes. *Mecánica Computacional*, 31:3027-3036, 2012.
- Cifuentes, V.; Clausse, A. Grillas de mapeos acoplados para segmentar texturas. *Mecánica Computacional*, 32:3811-3821, 2013.
- Geist, R.; Westall, J. Lattice-Boltzmann Lighting Models, *GPU Computing GEMS Emerald Edition*, Wen-mei Hwu, Editor, Morgan Kaufmann, 2011.
- Grassberger, P.; Procaccia, I. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 9 (1-2): 189–208, 1983.
- Kaneko, K. Pattern Dynamics in Spatiotemporal Chaos. *Physica D* 34:1-41, 1989.
- Kaneko, K. Simulating Physics with Coupled Map Lattices. *Pattern Dynamics*,

- Information Flow, and Thermodynamics of Spatiotemporal Chaos. *Formation, Dynamics, and Statistics of Patterns* 1:1-52. Ed. K. Kawasaki, A. Onuki y M. Suzuki, World Scientific, 1990.
- Kaneko, K. Coupled Map Lattice – Introduction, Phenomenology, Lyapunov Analysis, and Applications. *Theory and Applications of Coupled Map Lattices*. Ed. K. Kaneko, John Wiley and Sons, pp. 1-49, 1993.
- Ouchi, D.N.B.; Kaneko, K. Coupled Map with Local and Global Interactions. *Chaos* 10:359-365, 2000.
- Pecora, L.M.; Carroll, T.L.: Synchronization in Chaotic Systems. *Phys. Rev. Lett.* 64: 821-824, 1990.
- Picovsky, A.S.; Rosenblum, M.G.; Kurths, J.: Synchronization. A universal Concept in Nonlinear Sciences: Cambridge University Press. A 44: 2374, 2001.
- Sprott, Julien Clinton: Chaos and Time-Series Analysis. Oxford University Press. ISBN 0-19-850840-9, 2003.
- Strogatz, Steven: Nonlinear Dynamics and Chaos. Perseus Publishing. ISBN 0-7382-0453-6, 2000.
- Tufillaro, N.; Abbott, T.; Reilly, J.: An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos. Addison-Wesley New York. ISBN 0-201-55441-0, 1992.