

RECONSTRUCCIÓN TOMOGRÁFICA GUIADA POR ECUACIONES DE TRANSPORTE

Rosana Barbuzza^a y Alejandro Clause^{a,b}

^aUniversidad Nacional del Centro, 7000, Tandil, Argentina, rbarbu@exa.unicen.edu.ar

^bCNEA-CONICET, clause@exa.unicen.edu.ar

Keywords: Tomografía, Reconstrucción con información.

Resumen. En visualización de procesos internos de transporte, muchas veces se conoce a priori las ecuaciones que gobiernan el fenómeno que genera el campo visualizable (por ejemplo, difusión o convección). En casos de visualizaciones reconstruidas indirectamente, como la tomografía computada, el conocimiento de las ecuaciones subyacentes puede aportar información adicional a las mediciones directas (proyecciones ópticas o radiográficas). En este trabajo se presenta un método para la reconstrucción tomográfica de imágenes asistida por información a priori de la ecuación de transporte que determina la formación de la imagen. En particular se supuso que la imagen es proporcional a la concentración de un material que sigue la ecuación de difusión con fuentes internas. Las reconstrucciones se realizan usando un algoritmo de Metropolis Monte Carlo. Se estudió la variación del error de la solución numérica con el peso relativo de la información proveniente de la ecuación de transporte respecto de la información que aportan las proyecciones. El algoritmo estocástico desarrollado puede ser de utilidad en los casos en que las imágenes de la zona de estudio están gobernadas por ecuaciones conocidas, permitiendo reconstrucciones de alta calidad con un número reducido de proyecciones.

1 INTRODUCCION

La captura de los fenómenos dinámicos ha sido objeto de numerosas investigaciones, que se extiende al estudio de objetos deformables como por ejemplo el cuerpo humano o en fenómenos naturales como superficies líquidas, mezclas de líquidos (Grant, 1997; Morris y Kutulakos, 2005; Ihrke et al, 2005; Wetzstein et al, 2011), gases y humos (Atcheson et al, 2008; Hawkins et al, 2005), llamas y conducción del calor a través de sólidos (Hasinoff y Kutulakos, 2007; Ihrke y Magnor, 2004). En particular, la visualización de fluidos es un área de investigación muy activa, especialmente con la técnica *Particle Imaging Velocimetry* que produce imágenes de proyecciones del campo de velocidades en cortes a través del volumen (Gregson et al, 2012). El concepto básico de esta técnica es la inferencia indirecta de la velocidad local a partir de la correlación entre dos imágenes tomadas en tiempos muy cercanos.

Otra técnica complementaria para la visualización del interior de un volumen dado es la tomografía computada, que consiste en la reconstrucción indirecta del campo de atenuación local a partir de proyecciones radiográficas en varios ángulos. Esta técnica también fue extendida a proyecciones ópticas a través de medios translúcidos, como tejidos biológicos o fluidos turbios.

En trabajos anteriores (Barbuzza y Clause, 2011) se presentó un algoritmo de reconstrucción tomográfica basado en el método de Monte Carlo, que permite la incorporación de filtros de suavizado para guiar el proceso de búsqueda de soluciones compatibles con las mediciones directas. En este trabajo se presenta una extensión del algoritmo mencionado, que introduce un sesgo en la búsqueda, privilegiando las soluciones que satisfacen las ecuaciones de transporte que generan el conjunto de datos. En esta etapa preliminar del trabajo las proyecciones son generadas numéricamente. En etapas posteriores se prevé la aplicación a mediciones experimentales.

2 TOMOGRAFÍA COMPUTADA GUIADA

La tomografía computada (CT) es la reconstrucción de un campo escalar a partir de un conjunto finito de proyecciones del mismo. En un sentido amplio también se llama tomografía a cualquier proceso de reconstrucción de alguna propiedad distribuida en el interior de un volumen a partir de información de algunos promedios de esa distribución.

Sea f que describe una imagen de $N \times N$ píxeles no conocida, la cual se representa por un vector columna n -dimensional ($n=N \times N$) y R una matriz de $m \times n$, cuyos elementos r_{ij} denotan los coeficientes de contribución del j -ésimo píxel al i -ésimo rayo (Figura 1). Luego, la transformada discreta de Radon de f se define como:

$$R f = g, \quad (1)$$

donde g es un vector m -dimensional de proyecciones (m rayos se proyectan a través de f). En general, $m < n$. El problema de la CT consiste de encontrar f dados R y g .

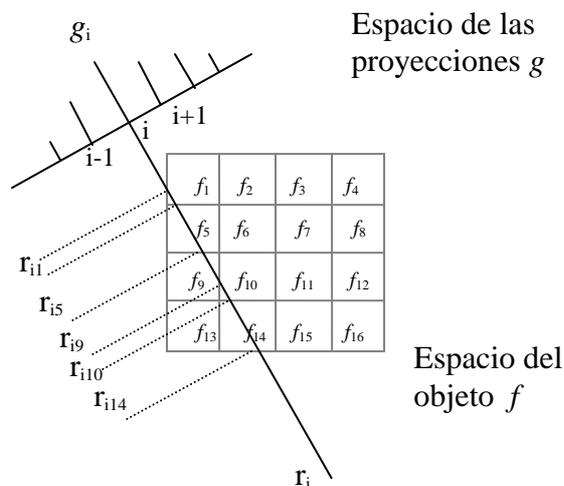


Figura 1. i -ésimo rayo a través del objeto discretizado f , para $N=4$ y $n=16$

En el presente trabajo estamos interesados en soluciones de la Ec. 1a partir de un número pequeño de proyecciones g . Esto puede ocurrir por ejemplo si el campo de atenuación varía con el tiempo, con lo cual sólo se dispone de un lapso limitado de tiempo para medir. En esos casos, aunque la información de las proyecciones es incompleta, es posible producir reconstrucciones con calidad razonable si se dispone de información adicional, lo cual permite estimar f como la solución correspondiente a la Ec. 1 que sea consistente con la información adicional. Los métodos tradicionales de tomografía computada no son fáciles de extender para incluir información a priori (Herman et al, 1999; Geman y Geman, 1984). Estos métodos son adecuados cuando se dispone de un conjunto grande de proyecciones (180 proyecciones o más). En casos de proyecciones limitadas o ruidosas, se necesitan algoritmos alternativos que pueden mejorar las imágenes respecto de los algoritmos tradicionales.

La aplicación del método de Monte Carlo para resolver la Ec. 1 consiste en realizar una búsqueda aleatoria de la función f que satisface dicha ecuación (Barbuzza y Clause, 2011). Una métrica clásica para evaluar esto último es el error cuadrático entre las proyecciones producidas por una imagen test f^t y las proyecciones reales g , que se expresa como $\|Rf^t - g\|^2$. La información adicional es muy fácil de incorporar en este proceso, ya que bastará con agregar un término a este error, que tenga en cuenta la consistencia con la nueva información.

Consideremos el caso en que el campo f satisface la ecuación de difusión estacionaria con fuente S , esto es:

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = S \quad (2)$$

donde x e y son las coordenadas espaciales cartesianas y α es el coeficiente de difusión, los cuales pueden depender de x en general. Usando un esquema simple de diferencias finitas, la Ec. (2), se puede discretizar para relacionar los valores de f en píxeles vecinos de la imagen, esto es:

$$f(i, j+1) + f(i+1, j) + f(i-1, j) + f(i, j-1) - 4f(i, j) + s(i, j) = 0 \quad (3)$$

donde los subíndices indican la posición del píxel y:

$$s(i, j) = \frac{S(i, j)}{\alpha(i, j)} \Delta x^2 \quad (4)$$

donde Δx es el tamaño del píxel.

Si sabemos que la imagen f fue generada por la Ec. (2), entonces podemos guiar el motor de búsqueda de Monte Carlo mediante una función objetivo que incluya la Ec. (3). Esto es:

$$E(f, g) = \|Rf - g\|^2 + \beta \sum_j (f_{j+1} + f_{j-1} - 4f_j + f_{j-N} + f_{j+N} + s_j)^2 \quad (5)$$

El parámetro β controla el peso relativo que se le da a la información respecto de la información de las proyecciones. En una imagen de $N \times N$ píxeles, f_j representa el j -ésimo píxel y sus vecinos $f_{j-1}, f_{j+1}, f_{j-N}$ y f_{j+N} , izquierdo, derecho, superior e inferior respectivamente.

Algoritmo 1 Tomografía estocástica por RandomWalk

```

 $f^0 \leftarrow$  guess,  $k=0$ 
repeat
  // Generar la muestra  $f^k$  a partir de la muestra  $f^{k-1}$  con distribución de transición  $p(f^k/f^{k-1})$ 
   $k=k+1$ 
   $f^k =$  muestra( $f^{k-1}$ ;  $p(f^k/f^{k-1})$ )
   $\Delta E = E(f^k, g) - E(f^{k-1}, g)$  //Calcula la diferencia de Energía
  if ( $\Delta E < 0$ ) or (random()  $< e^{\Delta E/T}$ ) then
    Guardar( $f^k$ ) // Incorpora la muestra como salida
  else
     $f^k = f^{k-1}$  // Mantener la muestra anterior, rechazando el movimiento
  end if
until ( $\Delta E > cota$ )

```

Figura 2. Pseudocódigo del algoritmo MMC implementado.

Un motor de Monte Carlo de “fuerza bruta” minimizaría el error E simplemente generando muestras y aceptando cada nueva imagen test si la diferencia con la muestra anterior es positiva o descartándola en caso contrario. Un enfoque más práctico es el algoritmo Metropolis Monte Carlo (MMC) que genera muestras explorando aquellas que tienen mayor probabilidad (Gregson et al, 2012; Barbuza y Clause, 2011). Para ello cada nueva muestra se genera por modificación aleatoria de unos pocos píxeles de la muestra anterior. Si el cambio produce una variación ΔE negativa o nula el cambio es incondicionalmente aceptado, mientras que si ΔE es positiva el cambio se acepta con probabilidad $e^{\Delta E/T}$, donde T es un parámetro equivalente a la temperatura en mecánica estadística (Metropolis et al, 1953). Este método es un caso particular el método de Markov-Chains Monte Carlo (MCMC), el cual

involucra un proceso de Markov que genera una secuencia de estados cuya probabilidad depende del estado previo. El esquema del algoritmo se describe en la (Figura 2). En el presente trabajo, MMC se aplica para encontrar el vector f que minimiza $E(f, g)$ dada por la Ec. (5). Para generar una nueva instancia a partir de la anterior, se selecciona un píxel aleatoriamente y su escala de grises (256 grises) se modifica aleatoriamente guiado por el random walk preferencialmente hacia imágenes que tienen una mayor probabilidad de ser consistentes con los datos reales.

El criterio para aceptar los cambios es minimizar $E(f, g)$. En esta forma, la desviación de las proyecciones producidas en el paso t por la imagen actual f^t y las proyecciones g es minimizar el error en las proyecciones preservando tanto como sea posible la consistencia con la ecuación de difusión. Comenzando con f^0 , la secuencia de imágenes aceptadas generan una cadena de Markov. Generalmente, el proceso se estabiliza con un valor de energía y condición límite si alcanza un valor mínimo de E .

3 RESULTADOS

Se generó numéricamente una imagen 2D de 128×128 píxeles usando la ecuación discreta de difusión (Ec. 3) y una fuente s distribuida en una figura de forma hexagonal como muestra la Fig. 3 (izquierda) con condiciones de contorno nulas en todos los bordes externos, y $\alpha=0.01$. El campo resultante se muestra en la Figura 3. A partir de esta imagen se simuló 8 proyecciones a $0, 30, 60, 75, 90, 105, 120$ y 150° usando 128 rayos equiespaciados en cada dirección.



Figura 3. Fuente original S (izquierda) para el proceso de transporte (derecha)

A partir de las 8 proyecciones se aplicó el algoritmo descrito en la Figura 2, suponiendo que la distribución de la fuente es conocida. Se realizaron distintas reconstrucciones variando el parámetro β . La Figura 4 muestra los diferentes resultados comenzando con $\beta=0$, que minimiza sólo el error $\|Rf - g\|^2$. Se puede observar en la secuencia que al incrementar β la reconstrucción va aproximando a la imagen real que se muestra en la Figura 3 (derecha). En la Figura 5 se grafica el desvío cuadrático medio σ entre la imagen reconstruida y la imagen original. El valor mínimo de error ($\sigma=1717$) se alcanza para $\beta=100$. Una observación interesante es que las reconstrucciones con información a priori siempre son mejores (*i.e.*, menor σ) que con $\beta=0$. En la Figura 6 se pueden observar los dos términos de la (Ec. 5) discriminados.

En la Figura 7 se muestran imágenes reconstruidas usando $\beta=15$ y $\beta=25$ con una función de regularización dada por la suma del desvío estándar de cada píxel con sus 8 vecinos (Barbuzza y Clausse, 2011). Si bien en este caso se logra suavizar las imágenes, el error σ es

mayor ($\sigma=2533$ y $\sigma=2626$, para $\beta=15$ y $\beta=25$ respectivamente) que regularizando mediante la ecuación de transporte.

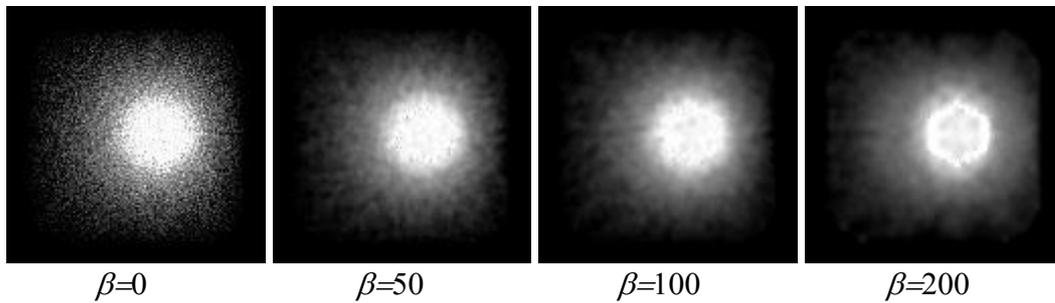


Figura 4. Reconstrucciones con distintos β de la imagen a partir de 8 proyecciones

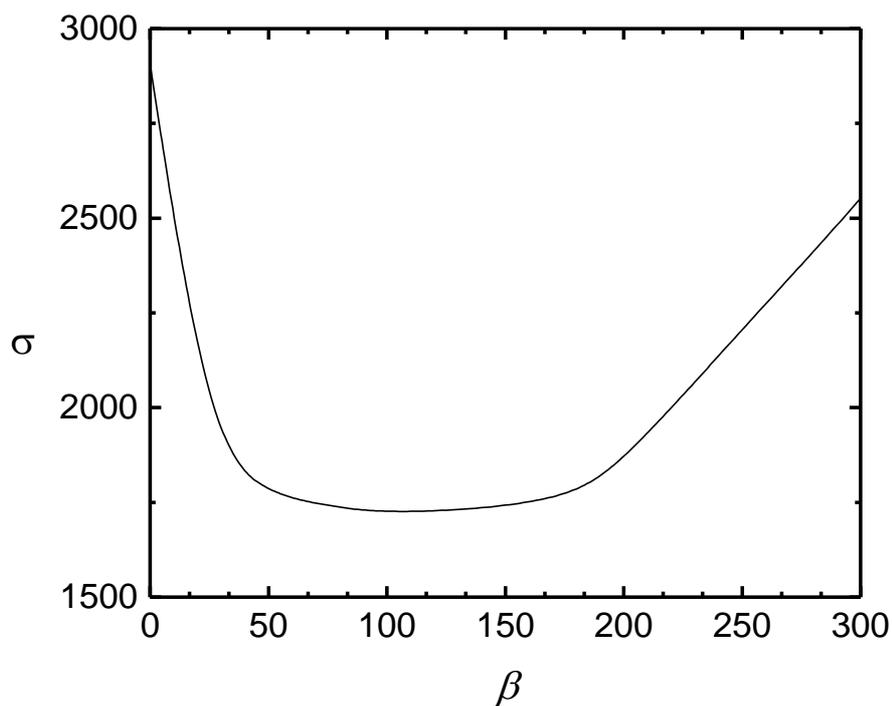


Figura 5. Error σ entre la imagen reconstruida y la imagen original

4 CONCLUSIONES

Se presentaron los resultados preliminares de la reconstrucción tomográfica por medio de un algoritmo de Metropolis Montecarlo guiado por la ecuación de difusión. Los resultados son promisorios y el método es fácilmente generalizable a otras ecuaciones de transporte para aplicarlo a la visualización de fluidos.

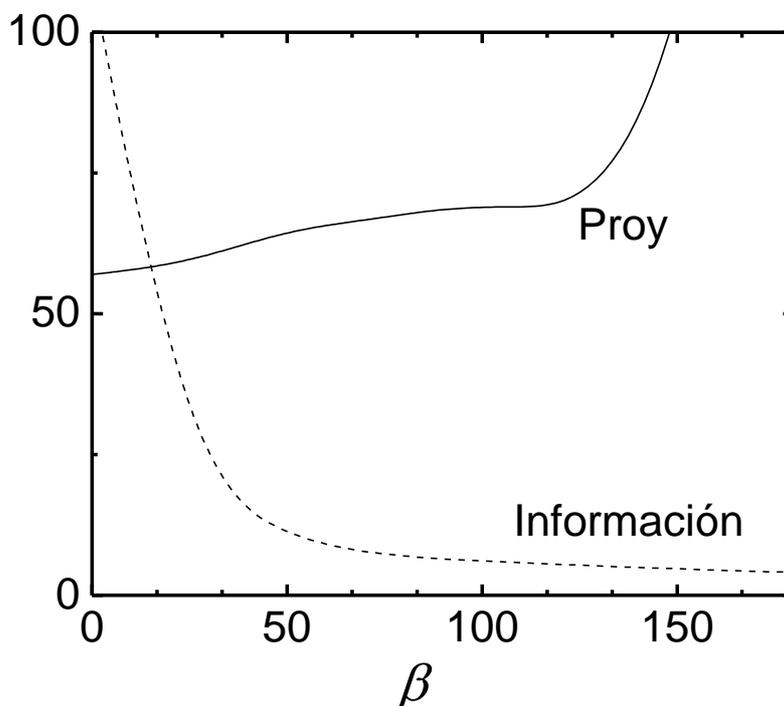


Figura 6. Comportamiento de los errores individuales de cada término de la (Ec. 5).

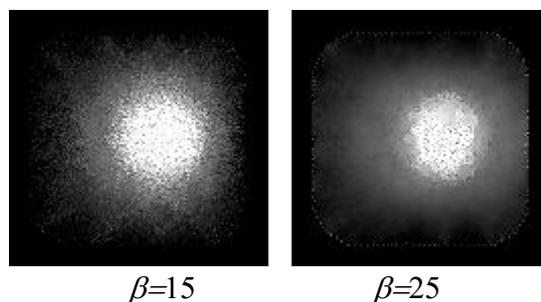


Figura 7. Imágenes reconstruidas con la función de regularización del desvío cuadrático medio de vecinos.

REFERENCIAS

- Atcheson B., Ihrke I., Heidrich W., Tevs A., Bradley D., Magnor M. y Seidel H., Time Resolved 3D Capture of Non-Stationary Gas Flows. *ACM Transactions on Graphics (Proc. SIGGRAPH Asia)*, Vol. 27, 5, 132, 2008
- Barbuzza R. y Clause A., Metropolis Monte Carlo for tomographic reconstruction with prior smoothness information. *Image Processing, IET*, 5, 198 –204, 2011
- Grant I., Particle Image Velocimetry: A review, *Journal of Mechanical Engineers Science*, Vol. 211, 1, 55-76, 1997
- Geman S. y Geman D., Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-6, pp. 721-741, 1984
- Gregson J., Krimerman M., Hullin M., y Heidrich W., Stochastic tomography and its

- applications in 3D imaging of mixing fluids. *ACM Trans. Graph.*, 31(4):52, 2012
- Hawkins T., Einarsson P. y Debevec P., Acquisition of time-varying participating media. *ACM Trans. Graph. (Proc. SIGGRAPH)*, 24, 3, 812-815, 2005
- Hasinoff, S. y Kutulakos K., Photo-Consistent Reconstruction of Semitransparent Scenes by Density-Sheet Decomposition, *IEEE Trans. On Pattern Analysis and Machine Intelligence, PAMI*, 29, 5, 870-885, 2007
- Herman G., Chan T. y E. Levitan, *Probabilistic Modeling of Discrete Images, chapter of book Discrete Tomography: Foundation, Algorithms and Application*, G. T. Herman and A. Kuba Ed, Birkhauser Boston, Cambridge, MA, pp. 214-233, 1999
- Ihrke I., Goldluecke B. y Magnor M., Reconstructing the Geometry of Flowing Water. *In Proc. of IEEE International Conference on Computer Vision, ICCV 2005*, Vol 2, pp 1055-1060, 2005
- Ihrke I. y Magnor M., Image-Based Tomographic Reconstruction of Flames. *In Proceedings of the 2004 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation (SCA '04)*, pp 365-373, 2004
- Metropolis N., Rosenbluth A., Rosenbluth M., Teller A. y Teller M., Equation of state calculations by fast computing machines, *J. Chem. Phys.*, 21, 6, 1087-1092, 1953
- Morris, N. y Kutulakos, K., Dynamic Refraction Stereo, *In Proc. of IEEE International Conference on Computer Vision, ICCV 2005*, Vol 2, 1573-1580, 2005
- Wetzstein, G., Lanman D., Heidrich W. y Raskar R., Layered 3D: Tomographic Image Synthesis for Attenuation-Based Light Field and High Dynamic Range Displays. *ACM Trans. Graph.*, 30, 4, 2011