

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIÓN CONSTITUTIVA PARA FLUIDOS MAGNETOREOLÓGICOS

César D. Mesquida^a, Jorge L. Lässig^a

^a *Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue, Buenos Aires 1400, Neuquén Capital,
Argentina, cesar.mesquida@fain.uncoma.edu.ar*

Palabras Clave: Magnetoreología, Ecuación Constitutiva, Nanopartícula.

Resumen. El estudio de aplicaciones de fluidos magnetoreológicos (FMR) requiere el desarrollo de ecuaciones constitutivas para cada problema en particular. En ese sentido, se presenta la metodología de Dorfmann *et al.* (International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.42, 2007, p.381–390. Ed. Elsevier) para la obtención de expresiones no lineales y tridimensionales que relacionen esfuerzos en un FMR con la deformación del mismo. Este trabajo hace uso de aquella metodología y plantea, como distinción, la resolución de un caso particular no encontrado en la bibliografía: flujo de Couette circunferencial, viscoso, laminar y estacionario, con campo magnético radial. Para esto, la solución se buscó mediante un software comercial y un programa desarrollado con tal fin. Haciendo uso de distintas simplificaciones y parámetros materiales, se presenta el perfil de velocidades para distintos valores del campo magnético aplicado.

INTRODUCCIÓN

Los fluidos magnetoreológicos (FMR) son fluidos compuestos por partículas micrométricas de material ferromagnético, las cuales son, generalmente, la fase discontinua de una emulsión oleosa u acua, según se trate. Otros elementos suelen incluirse en la preparación del fluido (surfactantes, estabilizantes, etc. Ver Rosensweig, 1997; HolmHolm and Weis, 2005; Hong et al., 2006; Grunwald and Olabi, 2008).

Los FMR se comportan como fluidos newtonianos en ausencia de campo magnético pero, en presencia de éste, presentan un comportamiento viscoplástico semejante al modelo de Bingham generalizado, siendo su principal característica el presentar una tensión de fluencia τ_0 creciente de manera no lineal con el aumento de la intensidad del campo magnético externo aplicado. Esta cualidad puede aprovecharse con fines ingenieriles, como válvulas de control de caudal y presión, amortiguadores, frenos, interface entre dispositivos mecánicos y sistemas electrónicos, sellos, embragues, como portador de drogas y otras sustancias por el interior de organismos, pulido de lentes, etc., (Carlson et al., 1995; Liu et al., 2001; El Wahed et al., 2002; Bajkowski et al., 2008; Yazid et al., 2014) y también artísticos.

El cambio en el comportamiento del FMR frente al campo magnético es el reflejo de la formación de estructuras en el interior del fluido. Estas estructuras se componen de las partículas ferromagnéticas polarizadas y alineadas con el campo magnético externo. La dinámica de formación de estas estructuras (formas, tiempos, etapas de formación, sincronismo con el campo, etc.) es tema de estudio. Ver Melle et al. (2000); Melle et al. (2001); Melle et al. (2003); Domínguez-García et al. (2005); López-López et al. (2006); Agustín-Serrano et al. (2013).

Respecto del flujo, el FMR circulando por un conducto y en presencia de un campo magnético externo desarrolla un perfil de velocidad integrado por dos partes: una central de velocidad constante (flujo tapón) donde el fluido desarrolla tensiones de corte inferiores a la de fluencia y se comporta como un sólido elástico, y una parte exterior de fluido post-fluencia en contacto con las paredes, con comportamiento no newtoniano posible de ser descrito, por ejemplo, mediante alguna ley potencial. Ver Figura 1. A medida que el campo magnético se incrementa, la región de flujo tapón también lo hace ocupando cada vez mayor parte de la sección y, en un caso límite, el flujo se detiene.

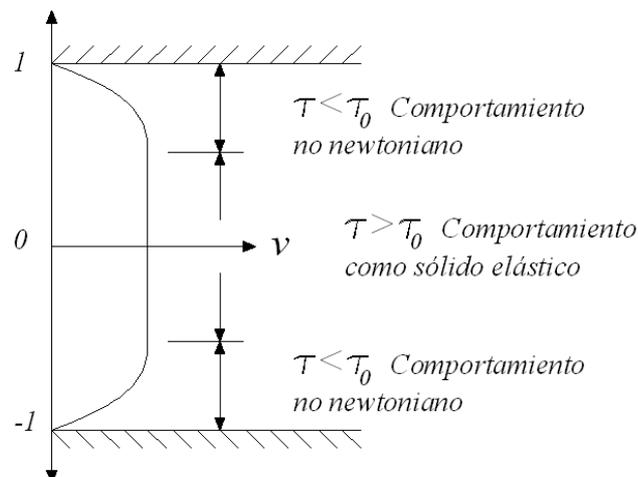


Figura 1. Perfil de velocidad característico de un FMR entre dos paredes y en presencia de un campo magnético externo, perpendicular a la velocidad y contenido en el plano del esquema.

OBJETIVOS

El presente trabajo complementa el desarrollo de un dispositivo magnetoreológico con flujo de Couette circunferencial y campo magnético radial. Se pretende, desde la experimentación, alimentar el modelo numérico empleado para simular el flujo.

La ecuación constitutiva buscada es el tensor de tensiones de Cauchy τ para un material viscoso en régimen laminar y estacionario, en función del campo magnético inducido \mathbf{B} y del tensor de deformación D , es decir, $\tau = \mathfrak{f}(\mathbf{B}, D)$, Ec. (19).

Según Dorfmann *et al.* (2007), este tensor de tensiones se presenta dependiente de seis funciones escalares α las cuales dependen a su vez de seis invariantes I relacionados con la cinemática del flujo y el campo magnético aplicado.

Lo mismo se pretende respecto de la magnetización del fluido $\mathbf{M} = \mathfrak{M}(\mathbf{B}, D)$, Ec. (24).

ECUACIONES

1.1 Ecuaciones cinemáticas

Considérese un volumen de fluido contenido en una región espacial euclidiana delimitada y en un instante t . Cada punto de este espacio puede individualizarse mediante un vector posición $\mathbf{r}(x, y, z)$ respecto de un sistema de coordenadas arbitrario. La velocidad del fluido en cada punto se representa mediante el vector $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Ver Figura 2.

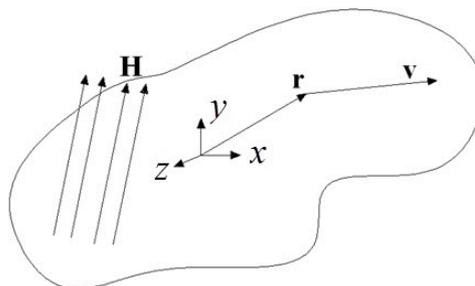


Figura 2. Dominio fluido.

De aquí en más, todo análisis será independiente del tiempo (flujo estacionario, campo magnético constante en el tiempo, etc.).

Otras cantidades cinemáticas a considerar son dos tensores de segundo orden: velocidad de deformación D y gradiente de velocidad L .

$$L = \nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

$$D = \frac{1}{2}(L + L^T) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2 \frac{\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

donde L^T es la matriz transpuesta de L .

1.2 Materiales magnéticos

De las ecuaciones de Maxwell en el vacío,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}. \quad (3)$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}. \quad (6)$$

a saber, ecuación de Faraday (3), ecuación de Ampere (4), no existencia de monopolos magnéticos (5) y ecuación de Poisson (6), y despreciando la presencia de corrientes eléctricas, cargas libres y campos eléctricos, más la hipótesis de independencia del tiempo, el conjunto anterior se reduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0. \quad (8)$$

Para la materia condensada, la magnetización \mathbf{M} del fluido, el campo magnético externo aplicado \mathbf{H} y el campo magnético inducido resultante \mathbf{B} en el fluido se relacionan de la siguiente manera, siendo todas estas variables función de la posición \mathbf{r} :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (9)$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío.

En el vacío,

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (10)$$

Por lo que las ecuaciones de Maxwell en el vacío terminan siendo

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (11)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0. \quad (12)$$

Como ya se mencionó, \mathbf{B} será una variable independiente (esto es cómodo desde un punto de vista teórico, aunque no desde la experimentación), calculándose \mathbf{M} a través de una ecuación constitutiva y, finalmente, se despeja \mathbf{H} de (9).

1.3 Ecuaciones de Conservación

Bajo las consideraciones ya enunciadas, la ecuación de continuidad o conservación de la masa puede escribirse como

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0. \quad (13)$$

donde ρ es la densidad del fluido en el volumen y tiempo considerado y D/Dt es la derivada total o sustancial. Se ha considerado en la Ec. (13), además, que el fluido es homogéneo y por ende la densidad no varía en el espacio. Esto implica que el FMR es estable, es decir, es una emulsión (o coloide, si fuera una mezcla de un sólido en un fluido) cuyas propiedades no cambian en un lapso de tiempo suficientemente grande, según el empleo que se pretenda del mismo. Dicho de otra manera, para poder aplicar la Ec. (13) en un FMR debe, primero, estudiarse experimentalmente la sedimentación y redispersión del mismo (Agustín-Serrano, 2013; Holm 2005; López-López, 2006; Iglesias, 2012).

Sumando la hipótesis de fluido incompresible ($\rho = cte.$), resulta

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 = tr(D). \quad (14)$$

Repetiendo la suposición de flujo estacionario y la no existencia de corrientes eléctricas (o bien las mismas son despreciables), se considerará, además, que el peso no será una fuerza relevante (no habrá sedimentación, flotación, ni separación de fases, por ejemplo). Por ende, la ecuación de cantidad de movimiento, en su forma tensorial, se reduce desde:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

a

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}. \quad (15)$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor total de tensiones de Cauchy.

Considerando que existe equilibrio respecto de la rotación, de la ecuación de conservación de momento angular se deduce que el tensor $\boldsymbol{\tau}$ es simétrico, es decir,

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T. \quad (16)$$

Como ya se mencionó, la idea es encontrar funciones constitutivas f y g que permitan expresar

$$\boldsymbol{\tau} = f(D, \mathbf{B}). \quad (17)$$

$$\mathbf{M} = g(D, \mathbf{B}). \quad (18)$$

Siguiendo el trabajo de Dorfmann *et al.* (2007), puede reescribirse (17) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \alpha_1 I + \alpha_2 D + \alpha_3 D^2 + \dots \\ & \dots + \alpha_4 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) + \alpha_5 [(D\mathbf{B}) \otimes \mathbf{B} + \mathbf{B} \otimes (D\mathbf{B})] + \alpha_6 \left[(D^2\mathbf{B}) \otimes \mathbf{B} + \mathbf{B} \otimes (D^2\mathbf{B}) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

donde la función f ya ha sido encontrada y aparece mediante seis funciones escalares α_i para $i=1, 2, \dots, 6$. A su vez, estas funciones escalares dependen de los seis invariantes I_1, I_2, \dots, I_6 que surgen de los tensores D y $\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$.

Los invariantes son:

$$I_1 = \text{tr}(D), \quad I_2 = \text{tr}(D^2), \quad I_3 = \text{tr}(D^3), \quad (20)$$

$$I_4 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}, \quad I_5 = (D\mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}, \quad I_6 = (D^2\mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}. \quad (21)$$

donde $\text{tr}(D)$ es la traza del tensor D .

Los coeficientes α caracterizan al material y pueden hallarse experimentalmente dado que los seis elementos del tensor τ (recordar que es simétrico) pueden medirse a través del flujo resultante de la imposición de D y \mathbf{B} .

Puede verse que τ depende de la deformación a través de I_1, I_2 e I_3 , del campo magnético inducido a través de I_4 y del acoplamiento entre deformación y campo magnético a través de I_5 e I_6 .

Obtener los coeficientes α a través de la experimentación no es fácil, por lo que a veces resulta práctico simplificar la forma de la ecuación constitutiva en base a características generales de la respuesta del FMR.

Considerando fluidos incompresibles, Ec. (14), la ecuación constitutiva debiera ser de la forma

$$\tau = -pI + f(D, \mathbf{B}). \quad (22)$$

donde p es una presión hidrostática indeterminada (es el primer coeficiente α_1).

En otras palabras, dado que la presión es arbitraria, la primer función escalar α_1 deja de ser una incógnita bajo la hipótesis de flujo incompresible. Lo mismo pasa con el primer invariante, ahora conocido.

Respecto de la magnetización, la expresión buscada, como ya se mencionó, es de la forma

$$\mathbf{M} = g(D, \mathbf{B}). \quad (23)$$

Siguiendo a Dorfmann *et al.* (2007), la representación de la magnetización es

$$\mathbf{M} = (\phi_1 I + \phi_2 D + \phi_3 D^2) \mathbf{B}. \quad (24)$$

donde ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 son funciones escalares dependientes de los seis invariantes I_1, \dots, I_6 y donde I es la matriz identidad. Una adecuada selección de las funciones constitutivas ϕ permite representar una amplia variedad de fenómenos.

El modelo constitutivo presentado hasta este punto provee un marco general en el cual modelos particulares pueden ser evaluados.

1.4 Condiciones de borde

Para cada problema en particular deben imponerse condiciones de borde adecuadas para \mathbf{B} , \mathbf{H} , D , τ y \mathbf{v} ; para todos o algunos de ellos.

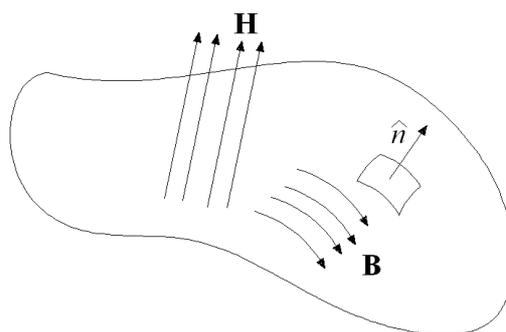


Figura 3. Campos magnéticos, exterior aplicado \mathbf{H} e inducido en el fluido \mathbf{B} , sobre la superficie del dominio considerado.

Sobre la superficie del volumen fluido considerado, \mathbf{B} y \mathbf{H} deben satisfacer las siguientes condiciones de discontinuidad, considerando inexistencia de corrientes de superficie,

$$\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0. \quad (25)$$

$$\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}. \quad (26)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el versor normal a la superficie del volumen considerado, en sentido saliente. Es decir, el campo inducido \mathbf{B} es paralelo a la discontinuidad y el campo externo aplicado \mathbf{H} es normal a la misma (ver Figura 3). Tener presente que (25) y (26) aplican exclusivamente sobre la discontinuidad.

Otra posible condición es la de no deslizamiento sobre alguna pared, para lo cual se cumple

$$\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}. \quad (27)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el versor normal a la pared (ver Figura 4).

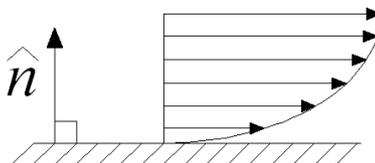


Figura 4. Perfil de velocidad sobre una pared, sin deslizamiento.

La condición de continuidad para el tensor total de tensiones a través de la superficie del volumen considerado es

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}. \quad (28)$$

FLUJO TANGENCIAL CON CAMPO MAGNÉTICO RADIAL

A continuación se estudiará un problema de flujo tangencial sobre una sección circular, con campo magnético radial. El problema es bidimensional, siendo las variables independientes el vector posición r (con $r_a \leq r < r_b$) y el ángulo θ (con $0 \leq \theta < 2\pi$), tal como se presenta en la Figura 5. Para evitar la tercer variable en coordenadas cilíndricas, z , se supondrá al contenedor del cilindro con una altura infinita ($L = \infty$), es decir, se despreciarán los efectos de extremo del dominio físico (fondo y tapa del cilindro). Al fluido se lo considerará incompresible ($\rho = cte$). Las condiciones de borde a respetar (condiciones de no deslizamiento) son: $v(r = r_a) = \omega r_a$ y $v(r = r_b) = 0$.

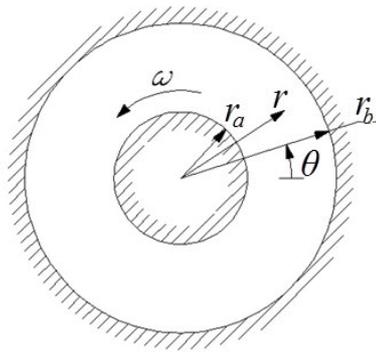


Figura 5. Problema de flujo circunferencial a resolver, con campo magnético radial.

1.5 Ecuaciones

Durante el experimento del flujo de Couette circunferencial con campo magnético radial se espera que haya un campo inducido \mathbf{B} con componentes radial y tangencial, es decir,

$$\mathbf{B} = (B_r, B_\theta, 0). \quad (29)$$

Se aplica un campo magnético externo radial pero, si éste no se logra con perfecta simetría, el campo externo puede tener una componente tangencial,

$$\mathbf{H} = (H_r, H_\theta, 0). \quad (30)$$

Por ende, las ecuaciones de Maxwell (7) y (8) en coordenadas cilíndricas resultan:

$$\frac{B_r}{r} + \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} = 0. \quad (31)$$

$$H_\theta + r \frac{\partial H_\theta}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} = 0. \quad (32)$$

Se busca ahora el tensor velocidad de deformación D . Se considerará velocidad tangencial sólo dependiente del radio r ,

$$\mathbf{v} = (0, v_\theta(r), 0). \quad (33)$$

Por lo que

$$D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r} & 0 \\ \frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

También, de manera simplificada,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

donde

$$\gamma = \frac{r}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r} \right) = \frac{r}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r^2} \right). \quad (36)$$

Conocidos D , Ec.(35) y \mathbf{B} , Ec. (29), se desarrolla \mathbf{M} , Ec.(24):

$$M_r = B_r (\phi_1 + \phi_3 \gamma^2) + B_\theta \phi_2 \gamma. \quad (37)$$

$$M_\theta = B_r \phi_2 \gamma + B_\theta (\phi_1 + \phi_3 \gamma^2). \quad (38)$$

$$M_z = 0. \quad (39)$$

Si se utiliza el campo inducido como variable independiente (esto no es una restricción), pueden obtenerse las ecuaciones de magnetización del material, Ec. (37), (38) y (39), y luego el campo magnético externo necesario para lograr este efecto, recurriendo a (9):

$$H_r = \frac{B_r}{\mu_0} - B_r (\phi_1 + \phi_3 \gamma^2) - B_\theta \phi_2 \gamma. \quad (40)$$

$$H_\theta = \frac{B_\theta}{\mu_0} - B_r \phi_2 \gamma + B_\theta (\phi_1 + \phi_3 \gamma^2). \quad (41)$$

$$H_z = 0. \quad (42)$$

A continuación, se determinan los invariantes, Ec. (20) y (21):

$$I_1 = 0, \quad I_2 = 2\gamma^2, \quad I_3 = 0, \quad (43)$$

$$I_4 = B_r^2 + B_\theta^2, \quad I_5 = 2B_r B_\theta \gamma, \quad I_6 = \gamma^2 I_4. \quad (44)$$

1.6 Condiciones de borde

Fuera del fluido (donde no hay materia magnetizable), el campo magnético inducido B_θ es nulo y por H_θ también. Por continuidad, H_θ debe ser nulo también en el contorno.

Asumiendo que H_r es sólo función del radio y haciendo uso de la Ec. (32) se concluye que $H_r = cte/r$. De aquí, la discontinuidad puede salvarse si se hace $cte=0$, lo que resulta en:

$$\mathbf{H} = (H_r, 0, 0). \quad (45)$$

Fuera del fluido, la ecuación de inducción magnética (9) es:

$$B_r = \mu_0 H_r. \quad (46)$$

$$B_\theta = 0. \quad (47)$$

$$B_z = 0. \quad (48)$$

En el contorno, los valores de \mathbf{B} son los mismos, por continuidad, que en el exterior, por lo que la ecuación de no existencia de monopolos conduce a $B_r = cte/r$, condición que se sigue sosteniendo en el interior, es decir, en el fluido.

Finamente, recordando las ecuaciones de campo inducido (9) y de magnetización del material (24) y aplicando las condiciones: $H_r = cte$, $\mathbf{H} = (H_r, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (B_r, B_\theta, 0)$ y la forma $B_r = cte/r$, se llega a:

$$B_\theta = B_r \frac{\mu_0 \phi_2 \gamma}{1 - \mu_0 (\phi_1 + \phi_3 \gamma^2)}. \quad (49)$$

$$B_r \left\{ \frac{1 - \mu_0 \phi_1 (2 - \mu_0 \phi_1) - \gamma^2 \mu_0 (2\phi_3 - 2\mu_0 \phi_1 \phi_3 + \mu_0 \phi_2^2) + \mu_0^2 \phi_3^2 \gamma^4}{\mu_0 [1 - \mu_0 (\phi_1 + \phi_3 \gamma^2)]} \right\} = H_r \quad (50)$$

$$\Rightarrow B_r A(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \gamma) = H_r$$

Los coeficientes ϕ son constantes (en rigor, dependen de \mathbf{B}), por lo que impuesto \mathbf{H} las incógnitas son \mathbf{B} y γ .

1.7 Ecuación de cantidad de movimiento

Ahora, se desarrolla (19) y (22):

$$\tau_{rr} = -p + \alpha_3 \gamma^2 + \alpha_4 B_r^2 + 2\gamma \alpha_5 B_\theta B_r + 2\alpha_6 \gamma^2 B_r^2. \quad (51)$$

$$\tau_{\theta\theta} = -p + \alpha_3 \gamma^2 + \alpha_4 B_\theta^2 + 2\gamma \alpha_5 B_\theta B_r + 2\alpha_6 \gamma^2 B_\theta^2. \quad (52)$$

$$\tau_{zz} = -p. \quad (53)$$

$$\tau_{r\theta} = \alpha_2 \gamma + \alpha_4 B_r B_\theta + \gamma \alpha_5 (B_\theta^2 + B_r^2) + 2\alpha_6 \gamma^2 B_r B_\theta. \quad (54)$$

O bien,

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & 0 \\ \tau_{r\theta} & \tau_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Bajo la suposición de que $B_\theta = B_\theta(r)$ se concluye que los invariantes, y por ende los coeficientes α y ϕ , son función sólo de r y, así, el problema se vuelve unidimensional.

Bajo estas consideraciones, se desarrolla la ecuación de cantidad de movimiento $\nabla \cdot \tau = 0$ conduciendo a tres ecuaciones escalares, Ec. (56), (57) y (58):

$$\frac{\tau_{rr}}{r} + \frac{d\tau_{rr}}{dr} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} = 0. \quad (56)$$

$$\frac{1}{r^2} \left(2r\tau_{r\theta} + r^2 \frac{d\tau_{r\theta}}{dr} \right) = 0. \quad (57)$$

$$\frac{d\tau_{zz}}{dz} = 0. \quad (58)$$

La tercer ecuación, Ec. (58), proviene de despreciar el peso.

De la segunda ecuación diferencial, Ec. (57), luego de resolverla se llega a:

$$\tau_{r\theta} = \frac{cte}{r^2}. \quad (59)$$

Cabe ahora preguntarse el valor de la constante en la Ec.(59). La misma puede encontrarse buscando el equilibrio entre el momento torsor M aplicado por el cilindro interior (por unidad de longitud del cilindro L) y los esfuerzos cortantes del fluido sobre aquél ($\tau_{r\theta}(r = r_a)$). De aquí se deduce que $cte = M/2\pi$ y, finalmente,

$$\tau_{r\theta} = \frac{M}{2\pi r^2}. \quad (60)$$

Por lo que la ecuación de movimiento (54) con la relación entre tensiones y deformaciones incluida es:

$$\frac{M}{2\pi r^2} = \alpha_2 \gamma + \alpha_4 B_r B_\theta + \gamma \alpha_5 (B_\theta^2 + B_r^2) + 2\alpha_6 \gamma^2 B_r B_\theta. \quad (61)$$

En este punto debe recordarse que los coeficientes α y ϕ pueden ser constantes, $B_\theta = B_\theta(B_r, \gamma)$ y $B_r = B_r(\gamma, H_r)$. Luego, proponiendo las constantes (α y ϕ debieran estimarse de la experimentación), el momento exterior M y el campo magnético exterior H_r , se despeja la incógnita γ (el campo de velocidades) y luego \mathbf{B} y la magnetización del material \mathbf{M} .

Obsérvese que cuando \mathbf{H} es nulo, obviamente \mathbf{B} también y la ecuación de movimiento resulta en

$$\frac{M}{2\pi r^2} = \alpha_2 \gamma = \frac{\alpha_2}{2} r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right). \quad (62)$$

Cuya solución analítica es la conocida solución de Couette para flujo circunferencial de fluidos newtonianos, donde α_2 es la viscosidad de corte del fluido, más conocida como μ :

$$v_\theta(r) = \frac{M}{2\pi \alpha_2} r \left(\frac{1}{r_b^2} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (63)$$

CÁLCULOS

Para poder hacer comparaciones con experimentos, es conveniente reemplazar la variable B_r por H_r . Considerando, además, que $B_\theta = B_\theta(B_r)$, la Ec. (61) se transforma en:

$$\frac{M}{2\pi r^2} = \alpha_2 \gamma + \frac{H_r^2}{A^2} (\alpha_4 \phi + \alpha_5 \gamma + \alpha_5 \phi^2 \gamma + 2\alpha_6 \phi \gamma^2). \quad (64)$$

donde:

$$\phi = \frac{\mu_0 \phi_2 \gamma}{1 - \mu_0 (\phi_1 + \phi_3 \gamma^2)},$$

$$A = \frac{1 - \mu_0 \phi_1 (2 - \mu_0 \phi_1) - \gamma^2 \mu_0 (2\phi_3 - 2\mu_0 \phi_1 \phi_3 + \mu_0 \phi_2^2) + \mu_0^2 \phi_3^2 \gamma^4}{\mu_0 [1 - \mu_0 (\phi_1 + \phi_3 \gamma^2)]},$$

Como simplificación del problema, puede suponerse a las cantidades A y ϕ como constantes, renombrándolas $\hat{\phi}$ y \hat{A} . Luego,

$$\tau_{r\theta} = \frac{M}{2\pi r^2} = \gamma \left\{ \alpha_2 + \frac{H_r^2}{\hat{A}^2} [\alpha_4 \hat{\phi} + \alpha_5 (1 + \hat{\phi}^2 \gamma^2) + 2\alpha_6 \hat{\phi} \gamma^2] \right\}. \quad (65)$$

Ordenado de otra forma:

$$0 = -\frac{M}{2\pi r^2} + \gamma \left[\alpha_2 + \frac{H_r^2}{\hat{A}^2} (\alpha_4 \hat{\phi} + \alpha_5) \right] + \gamma^3 \left[\frac{H_r^2}{\hat{A}^2} \hat{\phi} (\alpha_5 \hat{\phi} + 2\alpha_6) \right]. \quad (66)$$

Es decir, se trata de una ecuación diferencial ordinaria homogénea de primer orden y grado tres, con coeficientes constantes a , g y h :

$$0 = -a \frac{1}{r^2} + g\gamma + h\gamma^3. \quad (67)$$

donde:

$$\begin{aligned} a &= \frac{M}{2\pi}, \\ g &= \alpha_2 + \frac{H_r^2}{\hat{A}^2} (\alpha_4 \hat{\phi} + \alpha_5), \\ h &= \frac{H_r^2}{\hat{A}^2} \hat{\phi} (\alpha_5 \hat{\phi} + 2\alpha_6), \\ \gamma &= \frac{1}{2} \left(\frac{d[v_\theta(r)]}{dr} - \frac{v_\theta(r)}{r} \right). \end{aligned} \quad (68)$$

1.8 Soluciones analíticas

Como primer intento, es conveniente comenzar la búsqueda de la solución a la Ec. (67) suponiendo $h=0$ para ver la forma que la solución tiene y poder, de alguna manera, sospechar el aspecto de la solución buscada. La solución exacta, para $h=0$, y cumpliendo las condiciones de borde, es

$$v(r) = \frac{a}{g} r \left(\frac{1}{r_b^2} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (69)$$

La Figura 6 muestra el perfil de velocidad adimensionalizado, según Ec. (69). Las variables adimensionales son $\bar{r} = (r - r_a)/(r_b - r_a)$ y $\bar{v} = v/\omega r_a$. Cuando el campo magnético se incrementa, g aumenta y la curva alcanza menores valores (ver Figura 7, donde el campo magnético se incrementa en el sentido $B_3 > B_2 > B_1$). El radio del cilindro exterior r_b debe ser lo suficientemente grande para poder ver la curvatura de la función.

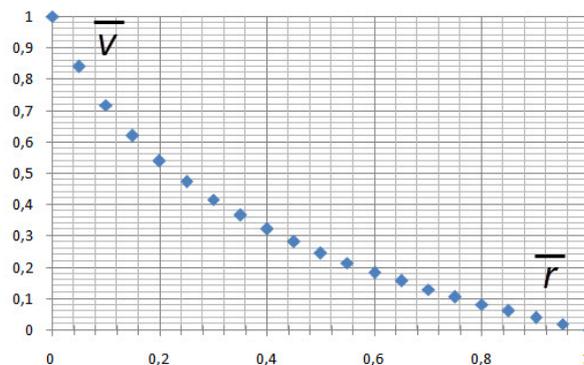


Figura 6. Perfil adimensionalizado de velocidad para $h=0$ (solución exacta).

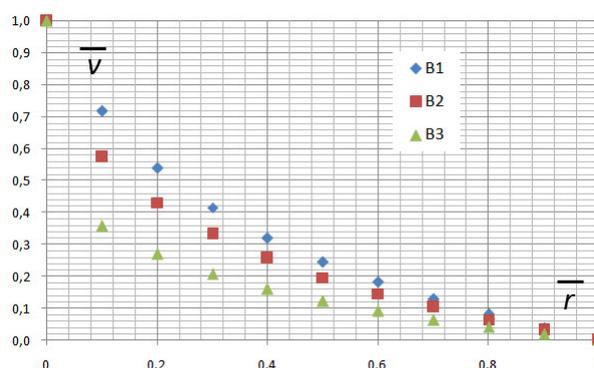


Figura 7. Distintos perfiles adimensionalizados para los cuales el campo magnético inducido crece en el sentido $B_3 > B_2 > B_1$, para $h=0$ (solución exacta).

La solución exacta a la ecuación cúbica (67), con $h \neq 0$, se buscó con el uso de un software comercial de cálculos simbólicos, el cual presenta las tres soluciones, una real y dos complejas conjugadas. A continuación se presenta la solución real sin incluir la condición de borde $v(r = r_b)=0$.

$$v(r) = r \int \frac{F(r)}{r} dr + cte \cdot r. \tag{70}$$

donde

$$F(r) = \frac{\sqrt[3]{rh^2 \left(108a + 12\sqrt{3} \sqrt{\frac{4g^3 r^4 + 27a^2 h}{h}} \right)}}{3h} \frac{1}{r} - \dots \tag{71}$$

$$\dots - r \frac{4g}{\sqrt[3]{rh^2 \left(108a + 12\sqrt{3} \sqrt{\frac{4g^3 r^4 + 27a^2 h}{h}} \right)}}.$$

La Ec. (70) se resolvió numéricamente mediante la regla de trapezios compuesta, con error del orden $[O(\Delta r)^2]$ para hallar la solución graficada en la Figura 8:

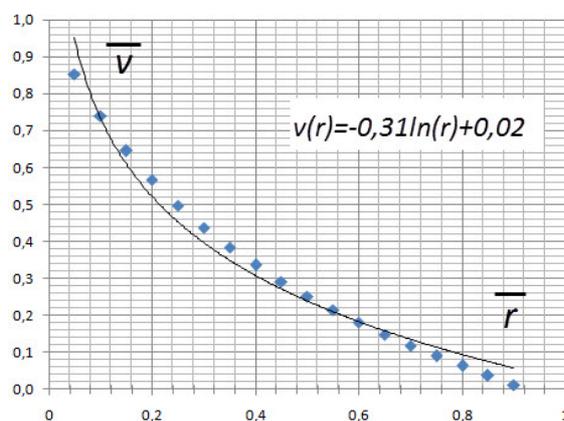


Figura 8. Perfil adimensionalizado de velocidad para la Ec. (67), obtenido numéricamente a partir de la solución analítica encontrada por el software comercial usado.

La Figura 8 muestra un perfil típico, adimensionalizado, y aproximado mediante una función logarítmica con un coeficiente de determinación igual a 0,98.

La Figura 9 presenta soluciones para distintas intensidades de campo magnético, resultando los valores de velocidad cada vez menores a medida que el campo se incrementa, en el sentido $B_3 > B_2 > B_1$.

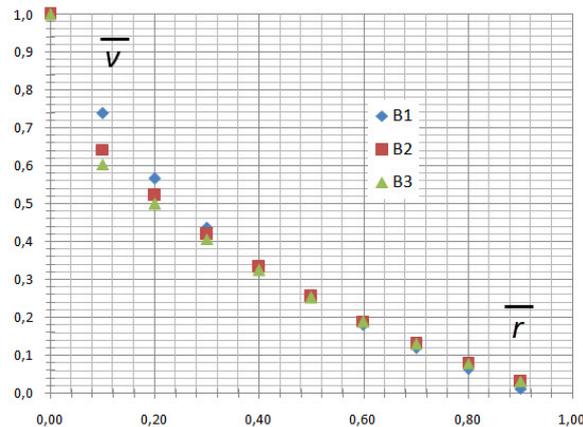


Figura 9. Perfil adimensionalizado de velocidad para la Ec. (67), obtenido numéricamente a partir de la solución analítica encontrada por el software comercial usado, para $B_3 > B_2 > B_1$.

1.9 Soluciones numéricas

Se decidió comparar la solución analítica, Ec. (70), con la resolución numérica de la Ec. (67).

Se trabajó con diferencias finitas y para las derivadas primeras contenidas en (67) se propuso un esquema centrado con error de segundo orden, y se multiplicó por $(\Delta r)^3$ para prevenir que el error numérico se incremente al refinar la malla, lo cual resultó en la Ec. (72):

$$0 = -a \frac{(\Delta r)^3}{r_i^2} + \frac{g(\Delta r)^3}{2} \left(\frac{v_{i+1}^{k-1} - v_{i-1}^{k-1}}{2\Delta r} - \frac{v_i^k}{r_i} \right) + \frac{h(\Delta r)^3}{8} \left(\frac{v_{i+1}^{k-1} - v_{i-1}^{k-1}}{2\Delta r} - \frac{v_i^k}{r_i} \right)^3. \quad (72)$$

Se optó buscar la solución de (72) con el método de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales, es decir, proponiendo

$$\mathbf{v}^k = \mathbf{v}^{k-1} - J^{-1}(\mathbf{v}^{k-1}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{v}^{k-1}) \quad (73)$$

donde k refiere a la iteración, J es la matriz jacobiana de (72) y \mathbf{F} es el vector compuesto por la función (72) valuada en la iteración $k-1$ y para cada uno de los N puntos con los cuales se ha discretizado el dominio $r_a \leq r \leq r_b$. Para la primer iteración debe proponerse una solución inicial.

Se programó y se observó que la solución es fuertemente dependiente de la solución inicial y que, si bien el residuo para satisfacer (72) es excelente (del orden 10^{-17}), el determinante de la matriz jacobiana J tiende a cero con mayor velocidad cada vez que la malla se refina. La solución presenta oscilaciones alrededor de un valor medio que reproduce la solución provista por el soft simbólico antes usado.

La Figura 10 muestra distintos perfiles de velocidad, adimensionalizados, obtenidos mediante el esquema en diferencias finitas. Las curvas corresponden a distintos valores de campo magnético, siendo $B_1 > B_2 > B_3$.

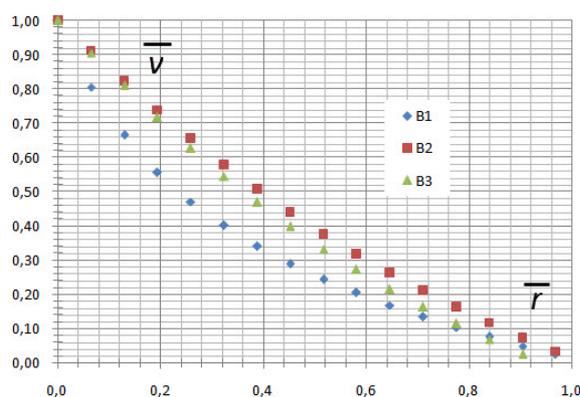


Figura 10. Perfil de velocidad para la Ec. (67), obtenido mediante diferencias finitas, para distintos valores de campo magnético.

CONCLUSIONES

Los dispositivos magnetoreológicos desarrollados y presentes en la bibliografía (Carlson *et al.* (1995), Bajkowski *et al.* (2008), Yazid *et al.* (2014), etc.) son del tipo flujo de Poiseuille con campo magnético en sentido longitudinal o transversal al flujo, flujo de Couette circunferencial con campo magnético longitudinal o circunferencial, y estrujamiento o *squeeze*. No se ha encontrado el caso de flujo de Couette circunferencial con campo radial. Llevarlo a la práctica es más difícil que en los casos anteriores, pero podría ofrecer interesantes posibilidades en ingeniería.

La metodología propuesta por Dorfmann *et al.* (2007) es muy interesante dado que permite hallar de manera sencilla las relaciones constitutivas para el flujo en estudio. Su mayor desventaja, a criterio de estos autores, es que resulta en la existencia de muchas constantes (los α y ϕ) que deben obtenerse experimentalmente, lo cual es muy complejo. En rigor, esas constantes no son tal cosa, dado que dependen del campo magnético.

Si bien la solución analítica provista por el software de matemática simbólica, Ec. (70), coincide de buena manera con la solución numérica hallada mediante diferencias finitas, Figura 10, la solución analítica es difícil de graficar, debiéndose recurrir, nuevamente, a técnicas numéricas para poder hacerlo. En ese sentido, es preferible encarar el problema directamente buscando la solución numérica a la ecuación diferencial cúbica, Ec. (67).

Si bien el método de Newton para resolver ecuaciones no lineales parece ser una adecuada metodología para resolver el problema, se presenta el inconveniente de la matriz jacobiana que tiende a la singularidad, y por ende no ser invertible, a medida que la malla se refina. Esta cuestión es en la que se trabaja actualmente.

Respecto de los resultados, el incremento del campo magnético resulta en perfiles más aplanados, notándose un incremento en la viscosidad del fluido y por ende menores velocidades, tal lo esperado.

AGRADECIMIENTOS

Para la realización de este trabajo se ha contado con la valiosísima ayuda del Dr. Luis Nowak y la Dra. Raquel Crescimbeni de la Facultad de Economía y Administración de la UNComa, y la Dra. Adriana Pernich de la Facultad de Ingeniería de la UNComa, quienes amablemente aportaron ideas y sugerencias.

REFERENCIAS

Agustín-Serrano, R., Donado, F., Rubio-Rosas, E., Magnetorheological fluid based on

- submicrometric silica-coated magnetite particles under an oscillatory magnetic field. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 335, 149–158, 2013.
- Bajkowski, J., Nachman, J., Shillor, M., Sofonea, M., A model for a magnetorheological damper. *Mathematical and Computer Modelling* 48: 56–68, 2008.
- Carlson, J. D., Catanzarite, D. M., St. Clair, K. A., Lord Corporation, Commercial magnetorheological fluid devices. *5th Int. Conf. on Electro-Rheological, Magneto-Rheological Suspensions and Associated Technology*, Sheffield, 10-14, July 1995.
- Domínguez-García, P., Melle, S., Calderón, O. G., Rubio, M.A., Doublet dynamics of magnetizable particles under frequency modulated rotating fields. *Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects*, 2005.
- Dorfmann, A., Ogden, R. W., Wineman, A. S., A three-dimensional non-linear constitutive law for magnetorheological fluids, with applications. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 42: 381 – 390, 2007.
- El Wahed, A. K., Sproston, J. L., Schleyer, G. K., Electrorheological and magnetorheological fluids in blast resistant design applications. *Materials and Design* 23: 391–404, 2002.
- Grunwald, A., Olabi, A.G., Design of magneto-rheological (MR) valve. *Sensors and Actuators A* 148: 211–223, 2008.
- Holm, C., and Weis, J.J., The structure of ferrofluids: a status report. *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, 10: 133-140, 2005.
- Hong, R. Y., Zhang, S. Z., Han, Y. P., Li, H. Z., Ding, J. and Zheng, Y., Preparation, characterization and application of bilayer surfactant-stabilized ferrofluids. *Powder Technology*, 170: 1–11, 2006.
- Iglesias, G. R., López-López, M. T., Durán, J. D. G., González-Caballero, F. , Delgado, A. V., Dynamic characterization of extremely bidisperse magnetorheological fluids. *Journal of Colloid and Interface Science* 377, 153–159, 2012.
- Jang, K. I., Seok, J., Min, B. K. , Lee, S. J., An electrochemomechanical polishing process using magnetorheological fluid. *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 50: 869–881, 2010.
- Liu, J., Flores, G. A., Sheng, R., In-vitro investigation of blood embolization in cancer treatment using magnetorheological fluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 225: 209-217, 2001.
- López-López, M. T., Zugaldía, A., González-Caballero, F. J., Durán, D. G., Sedimentation and redispersion phenomena in iron-based magnetorheological fluids. *Journal of Rheology* 50(4), 543-560, 2006, The Society of Rheology.
- Melle, S., Calderón, O. G., Rubio, M. A., Fuller, G. G., Microstructure evolution in magnetorheological suspensions governed by Mason number. *Physical Review E* 68, 2003.
- Melle, S., Fuller, G. G., Rubio, M. A., Structure and dynamics of magnetorheological fluids in rotating magnetic fields. *Physical Review E* 61, Number 4, 2000.
- Melle, S., Rubio, M. A., Fuller, G. G., Orientation dynamics of magnetorheological fluids subject to rotating external fields, *International Journal of Modern Physics B*, 15, 2001.
- Rosensweig, R. E., *Ferrohydrodynamics*, Dover Publications, 1997, ISBN 0-486-67834-2 (pbk.).
- Yazid, I. I. M., Mazlan, S. A., T. Kikuchi., H. Zamzuri, F. Imaduddin, Design of magnetorheological damper with a combination of shear and squeeze modes. *Materials and Design* 54: 87–95, 2014.