Asociación Argentina de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXXIII, págs. 2497-2502 (artículo completo)
Graciela Bertolino, Mariano Cantero, Mario Storti y Federico Teruel (Eds.)
San Carlos de Bariloche, 23-26 Setiembre 2014

ANÁLISIS NUMÉRICO DE UN PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO DISTRIBUIDO GOBERNADO POR UNA INECUACIÓN VARIACIONAL ELÍPTICA

Mariela C. Olguín[a] **y Domingo A. Tarzia**[b]

[a]*Depto de Matemática, EFB-FCEIA, Universidad Nacional de Rosario, Avda. Pellegrini 250, S2000BPT Rosario, Argentina, mcolguin@fceia.unr.edu.ar*

[b]*Depto de Matemática-CONICET, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina, DTarzia@austral.edu.ar*

Palabras Clave: Control óptimo, inecuación variacional, análisis numérico.

Resumen.

En Boukrouche y Tarzia, Comput. Optim. Appl., 53(2012), 375-392, se considera un problema de control óptimo continuo gobernado por una inecuación variacional elíptica siendo la variable de control la fuente de energía interna del sistema y se demuestra la existencia y unicidad del control y del estado óptimos. El objetivo del presente trabajo consiste en realizar el análisis numérico del mencionado problema de control óptimo usando el método de elementos finitos con triángulos de Lagrange de tipo 1. Se discretizan la inecuación variacional elíptica que determina el estado del sistema y el funcional costo para una fuente de energía dada. Se muestra la existencia y unicidad de solución del control y estado del sistema óptimos para cada h positivo, siendo h el parámetro de elementos finitos que tiende a cero. Finalmente se demuestra que el control y estado óptimos discretos convergen al control y estado óptimos continuos cuando el parámetro h tiende a cero.

1. INTRODUCTION

Se considera un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con una frontera $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ regular compuesta por dos porciones de frontera Γ_1 (de medida de positiva) y Γ_2. Sea el problema elíptico (P) dado por:

$$u \geq 0; \quad u(-\Delta u - g) = 0; \quad -\Delta u - g \geq 0 \ \text{ en } \quad \Omega; \tag{1}$$

$$u = b \quad \text{sobre} \ \ \Gamma_1; \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = q \ \ \text{sobre} \quad \Gamma_2; \tag{2}$$

donde g es la energía interna del sistema en Ω, b es la temperatura sobre Γ_1 y q es el flujo de calor sobre el borde Γ_2. En Boukrouche y Tarzia (2012) se considera el problema continuo de control óptimo distribuido asociado al problema (P) definido como

$$J(g_{op}) = \min_{g \in H} J(g) \tag{3}$$

donde el funcional de costo $J : H \to \mathbb{R}_0^+$ viene dado por la expresión:

$$J(g) = \frac{1}{2}\|u_g\|_H^2 + \frac{M}{2}\|g\|_H^2 \tag{4}$$

con $M > 0$ constante y u_g la solución del problema (P) correspondiente al control g. La formulación variacional del problema (P) es: Hallar $u = u_g \in K$ tal que

$$a(u, v - u) \geq (g, v - u) - \int_{\Gamma_2} q(v - u)\, ds, \qquad \forall v \in K \tag{5}$$

donde

$$V = H^1(\Omega), \quad K = \{v \in V : \ v \geq 0 \text{ en } \Omega, \ v/\Gamma_1 = b\}, \quad V_0 = \{v \in V : v/\Gamma_1 = 0\},$$

$$H = L^2(\Omega), \ (u, v) = \int_\Omega u\, v\, dx \quad \forall\, u, v \in H,$$

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v\, dx \quad \forall\, u, v \in V$$

siendo a una aplicación continua , bilineal, simétrica y coerciva (Kinderhlerer y Stampacchia, 1980) , es decir: existe $\lambda > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq \lambda \, \|v\|_V^2 \quad \forall\, v \in V_0. \tag{6}$$

El objetivo de este trabajo es realizar el análisis numérico del problema (P) y su correspondiente problema de control óptimo asociado (3). Con este fin, se utiliza el método de elementos finitos con triángulos de Lagrange de tipo 1 constituido por elementos finitos de clase C^0 siendo h el parámetro que tiende a cero (Brenner y Scott, 1994; Ciarlet, 2002). Se discretizan el funcional de costo (4) y la inecuación variacional (5) y se muestra que existen únicas soluciones para estos problemas discretos (Lions, 1968), además de las correspondientes convergencias cuando $h \to 0$ en adecuados espacios funcionales siguiendo la metodología dada en Tarzia (2013). Diversos problemas continuos de control óptimo de sistemas gobernados por inecuaciones variacionales elípticas están dados en (Bergounioux , 1997; Bergounioux y Kunisch, 1997a; Bergounioux y Mignot, 2000; De Los Reyes, 2011; Haller-Dintelmann et al., 2009; Haslinger y Roubicek, 1986; Hintermuller, 2001, 2008; Hintermuller y Kopacka, 2009; Ito y Kunisch, 2000; Kunisch y Wachsmuth, 2012; Mignot, 1976; Mignot y Puel, 1984; Ye y Chen, 2012).

2. DISCRETIZACIÓN DEL PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio poligonal acotado; b una constante positiva y τ_h una triangulación regular constituida por elementos finitos afines de clase C^0 sobre el dominio Ω. El parámetro de la triangulación es $h > 0$, que se define como la medida del mayor lado de todos los triángulos $T \in \tau_h$. Además para cada h se definen los conjuntos:

$$V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) : v_h/_T \in \mathbb{P}_1(T), \ \forall T \ \in \tau_h\}$$

y

$$K_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) : v_h \geq 0, \ v_{h/_{\Gamma_1}} = b, \ v_h/_T \in \mathbb{P}_1(T) \ \forall \ T \ \in \tau_h\}$$

donde $\mathbb{P}_1(T)$ es el conjunto de polinomios de grado menor o igual a 1 en T. La discretización del funcional costo está dada mediante la expresión:

$$J_h : H \to \mathbb{R}_0^+, \ J_h(g) = \frac{1}{2}\|u_{hg}\|_H^2 + \frac{M}{2}\|g\|_H^2 \tag{7}$$

y el problema de control óptimo discreto correspondiente se establece como:

$$J_h(g_{h\,op}) = \min_{g\in H} J_h(g) \tag{8}$$

donde u_{hg} es el estado asociado al control g solución del problema (P_h) cuya formulación variacional discreta está dada por: Hallar $u_{hg} \in K_h$ tal que

$$a(u_{hg}, v_h - u_{hg}) \geq (g, v_h - u_{hg}) - \int_{\Gamma_2} q(v_h - u_{hg})d\gamma, \qquad \forall v_h \in K_h. \tag{9}$$

Lema 1:

Sean $g \in H$, $b \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ y $q \in L^2(\Gamma_2)$. Entonces:

(a) La solución del problema (P_h) dado por la inecuación variacional elíptica (9) existe y es única.

(b) Dados $g_1, \ g_2 \ \in H$, sean $u_{hg_1}, u_{hg_2} \ \in K_h$ las soluciones respectivas del problema (P_h). Entonces resulta:

$$\|u_{hg_2} - u_{hg_1}\|_V \leq \frac{1}{\lambda}\|g_2 - g_1\|_H \ \ \forall \ h > 0. \tag{10}$$

Demostración:

La parte (a) se obtiene por aplicación del Teorema de Lax-Milgram (Kinderhlerer y Stampacchia, 1980).

En cuanto a la parte (b), como u_{hg_1} y u_{hg_2} son soluciones de la inecuación variacional elíptica (9) para g_1 y g_2 respectivamente, utilizando la coercividad de a se deduce:

$$\lambda \| u_{hg_2} - u_{hg_1} \|_V^2 \leq a(u_{hg_2} - u_{hg_1}, u_{hg_2} - u_{hg_1}) \leq (g_2 - g_1, u_{hg_2} - u_{hg_1})$$
$$\leq \| g_2 - g_1 \|_H \| u_{hg_2} - u_{hg_1} \|_V \quad \forall \;\; h > 0,$$

y en consecuencia se obtiene (10).

Lema 2:

Sean u_g y u_{hg} las soluciones de los problemas (P) y (P_h) respectivamente para un control $g \in H$. Entonces u_{hg} converge fuertemente a u_g en V cuando $h \to 0^+$.

Demostración:

Utilizando una idea similar a la del Lema 1, se obtiene que $\| u_{hg} \|_V \leq \; C \quad \forall \; h > 0$, donde C es una constante positiva independiente de h. Entonces existe $\eta \in V$ tal que u_{hg} converge débilmente a η en V cuando $h \to 0^+$. Por unicidad de la solución del problema (P_h) y que a es semicontinua inferiormente débil en V, resulta $\eta = u_g$. Utilizando nuevamente el hecho de que u_g y u_{hg} son respectivamente las soluciones de los problemas (P) y (P_h) para $g \in H$, resulta:

$$\lambda \| u_g - u_{hg} \|_V^2 \leq a(u_{hg} - u_g, u_{hg} - u_g) \leq (g, u_g - u_{hg}) + \int_{\Gamma_2} q(u_{hg} - u_g) \, d\gamma$$

y por ende:

$$\lim_{h \to 0^+} \| u_{hg} - u_g \| = 0.$$

Teorema 3: Se tiene que:

a) el funcional J_h es estríctamente convexo,

b) la solución del problema de control óptimo discreto (8) existe y es única $\forall \; h > 0$.

Demostración:

Sean $\mu \in [0, 1]$, $g_1, g_2 \in H$ y u_{hg_i} la solución de la inecuación variacional (9) para el control g_i $(i = 1, 2)$. Considerando $g_3(\mu) = \mu g_1 + (1 - \mu) g_2$ y u_{h3} la solución de (P_h) asociada a $g_3(\mu)$ y $u_{h4} = \mu u_{hg_1} + (1 - \mu) u_{hg_2}$ entonces resulta:

$$\mu J_h(g_1) + (1 - \mu) J_h(g_2) - J_h(g_3(\mu)) = \frac{1}{2}[\mu \; \| u_{hg_1} \|_H^2 + (1 - \mu) \| u_{hg_2} \|_H^2 - \| u_{h4} \|_H^2] +$$
$$\frac{M}{2}[\mu \| g_1 \|_H^2 + (1 - \mu) \| g_2 \|_H^2 - \| g_3(\mu) \|_H^2]$$

$$= \frac{\mu(1 - \mu)}{2} \| u_{hg_2} - u_{hg_1} \|_H^2 + \frac{M}{2} \mu(1 - \mu) \, \| g_2 - g_1 \|_H^2 + \frac{1}{2}[\| u_{h3} \|_H^2 - \| u_{h4} \|_H^2]$$
$$\geq \frac{\mu(1 - \mu)}{2} \| u_{hg_2} - u_{hg_1} \|_H^2 + \frac{M}{2} \mu(1 - \mu) \, \| g_2 - g_1 \|_H^2,$$

pues $0 \leq u_{h4}(\mu) \leq u_{h3}(\mu)$ con lo cual se obtiene la tesis (Lions, 1968).

Teorema 4:

Sean $u_{g_{op}}$ y $u_{h\,g_{op_h}}$ los respectivos estados asociados a los controles óptimos g_{op} y $g_{h\,op}$ soluciones de (3) y (8) respectivamente. Entonces se tiene que

$$u_{h\,g_{op_h}} \to u_{g_{op}} \quad \text{en} \quad V \text{ fuerte} \quad \text{y} \quad g_{h\,op} \to g_{op} \quad \text{en } H \text{ fuerte cuando } h \to 0^+.$$

Demostración:

Sean $h > 0$, $g_{h\,op}$ y $u_{h\,g_{op_h}}$ el control y estado óptimos discretos soluciones de (8) y (9) respectivamente. Entonces se tiene:

(i) $\quad \|u_{h\,g_{op_h}}\|_H \leq \|u_{h\,0}\|_H \leq c \quad \forall\ h,$

(ii) $\quad \|g_{h\,op}\|_H \leq \frac{1}{M}\|u_{h\,0}\|_H \leq \frac{1}{M}c \quad \forall\ h.$

Por lo tanto, existen $\eta \in V$ y $f \in H$ tales que $u_{h\,g_{op_h}}$ converge débil a η en V y $g_{h\,op}$ converge débil a f en H. Como la aplicación a es semicontinua inferiormente en V y por la unicidad de la solución del problema (P) resulta $\eta = u_f$. Además, por ser la norma en H una función semicontinua inferiormente en la topología débil y por el Lema 2, se tiene que $J(f) \leq J(g)\ \forall\ g \in H$, y como el problema de optimización (3) tiene única solución (Boukrouche y Tarzia, 2012), resulta $f = g_{op}$.
Considerando la coercividad de a resulta:

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda \|u_{g_{op}} - u_{h\,g_{op_h}}\|_V^2 &\leq a(u_{g_{op}} - u_{h\,g_{op_h}}, u_{g_{op}} - u_{h\,g_{op_h}}) \\ &\leq (g_{op} - g_{h\,op}, u_{g_{op}} - u_{h\,g_{op_h}}) - \int_{\Gamma_2} q(u_{g_{op}} - u_{h\,g_{op_h}})d\gamma. \end{aligned} \tag{11}$$

Aplicando límite cuando h tiende a cero en la expresión anterior (11) y por la convergencia fuerte de $u_{h\,g_{op_h}}$ a $u_{g_{op}}$ en H y la convergencia débil de $g_{h\,op}$ a g_{op} en H , se tiene que:

$$\lim_{h\to 0^+} \|u_{g_{op}} - u_{h\,g_{op_h}}\|_V = 0. \tag{12}$$

La convergencia fuerte de los controles óptimos $g_{h\,op}$ a g_{op} se obtiene utilizando la convergencia fuerte (12) y la convergencia débil de los controles óptimos.

REFERENCIAS

Bergounioux M. Use of augmented Lagrangian methods for the optimal control of obstacle problems. *Journal of Optimization Theory and Applications* 95:101–126, 1997.

Bergounioux M. y Kunisch K. Augmented Lagrangian techniques for elliptic state constrained optimal control problems. *SIAM Journal of Control and Optimization* 35:1524–1543, 1997a.

Bergounioux M. y Mignot F. Optimal control of obstacle problems: existence of lagrange multipliers. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 5:45–70, 2000.

Boukrouche M. y Tarzia D.A. Convergence of distributed optimal control problems governed by elliptic variational inequalities. *Computational Optimization and Applications* 53:375–393, 2012.

Brenner S. y Scott L. *The mathematical theory of finite elements*. Springer, Berlin, 1994.

Ciarlet P. *The finite element method for elliptic problems*. SIAM, Philadelphia, 2002.

De Los Reyes J. Optimal control of a class of variational inequalities of the second kind. *SIAM Journal of Control and Optimization* 49:1629–1658,2011.

Haller-Dintelmann R., Meyer C. Rehberg J. y Schiela A. Holder continuity and optimal control for nonsmooth elliptic problems. *Applied Mathematics and Optimization* 60:397–428, 2009.

Haslinger J. y Roubicek T. Optimal control of variational inequalities. Approximation theory and numerical realization. *Applied Mathematics and Optimization* 14:187–201, 1986.

Hintermuller M. Inverse coefficient problems for variational inequalities: optimality conditions and numerical realization. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 35:129–152, 2001.

Hintermuller M. An active-set equality constrained Newton solver with feasibility restoration for inverse coefficient problems in elliptic variational inequalities. *Inverse Problems* 24:034017 (23pp), 2008.

Hintermuller M. y Kopacka I. Mathematical programs with complementarity constraints in function space: C- and strong stationarity and a path-following algorithm. *SIAM Journal on Optimization* 20:868–902, 2009.

Ito K. y Kunisch K. Optimal control of elliptic variational inequalities. *Applied Mathematics and Optimization* 41:343–364, 2000.

Kinderhlerer D. y Stampacchia G. *An introduction to variational inequalities and their applications*. Acdemic Press, New York, 1980.

Kunisch K. y Wachsmuth D. Path-following for optimal control of stationary variational inequalities. *Computational Optimization and Applications* 41:1345–1373, 2012.

Lions J. *Controle optimal de systemes gouvernes par des equations aux derivees partielles*. Dunod, Paris, 1968.

Mignot F. Control dans les inequations variationelles elliptiques. *Journal of Functional Analysis* 22:130–185, 1976.

Mignot F. y Puel P. Optimal control in some variational inequalities. *SIAM Journal of Control and Optimization* 22:466–476, 1984.

Tarzia D.A. Convergence of a family of discrete distributed mixed elliptic optimal control problems with respect to a parameter. *NUMTA, Preprint* 2013.

Ye Y. y Chen Q. Optimal control of the obstacle in a quasilinear elliptic variational inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 294:258–272, 2004.