Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXXIII, págs. 2503-2512 (artículo completo)
Graciela Bertolino, Mariano Cantero, Mario Storti y Federico Teruel (Eds.)
San Carlos de Bariloche, 23-26 Setiembre 2014

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE UN PROBLEMA DE AGENTE-PRINCIPAL CONSIDERADO COMO PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO CON CONTROLES MONÓTONOS

Eduardo A. Philipp[a], Laura S. Aragone[a] and Lisandro A. Parente[a]

[a]*Grupo de investigación OPTyCON - Optimización y Control - Centro Internacional Franco-Argentino de Ciencias de la Información y de Sistemas (CIFASIS) - CONICET - UNR*

Keywords: Problemas de control monótono, Ecuaciones HJB, Soluciones Numéricas, Problema de Agente-Principal.

Abstract. Consideramos un problema de Agente-Principal en el cual un principal, no conociendo la productividad de un agente, le ofrece un contrato. Dada su ignorancia le ofrece un menú de contratos dejando elegir al agente aquel que más le convenga. Éste problema, definiendo un adecuado costo a minimizar e imponiendo condiciones de factibilidad, más específicamente de compatibilidad de incentivo y de racionalidad individual, fue enmarcado en Hellwig (2008) en el contexto de un problema de control óptimo con controles monótonos y horizonte finito.

En el presente trabajo, haciendo unas pequeñas simplificaciones al planteo original, logramos enmarcarlo dentro de la familia de problemas considerados en nuestro trabajo Philipp et al. (2014a) y procedemos a realizar simulaciones numéricas a partir de los esquemas numéricos definidos en Philipp et al. (2014b).

1 INTRODUCCIÓN

Muchos problemas en economía pueden ser formulados como problemas de control óptimo con controles monótonos. Entre ellos mencionamos problemas de inventario de producción, manejo de capitales y teoría de ajuste de problemas de inversión (ver Barron et al. (1987)). Damos una particular importancia a los sistemas económicos que involucran la explotación de recursos no renovables el tales como petróleo y minerales. Dada la imposibilidad de producir tales recursos podemos ver cómo estos problemas se pueden plantear en el marco de los problemas de control monótono. Asimismo, teniendo en cuenta la gran dificultad de reemplazar tales recursos por otros renovables, siendo el petróleo el ejemplo más famoso, el análisis de este tipo de problemas adquiere una gran importancia.

La resolución de estos problemas son difíciles y en la literatura existen dos abordajes: a partir del Principio de Máximo de Pontryagin (ver Hellwig (2008)) y a través de Programación Dinámica, que es el enfoque que daremos presentando un esquema numérico para la resolución de la ecuación HJB asociada para el problema de Agente-Principal.

En la sección 2 plantearemos el problema de control con controles monótonos que consideraremos en el resto del trabajo planteando las hipótesis generales y recopilando las propiedades más importantes. En la sección 3 planteamos la total discretización del problema junto al resultado de convergencia asociado. En la sección 4 haremos el planteo preciso del problema de Agente-Principal dejando en claro las consideraciones necesarias para enmarcarlo dentro del contexto del problema planteado en la sección 2. En la sección 5 realizamos la total discretización de este problema y procedemos a realizar las simulaciones numéricas. Finalmente en la sección 6 establecemos las conclusiones y el trabajo a realizar en el futuro.

2 PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO CON CONTROLES MONÓTONOS Y HORIZONTE FINITO

El sistema considerado es gobernado por la siguiente dinámica

$$\begin{cases} \dot{v}(s) = g(v(s), y(s), s), & s \in (t, T], \\ v(t) = \bar{v}, \end{cases} \tag{1}$$

donde $y(\cdot)$ es la función de control, la cual está restringida a ser no decreciente definida en el conjunto $[t, T]$, con valores en $[0, 1]$. Para cada $a \in [0, 1], t \leq T$ sea $\mathcal{A}_t(a)$ el conjunto de tales funciones con valores iniciales mayores o iguales a a, es decir $y(t) \geq a$.

En un punto $s > 0$, el vector $v(s) \in \mathbb{R}^\nu$ es el estado correspondiente al control $y(\cdot)$ empleado; $\bar{v} \in \Omega$ es el estado inicial y $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$ un conjunto abierto. Asumiremos que la evolución del sistema permanece siempre en Ω independientemente del control escogido. Supondremos las siguientes propiedades sobre las funciones g y f:

$$\|g(\bar{v}, a, s) - g(\hat{v}, \bar{a}, \bar{s})\| \leq L_g (\|\bar{v} - \hat{v}\| + |a - \bar{a}| + |s - \bar{s}|), \qquad \|g(\bar{v}, a, s)\| \leq M_g, \tag{2}$$

$$|f(\bar{v}, a, s) - f(\hat{v}, \bar{a}, \bar{s})| \leq L_f (\|\bar{v} - \hat{v}\| + |a - \bar{a}| + |s - \bar{s}|), \qquad |f(\bar{v}, a, s)| \leq M_f. \tag{3}$$

2.1 La función de costo óptimo

El problema consiste en encontrar la función de costo óptimo V, definida de la siguiente manera, $\forall t \in [0, T]$, $\forall \bar{v} \in \Omega$, $\forall a \in [0, 1]$

$$V(t, \bar{v}, a) := \inf_{\alpha \in \mathcal{A}_t(a)} J(t, \bar{v}, \alpha(\cdot)),$$

donde

$$J(t,\bar{v},y(\cdot)) := \int_t^T f(v(s),y(s),s)e^{-\lambda(s-t)}\mathrm{d}s$$

e $v(\cdot)$ es la solución de (1) con condición inicial $v(t)=\bar{v}$.

2.1.1 Propiedades de la función de costo óptimo

De Philipp et al. (2014a) sabemos que si se satisfacen las condiciones (2) y (3), entonces

$$|V(t,\bar{v},a)| \le \frac{M_f}{\lambda}(1-e^{\lambda t})$$

$$|u(t,\bar{v},a)-u(t,\hat{v},\bar{a})| \le L_T\left(\|\bar{v}-\hat{v}\|+|a-\bar{a}|\right)$$

donde

$$L_T = \begin{cases} \frac{L_f}{\lambda - L_g} & \text{si} \quad \lambda > L_g \\ \frac{L_f}{L_g-\lambda}e^{(L_g-\lambda)T} & \text{si} \quad \lambda < L_g \\ TL_f & \text{si} \quad \lambda = L_g \end{cases}$$

además

$$|V(t,\bar{v},a)-V(\bar{t},\bar{v},a)| \le M_T|t-\bar{t}|.$$

2.2 La ecuación de HJB

Para este caso la ecuación de HJB asociada tiene la forma

$$\min\left(LV(t,\bar{v},a), \frac{\partial V(t,\bar{v},a)}{\partial a}\right) = 0 \qquad \text{en } (0,T)\times\Omega\times(0,1) \tag{4}$$

donde

$$LV = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \bar{v}}g + f - \lambda V.$$

Además, deben satisfacerse las siguientes condiciones de frontera y finales.
Condición de frontera

$$V(t,\bar{v},1) = \int_t^T f(\eta(s),1,s)e^{\lambda(s-t)}\mathrm{d}s,$$

donde $\eta(s)$ es la trayectoria con valor inicial $\eta(t)=\bar{v}$ correspondiente al control $y\equiv 1$.
Condición final

$$V(T,\bar{v},a) = 0 \qquad \forall (x,a)\in\Omega\times[0,1].$$

La función valor V es la única solución de viscosidad de la ecuación HJB satisfaciendo las condiciones de frontera y finales (ver Barron (1980), Philipp et al. (2014a)).

3 DISCRETIZACIÓN DEL PROBLEMA

Con el objetivo de obtener esquemas de discretización para resolver numéricamente la ecuación (4), introducimos un problema auxiliar de control óptimo donde las políticas tienen la restricción adicional de ser funciones uniformemente escalonadas y con valores en un conjunto discreto equi-espaciado. Específicamente, la variable de control a toma valores en el conjunto

$$I_h := \left\{ ih | i = 0\ldots\frac{1}{h}\right\}.$$

donde $h > 0$ es el parámetro de discretización asociado a las variables t y a. Consideraremos en lo siguiente que $\frac{1}{h}$ es entero y el horizonte $T = \mu h$, con μ entero. Definimos además

$$I_h(a) = I_h \cap [a, 1].$$

Consideraremos además una adecuada discretización del espacio Ω a partir de un parámetro $k > 0$ y una familia de triangulaciones $\{S_j^k\}$ de Ω, es decir una familia de símplices que aproximan a Ω en el sentido siguiente:

$\Omega_k = \bigcup_j S_j^k$ es un poliedro en $\mathbb{R}^\nu$ tal que se satisfacen las siguientes propiedades:

$$\max_j(\text{diam } S_j^k) = k. \tag{5}$$

$$\exists h_0 > 0 \text{ tal que } x + hg(\bar{v}, a, s) \in \Omega_k,\ \forall x \in \Omega_k,\ \forall a \in I_h,\ \forall s \in (0, T],\ \forall h < h_0. \tag{6}$$

$$\begin{array}{l} \Omega_k \to \Omega \text{ si } k \to 0, \text{ en el sentido siguiente: } \Omega_k \subset \Omega \text{ y} \\ \forall K \text{ compacto contenido en } \Omega,\ \exists \bar{k}(K)/K \subset \Omega_k \quad \forall k \leq \bar{k}(K). \end{array} \tag{7}$$

Si d_i es el diámetro del simplex S_i^k, entonces $\exists \chi_1 > 0$ tal que para cada simplex de Ω_k, existe una esfera de radio

$$r \leq \chi_1 d_i. \tag{8}$$

en el interior del simplex. Más Aún, existe $M > 0$, independiente de la discretización tal que

$$\frac{k}{d_i} \leq M \qquad \forall i. \tag{9}$$

Consideramos el conjunto W_k de funciones $w : \Omega_k \times I_h \to \mathbb{R},\ w(\cdot, a)$ continua en Ω_k, con $\frac{\partial w(\cdot,a)}{\partial x}$ constante en el interior de cada simplex de Ω_k (esto es, w es un elemento finito lineal).

Sea P^k el conjunto formado por la unión sobre j de los vértices de la familia de simplices $\{S_j^k\}$. Si N es la cardinalidad de P^k, consideramos un ordenamiento adecuado:

$$P^k = \{x^i,\ i = 1, \ldots, N\}.$$

3.1 Definición de la función valor totalmente discretizada

Definimos ahora u_k^h, la función de costo óptimo totalmente discretizada donde

$$V_k^h(n, \cdot, \cdot) \in W_k \qquad \forall n = 0, \ldots, \mu$$

está determinada por el esquema recursivo

$$\begin{cases} V_k^h(n-1, \cdot, \cdot) \;=\; \min_{b \in I_h(a)} \left\{(1 - \lambda h) V_k^h(n, x^i + hg(x^i, a, n), b) + hf(x^i, a, n)\right\}, \\ \qquad\qquad \forall x^i \in V^k,\ \forall a \in I_h,\ \forall n = 1, \ldots, \mu \\ V_k^h(\mu, \cdot, \cdot) \equiv 0, \end{cases}$$

para $0 \leq n \leq \mu$.

3.2 Resultado de convergencia

En Philipp et al. (2014a) fue probado el siguiente resultado de convergencia:

$$\max_{0\leq n\leq \mu} |V_k^h(n,\bar{v},a) - V(n,\bar{v},a)| \leq M\phi(T)\left(h + \frac{k}{\sqrt{h}}\right),$$

con

$$\phi(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } L_g < \lambda \\ e^{(L_g-\lambda)T} & \text{si } L_g > \lambda \\ T & \text{si } L_g = \lambda. \end{cases} \tag{10}$$

4 PROBLEMA DEL AGENTE-PRINCIPAL

En economía, el problema del Agente-Principal designa un conjunto de situaciones que se originan cuando un actor económico (el principal), depende de la acción o de la naturaleza o de la moral de otro actor (el agente), sobre el cual no tiene perfecta información. En otras palabras, ese asunto concierne las dificultades que se presentan bajo condiciones de información asimétrica, cuando el principal contrata a un agente.

Procedemos a plantear brevemente el problema. Definimos las variables y funciones:

- t: nivel de productividad.
- $y(t)$: producción.
- $w(t)$: paga del empleado.
- $v(t)$: ganancia del jefe.

El principal quiere maximizar la diferencia

$$y(t) - w(t)$$

Se supone que la ganancia neta del empleado depende de su sueldo, de la producción que debe alcanzar y de la productividad (esfuerzo) que invierte. Por lo tanto modelamos

$$v(t) = u(w(t), y(t), t). \tag{11}$$

A su vez se modela al sueldo $w(t)$ como

$$w(t) = c(v(t), y(t), t). \tag{12}$$

Este planteo proviene de interpretar que $w(t)$ será el sueldo que le permite al empleado con productividad t ganar $v(t)$ produciendo $y(t)$. De (11) y (12) resulta que $v(t)$ queda definida implícitamente como

$$v(t) = u(c(v(t), y(t), t), y(t), t). \tag{13}$$

Si u satisface la denominada *Single crossing condition* se puede probar (ver Hellwig (2008)) que la condición de compatibilidad de incentivo

$$u(w(t), y(t), t) \geq u(w(t', y(t'), t) \quad \forall t \neq t'$$

es equivalente a

$$\begin{cases} v'(t) = u_t(c(v(t), y(t), t), y(t), t) = f(v(t), y(t), t) \quad \text{p.c.t. } t \\ y(\cdot) \text{ es no decr.} \end{cases}$$

Esta condición de compatibilidad de incentivo provoca que el empleado, para cada t, realice precisamente el esfuerzo t y no menor, es decir que le convenga realizar tal esfuerzo t.

Además, si u es no decreciente en la variable t y la utilidad $\bar{v}$ de la oferta externa es independiente de t, la restricción de participación

$$v(t) \geq \bar{v} \quad \forall t$$

se verifica en todo t si y sólo si se verifica en 0, es decir:

$$v(0) \geq \bar{v}.$$

De la misma manera, siendo y no decreciente, y es no negativa si y sólo si es no negativa en 0 es decir

$$y(0) \geq 0.$$

Finalmente, si el jefe considera una distribución del parámetro de productividad $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$, el problema consiste en elegir $y(\cdot)$ (y $v(\cdot)$) tal que maximice

$$\int_0^1 [y(t) - c(v(t), y(t), t)]F(t)\mathrm{d}t.$$

Resumiendo todo el planteo tenemos lo siguiente

$$\begin{cases} v'(t) & = & u_t(c(v(t), y(t), t), y(t), t) = g(v(t), y(t), t) \quad \text{p.c.t. } t \\ v(0) & \geq & \bar{v}. \end{cases} \tag{14}$$

Con $y(\cdot)$ no decreciente e $y(0) \geq 0$. Y buscamos

$$\max_{y(\cdot) \text{ no decr}} \int_0^1 f(v(t), y(t), t)\mathrm{d}t$$

4.1 Consistencia

Haremos mención de algunas simplificaciones del modelo para que pueda ser adaptado al marco de problemas de control monótono con horizonte finito planteado en la primera sección.

- Para distintos valores posibles iniciales $\bar{v}$, consideraremos en (14) una igualdad en lugar de una desigualdad para tener bien planteado el Problea de Cauchy.

- En el problema de Agente-Principal así planteado, se deben escoger dos controles, a saber $w(\cdot)$ el cual deber ser medible y no negativo e $y(\cdot)$ un control monótono con valor inicial mayor o igual que cero. Este problema puede ser enmarcado en el contexto de problemas de control monótono mixto, más precisamente en aquellos que contienen un control arbitrario y otro monótono. En lo que sigue, fijaremos posibles controles $w(\cdot)$ para luego aproximar a la función valor y al control monótono sub-óptimo $y(\cdot)$ asociado a esa elección de $w(\cdot)$. En un trabajo futuro desarrollaremos esquemas de discretización específicos para problemas de control monótono mixtos.

Escogiendo $T = 1$ y $\lambda = 1$ podemos reescribir el problema de la siguiente forma:

$$\begin{cases} v'(t) &= u_t(c(v(t), y(t), t), y(t), t) = g(v(t), y(t), t) \quad \text{p.c.t. } t \\ v(0) &= \bar{v}. \end{cases}$$

Con $y(\cdot)$ no decreciente e $y(0) \geq 0$. En este caso $\Omega = \mathbb{R}^+$. Buscamos

$$\max_{y(\cdot)\text{ no decr}} \int_0^1 [y(t) - c(v(t), y(t), t)]F(t)\mathrm{d}t = \max_{y(\cdot)\text{ no decr}} \int_0^1 f(v(t), y(t), t)\mathrm{d}t$$

Observamos que el anterior valor se interpreta como la función valor V en $t = 0, \bar{v} \in \Omega, a = 0$, es decir

$$\begin{aligned} V(0, \bar{v}, 0) &= \max_{y(\cdot)\text{ no decr}} \int_0^1 [y(t) - c(v(t), y(t), t)]F(t)\mathrm{d}t \\ &= \max_{y(\cdot)\text{ no decr}} \int_0^1 f(v(t), y(t), t)e^{\lambda t}e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \\ &= \max_{y(\cdot)\text{ no decr}} \int_0^1 \hat{f}(v(t), y(t), t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

A continuación haremos la elección de la función u. Seguiremos el modelo planteado por Mirrlees (ver Mirrlees (1971), Hellwig (2009)) en donde se escoge

$$v(t) = u(w, y, t) = w - \gamma(\frac{y}{t})$$

con

$$\gamma(p) = p^q, \quad q > 1$$

Elegiremos para las simulaciones $q = 2$. De esta forma la dinámica queda

$$\begin{cases} v'(t) &= 2\dfrac{y^2(t)}{t^3} \quad \text{p.c.t. } t \\ v(0) &\geq \bar{v}. \end{cases}$$

Observación. La función $\hat{g}$ no verifica las condiciones de regularidad (3). No obstante hemos procedido a realizar las simulaciones numéricas logrando convergencia. De todas maneras, el problema de la falta de regularidad se puede sobrellevar considerando un parámetro de regularización $\epsilon > 0$ y la función

$$\hat{g}_\epsilon(v(t), y(t), t) = \begin{cases} \hat{g}(v(t), y(t), t) & t \geq \epsilon \\ 2\dfrac{y^2(t)}{\epsilon^3} & t < \epsilon. \end{cases}$$

Es sencillo ver que esta nueva función satisface las hipótesis (2). Más adelante procederemos a realizar simulaciones tanto con $\hat{g}$ como con $\hat{g}_\epsilon$.

Fijamos $w(t)$, $F(t)$ de la siguiente manera:

$$w(t) = c(y(t), v(t), t) = y(t) + v(t) + t.$$

$$F(t) = \frac{2}{3}(1 - t^2).$$

5 DISCRETIZACIÓN DEL PROBLEMA DE AGENTE-PRINCIPAL Y SIMULACIONES NUMÉRICAS

Recordamos los conjuntos

$$I_h := \left\{ih|i = 0 \dots \frac{1}{h}\right\}.$$

donde $h > 0$ es el parámetro de discretización asociado a las variables t y a. Consideraremos en lo siguiente que $\frac{1}{h}$ es entero y el horizonte $T = \mu h$, con μ entero. Definimos además

$$I_h(a) = I_h \cap [a, 1].$$

Con esta información a disposición procedemos a efectuar una total discretización del problema definiendo un $k > 0$ y la familia de vértices:

$$P^k := \{jk\, ;\, j \in \mathbb{N}\} \tag{15}$$

Estos determinan la familia de segmentos

$$S_j^k := [jk, (j+1)k]\, ;\, j \in \mathbb{N} \tag{16}$$

Cuya unión sobre $j \in \mathbb{N}$ es

$$\Omega_k = [k, \infty)$$

Chequeamos ahora que esta familia de triangulaciones verifican las hipótesis. Siendo diam $S_i^k = k$ para cada j es claro que (5) se satisface. La función $\hat{g}$ estará definida especialmente para que (6) se satisfaga. A partir de la definición de Ω_k, (7) es inmediata. Finalmente observamos que tomando $\chi_1 = r = 1$, (8) y (9) son verificadas.

5.1 Implementaciones numéricas

Para las siguientes simulaciones hemos elegido las funciones

$$w(t) = c(y(t), v(t), t) = y(t) + v(t) + t.$$

$$F(t) = \frac{2}{3}(1 - t^2).$$

Por cuestiones obvias de capacidad computacional debemos restringirnos a un subdominio acotado de Ω_k. Escogemos $\Omega_k \cap (0, 6)$.

En la siguiente tabla y para distintos valores de h, k obtenemos valores aproximados de $V(0, \bar{v}, 0)$. Aquí escogemos la función $\hat{g}$:

$V_h^k(0,\cdot,0)$	$h=k=\frac{1}{4}$	$h=k=\frac{1}{8}$	$h=k=\frac{1}{16}$
0.5	0.4136	0.4037	0.4016
1	0.6346	0.6266	0.6245
1.5	0.8556	0.8495	0.8488
2	1.0766	1.0723	1.0699
2.5	1.2976	1.2953	1.2933
3	1.5186	1.5181	1.5178
3.5	1.7397	1.7411	1.7420
4	1.9607	1.9639	1.9648
4.5	2.1817	2.1868	2.1892
5	2.4027	2.4097	2.4123
5.5	2.6237	2.6326	2.6396
6	2.8447	2.8554	2.8601

Table 1: Resultados numéricos para $\hat{g}$

Hacemos la misma simulación para la función $\hat{g}_\epsilon$ con $\epsilon = 0.25$ y observamos los resultados en la tabla

$V_h^k(0,\cdot,0)$	$h=k=\frac{1}{4}$	$h=k=\frac{1}{8}$	$h=k=\frac{1}{16}$
0.5	0.4177	0.4077	0.4056
1	0.6473	0.6391	0.6374
1.5	0.8812	0.8750	0.8741
2	1.1197	1.1152	1.1125
2.5	1.3625	1.3601	1.3576
3	1.6097	1.6095	1.6090
3.5	1.8614	1.8630	1.8642
4	2.1175	1.1210	1.1219
4.5	2.3781	2.3835	2.3862
5	2.6430	2.6507	2.6535
5.5	2.9123	2.9221	2.9301
6	3.1861	3.1977	3.2035

Table 2: Resultados numéricos para $\hat{g}_\epsilon$ con $\epsilon = 0.25$

6 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Hemos podido contextualizar el problema de Agente-Principal en el marco de los problemas de control monótono con horizonte finito. Además las simulaciones numéricas corroboraron el resultado teórico de convergencia para dos escenarios diferentes.

Nos hemos propuesto el futuro desarrollo de métodos numéricos para problemas de control monotono mixto. Más precisamente aquellos problemas en donde están presentes dos controles, uno clásico con la única hipótesis de medibilidad y otro monótono.

REFERENCES

Barron E.N. Viscosity solutions for the monotone control problem. *SIAM J. Control and Opt.*, 23, 1980.

Barron E.N., Jensen R., and Malliaris A.G. Minimizing a quadratic payoff with monotone controls. *Mathematics of Operations Research*, 12:297–308, 1987.

Hellwig M. A maximum principle for control problems with monotonicity constraints. *Preprints of the Max Planck Institute for Research on Collective Goods, No. 2008, 4.*, 2008.

Hellwig M. Incentive problems with hidden characteristics: A unified approach. *Preprint 06-26, Max Planck Institute for Research on Collective Goods, Bonn.*, 2009.

Mirrlees J.A. An exploration in the theory of optimum income taxation. *The Review of Economic Studies. 38 (2).*, 1971.

Philipp E.A., Aragone L.S., and Parente L.A. Discrete time schemes for optimal control problems with monotone controls. *Journal of Computational and Applied Mathematics - Springer. DOI 10.1007/s40314-014-0149-4*, 2014a.

Philipp E.A., Aragone L.S., and Parente L.A. Fully discrete schemes for monotone optimal control problems. *Preprint*, 2014b.