

MODELADO DE TEJIDO ARTERIAL UTILIZANDO UN ELEMENTO FRACCIONAL VISCOELÁSTICO DE ORDEN SUPERIOR

Jorge M. Pérez Zerpa^a, Alfredo Canelas^a, Berardi Sensale^a, Daniel Bia Santana^b y
Ricardo L. Armentano^c

^aInstituto de Estructuras y Transporte, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República. Julio
Herrera y Reissig 565, Montevideo, Uruguay, CP:11300, <http://www.fng.edu.uy/iet>

^bDepartamento de Fisiología, CUiiDARTE, Facultad de Medicina, Universidad de la República.
General Flores 2125, Montevideo, Uruguay, CP:11800, <http://www.cuiidarte.fmed.edu.uy/>

^cGrupo de Ingeniería Aplicada a los Procesos Biológicos y Agrícolas, Centro Universitario Regional
Noroeste, Universidad de la República, Florida 1051, Paysandú, Uruguay

Palabras Clave: Viscoelasticidad, Cálculo fraccional, Comportamiento mecánico de la pared arterial.

Resumen. Los modelos viscoelásticos simples, compuestos por resortes y amortiguadores, han sido ampliamente utilizados para modelar el comportamiento de diversos materiales. Sin embargo, para poder modelar el comportamiento de materiales reales es necesario utilizar un elevado número de dichos elementos. Para mejorar la capacidad de estos modelos sin aumentar el número de elementos, durante el siglo XX fue desarrollado el elemento fraccional, en el cual la tensión es proporcional a la derivada de orden fraccional α de la deformación, donde α pertenece al intervalo $[0, 1]$.

El elemento fraccional es usualmente llamado *spring-pot*, ya que representa un comportamiento intermedio entre un resorte (*spring*) y un amortiguador (*dashpot*). Los modelos que incluyen un *spring-pot* son llamados modelos viscoelásticos fraccionales (MVF) y han proporcionado resultados prometedores en el modelado de materiales complejos como polímeros y tejidos vivos. Nuestro objetivo es mejorar la precisión de estos modelos mediante el uso de una versión modificada del *spring-pot*, llamado *high-order-spring-pot* (HOSP), donde el parámetro fraccional es considerado en el intervalo $[0, 2]$.

En este artículo se describe e implementa un método numérico para la caracterización de las propiedades mecánicas de MVFs a partir de datos de tensión y deformación del material. La implementación es validada a través de la resolución de ejemplos con datos generados artificialmente con y sin ruido añadido. También se resuelve un ejemplo artificial en el que se muestra que el elemento HOSP permite simular el comportamiento dado por modelos de mayor complejidad, en particular Maxwell-Wiechert. Posteriormente, se aplica el método a datos de tensión-deformación, obtenidos a partir de datos de presión y diámetro de una arteria de oveja sana (datos *in-vitro* presentados en literatura). El método se aplica utilizando tanto el elemento *spring-pot* como el elemento HOSP. Para los datos experimentales, los resultados muestran una mejora considerable al utilizar el HOSP, reduciendo el error a la mitad.

A partir de los resultados obtenidos, se concluye que los MVFs son mejorados al utilizar un elemento de orden superior, y en particular, que estos modelos son adecuados para el modelado del comportamiento de la pared arterial.

1. INTRODUCCIÓN

El comportamiento constitutivo de diversos materiales es usualmente representado por modelos reológicos simples compuestos por resortes y amortiguadores lineales. De todas formas, como es indicado en [Lakes \(2009\)](#), los modelos formados por un pequeño número de resortes y amortiguadores cumplen un rol pedagógico y los materiales reales no pueden ser, en general, modelados por este tipo de modelos. Una de las formas de aumentar la complejidad de los modelos es a través de un aumento del número de elementos. En [Wang et al. \(2013\)](#) se muestra que el uso de modelos reológicos formados por varios resortes y amortiguadores en serie y paralelo, mejora el ajuste de los modelos a datos obtenidos en ensayos con tejidos vivos. En este tipo de modelos la ecuación constitutiva es dada por una ecuación diferencial con derivadas de orden superior a 1.

En [Fung \(1981\)](#) se incluye a los tejidos vivos dentro del grupo de los materiales con comportamiento viscoelástico (aunque en ciertos rangos de deformaciones pueden ser considerados elásticos). En la literatura podemos encontrar diferentes modelos reológicos aplicados al modelado de diversos tejidos [Then et al. \(2012\)](#); [Zhang et al. \(2008\)](#); [Valdez-Jasso et al. \(2009\)](#). Existe un especial interés en el modelado del comportamiento de la pared arterial, motivado por la incidencia de la enfermedad cardiovascular aterosclerótica (ECVA) en las cifras de mortalidad mundiales [Naghavi et al. \(2003\)](#).

Procurando mejorar la capacidad de los modelos constitutivos han surgido Modelos Viscoelásticos Fraccionales (MVF), que son modelos viscoelásticos que incluyen por lo menos un elemento fraccional. En este elemento fraccional, también conocido en la literatura como *spring-pot* (combinación entre resorte y amortiguador en inglés), la tensión corresponde a un intermedio entre un resorte y un amortiguador. El comportamiento intermedio es representado matemáticamente imponiendo que la tensión sea proporcional a la derivada fraccional de la deformación, es decir, $\sigma \propto D^\alpha \varepsilon$. El orden de la derivada α es otro parámetro mecánico, y es denominado parámetro fraccional. En los MVF presentados en la literatura revisada por los autores el parámetro fraccional se considera dentro del intervalo $[0, 1]$.

Los MVF han demostrado ser adecuados para el modelado del comportamiento de materiales complejos reales, tales como elementos estructurales anisótropos [Allam y Zenkour \(2003\)](#), polímeros [Lewandowski y Chorążyczewski \(2010\)](#) y tejido vivo. En el caso de tejidos vivos, los MVF han representado una buena alternativa para el modelado del comportamiento de la pared arterial [Craiem y Armentano \(2007\)](#); [Craiem et al. \(2008\)](#).

En este trabajo se presenta un elemento fraccional que llamamos *high-order-spring-pot* (HOSP), definido a través del uso de un *spring-pot* y permitiendo que el límite superior del parámetro fraccional α sea 2. Utilizamos MVF con un HOSP y demostramos su capacidad para reproducir el comportamiento de la pared arterial con mejor precisión que otros modelos utilizados en la literatura.

En la Sección 2 se presentan algunos conceptos básicos del cálculo fraccional, algunas propiedades importantes de la transformada de Fourier y, finalmente, se describen los modelos viscoelásticos usados a través del presente artículo. En la Sección 3 se describe un método para la caracterización de parámetros mecánicos de MVFs, incluyendo el parámetro fraccional α . El método obtiene los parámetros a través de la resolución de un problema inverso, utilizando una función objetivo dada por los coeficientes de Fourier de las señales de deformación-tensión del modelo y valores medidos. La validación de la implementación se realiza mediante la obtención de resultados numéricos que se presentan en la Sección 4 en el Ejemplo 1. En el Ejemplo 2 se aplica el método a datos generados utilizando un modelo constitutivo de mayor complejidad

y en el Ejemplo 3 se aplica a valores obtenidos experimentalmente. Los datos experimentales utilizados forman parte de los datos obtenidos en [Valdez-Jasso et al. \(2009\)](#) y consisten en valores de presión y diámetro de la pared arterial de una oveja sana. Finalmente se obtienen conclusiones acerca de las ventajas de la utilización del HOSP y posibles interpretaciones de los resultados.

2. PRELIMINARES

2.1. Cálculo Fraccional

La teoría del Cálculo Fraccional introduce una generalización de la derivada de una función para órdenes no enteros. Han sido planteadas diferentes posibles definiciones para esta derivada fraccional, aunque en este trabajo consideraremos la definición de Riemann-Louville con límite inferior $-\infty$, dada por la siguiente expresión:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \quad n - 1 < \alpha < n. \quad (1)$$

Esta definición es descrita en [Podlubny \(1999\)](#) como apropiada para procesos estacionarios, como sólidos sometidos a cargas periódicas. En particular al considerar $n = 1$ obtenemos la expresión de la derivada fraccional intermedia entre la función y su derivada primera, la cual se puede utilizar para definir la tensión producida en materiales viscoelásticos.

Una propiedad útil es la dada por la siguiente expresión:

$$D^\alpha e^{i\omega t} = (i\omega)^\alpha e^{i\omega t} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

donde el valor i^α puede ser calculado utilizando la fórmula $i^\alpha = \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) + i \sin(\alpha \frac{\pi}{2})$ (cálculo implementado por la herramienta numérica GNU-Octave).

2.2. Transformada de Fourier

Dada una magnitud y variable en el tiempo, representada por una función periódica $y(t)$, consideremos los valores obtenidos evaluando en N instantes de tiempo a partir de $t = 0$. La señal discreta está dada por

$$y_n = y(T \cdot n) \quad n = 0, \dots, N - 1, \quad (3)$$

donde T es el tiempo entre muestras. Si $f_s = 1/T$ es la frecuencia de muestreo (número de muestras por unidad de tiempo), entonces, podemos escribir $y_n = y(\frac{n}{f_s})$. Definamos la Transformada Discreta de Fourier TDF: $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^n$, como una función vectorial $\mathbf{Y} = \text{TDF}(\mathbf{y})$, donde la entrada k -ésima de \mathbf{Y} está dada por

$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cdot e^{-i\omega_k \frac{n}{f_s}} \quad k = 0, \dots, N - 1, \quad (4)$$

donde $\omega_k = 2\pi k \frac{f_s}{N}$ es la k -ésima frecuencia. También definimos la transformada inversa de Fourier, $\mathbf{y} = \text{TIDF}(\mathbf{Y})$, donde la n -ésima entrada de \mathbf{y} está dada por

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \cdot e^{i\omega_k \frac{n}{f_s}} \quad n = 0, \dots, N - 1. \quad (5)$$

Suponiendo que la función continua y se puede descomponer en una suma de funciones exponenciales, y utilizando la Ecuación (2) obtenemos

$$y(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{i\omega_k t} \quad D^\alpha y(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (i\omega_k)^\alpha y_k e^{i\omega_k t}. \quad (6)$$

Si tenemos en cuenta los tiempos de $t = n/f_s$ se puede observar que los coeficientes de estas descomposiciones se pueden obtener mediante el uso de la TDF.

2.3. Modelo Viscoelástico Fraccional

En esta sección se presenta brevemente el modelo viscoelástico llamado Sólido Estandar Lineal (SEL) descrito extensamente en la literatura (por ejemplo Marques y Creus (2012)) y se describe un modelo modificado incluyendo un elemento fraccional.

En el modelo SEL la respuesta del material está representada por una configuración de dos resortes y un amortiguador y los parámetros materiales que definen el comportamiento son las rigideces de los resortes E_0 y E_1 , la viscosidad del amortiguador η_1 . En el modelo modificado fraccional (también presente en la literatura), que llamaremos Sólido Estandar Lineal Fraccional (SELF), se sustituye el amortiguador por un elemento fraccional, obteniendo una disposición como se puede ver en la Figura 1. Todas las constantes de material son positivas.

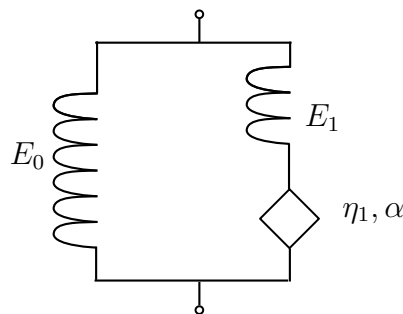


Figura 1: Esquema Modelo Sólido Estandar Lineal Fraccional

La tensión producida en este elemento fraccional σ_F es proporcional a la derivada fraccional de la deformación ε_F , en este caso a través de la siguiente ecuación:

$$\sigma_F = E_1^{(1-\alpha)} \eta_1^\alpha D^\alpha \varepsilon_F. \quad (7)$$

Operando obtenemos la ecuación constitutiva del modelo.

$$\sigma + \tau_\sigma D^\alpha \sigma = E_0 ((\varepsilon - \varepsilon_0) + \tau_\varepsilon D^\alpha \varepsilon) \quad (8)$$

donde los llamados tiempos de relajación y fluencia están dados por:

$$\tau_\sigma = \left(\frac{\eta_1}{E_1} \right)^\alpha, \quad \tau_\varepsilon = \frac{E_1 + E_0}{E_0} \tau_\sigma, \quad (9)$$

y ε_0 es una deformación de referencia correspondiente a una configuración libre de tensión. Podemos destacar que los parámetros τ tienen dimensión [Tiempo ^{α}], y que este modelo representa el modelo SEL al considerar $\alpha = 1$. En la literatura este parámetro es considerado un número real en el dominio $[0, 1]$. Sin embargo se puede demostrar que es termodinámicamente admisible permitir que α esté en el intervalo $[0, 2]$.

2.4. Modelo de Doble brazo de Maxwell-Wiechert - DMW

En este modelo constitutivo la respuesta del material es representada por un arreglo de tres resortes y dos amortiguadores dispuestos como se puede ver en la Figura 2. En este caso consideramos $\varepsilon_0 = 0$, aunque otros valores pueden ser considerados sin modificaciones relevantes en los desarrollos y resultados.

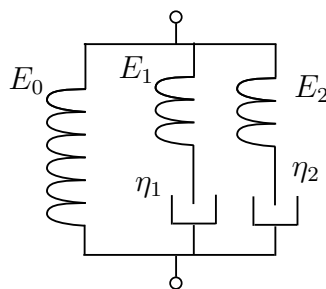


Figura 2: Esquema del modelo de Doble brazo de Maxwell-Wiechert.

La ecuación constitutiva está dada por la siguiente expresión:

$$\sigma + \dot{\sigma}\chi_1 + \ddot{\sigma}\chi_2 = E_0(\varepsilon + \dot{\varepsilon}\nu_1 + \ddot{\varepsilon}\nu_2) \tag{10}$$

donde

$$\chi_1 = \tau_{\sigma 1} + \tau_{\sigma 2}, \quad \chi_2 = \tau_{\sigma 1}\tau_{\sigma 2}, \tag{11}$$

$$\nu_1 = \tau_{\sigma 1} + \tau_{\sigma 2} + \nu_1 + \nu_2, \quad \nu_2 = \tau_{\sigma 1}\tau_{\sigma 2} + \nu_1\tau_{\sigma 2} + \nu_2\tau_{\sigma 1}, \tag{12}$$

y,

$$\tau_{\sigma 1} = \frac{\eta_1}{E_1}, \quad \tau_{\sigma 2} = \frac{\eta_2}{E_2}, \quad \nu_1 = \frac{\eta_1}{E_0}, \quad \nu_2 = \frac{\eta_2}{E_0}. \tag{13}$$

Este modelo es presentado en Wang et al. (2013) como uno de los modelos viscoelásticos mas apropiado para ajustar datos experimentales obtenidos utilizando tejidos biológicos.

3. MÉTODO DE CARACTERIZACIÓN

Consideremos el modelo constitutivo SELF dado por cinco parámetros materiales, que separamos en: uno fraccional α y otros cuatro parámetros mecánicos representados por el vector \mathbf{x} . Usando esta notación la ecuación constitutiva está dada por,

$$\sigma + x_4 D^\alpha \sigma = -x_1 + x_2 \varepsilon + x_3 D^\alpha \varepsilon. \tag{14}$$

Consideremos que la tensión y deformación se evalúan en N instantes de tiempo. Aplicando la TDF a ambos lados de la igualdad y usando las propiedades presentadas en la Sección 2.2 obtenemos la siguiente expresión:

$$(\mathbf{I} + x_4 \mathbf{\Lambda}_\alpha) \mathbf{Q} + x_1 \mathbf{D} - (x_2 \mathbf{I} + x_3 \mathbf{\Lambda}_\alpha) \mathbf{U} = 0 \tag{15}$$

donde \mathbf{Q} y \mathbf{U} son los vectores de TDF de las señales dadas por σ y ε , respectivamente, $\mathbf{\Lambda}_\alpha$ es una matriz diagonal con coeficientes $(\mathbf{\Lambda}_\alpha)_{nn} = (i\omega_n)^\alpha$ y \mathbf{D} es un vector con $D_i = \delta_{i1} N$. Consideremos que la tensión y deformación obtenidos experimentalmente son representados

por $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\varepsilon}$ respectivamente, y sus respectivos vectores de coeficientes TDF son representados con $\tilde{\mathbf{Q}}$ y $\tilde{\mathbf{U}}$. Se denota la deformación y tensión de la solución del modelo (14) por ε y σ , éstas son las señales dadas por el modelo para ciertos parámetros mecánicos.

En forma similar a como se hace en Valdez-Jasso et al. (2009), suponemos que la tensión dada por el modelo es igual a la señal medida, y por lo tanto su vector de coeficientes TDF, no tiene errores, por lo tanto $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$. Podemos ahora entonces, obtener el vector TDF de la deformación dada por el modelo ($\tilde{\mathbf{U}}$), la Ecuación (15) obteniendo:

$$U_n(\mathbf{x}, \alpha) = \frac{(1 + x_4(i\omega_n)^\alpha)\tilde{Q}_n + x_1 N \delta_{n0}}{x_2 + x_3(i\omega_n)^\alpha} \quad n = 0, \dots, N - 1. \quad (16)$$

Nuestro problema de caracterización consiste en determinar los parámetros que producen un mínimo error entre el modelo y los resultados experimentales. Por lo tanto, el problema de caracterización se puede formular de la siguiente forma

$$(C) \begin{cases} \min_{\mathbf{x}, \alpha} f(\mathbf{x}, \alpha) \\ \text{sujeto a} \\ x_i \geq 0 \quad i = 2, 3, 4 \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \quad \alpha \in I_\alpha \end{cases} \quad \text{con} \quad f(\mathbf{x}, \alpha) = \frac{\|\mathbf{U}(\mathbf{x}, \alpha) - \tilde{\mathbf{U}}\|^2}{\|\tilde{\mathbf{U}}\|^2}, \quad (17)$$

donde f es la función objetivo que mide el error relativo entre los coeficientes TDF de la deformación del modelo y la medida obtenida experimentalmente. I_α es el intervalo real al que pertenece α . Este problema inverso se resuelve utilizando un método numérico iterativo descrito a continuación.

El problema (C) se resuelve para en un conjunto discreto de valores α , dados por $S_\alpha = \{\alpha_s + i\Delta\alpha \mid i = 1, \dots, N_\alpha\}$. Luego obtenemos el parámetro fraccional óptimo α^* , como el que produce un valor mínimo de la función objetivo f , y los parámetros mecánicos \mathbf{x}^* son los correspondientes a la solución de (C) para ese parámetro. Utilizando una notación esquemática esto se puede escribir como

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha \in S_\alpha} (\arg \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \alpha)), \quad \mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x}} (f(\mathbf{x}, \alpha^*)). \quad (18)$$

Aunque la TDF provee un vector de coeficientes con tantas entradas como valores medidos se tienen, para la evaluación de la función objetivo, vamos a utilizar un determinado número de coeficientes, asociado con los primeros armónicos de la frecuencia fundamental de la señal.

4. RESULTADOS

Con el objetivo de validar la implementación del método resolvemos un ejemplo con datos generados artificialmente. Luego se aplica el método a datos generados artificialmente utilizando el modelo DMW y finalmente se realiza la caracterización usando valores obtenidos experimentalmente. Para la resolución de los problemas inversos se aplica la función SQP del paquete de optimización de la herramienta numérica libre GNU-Octave.

Medida de Error El error relativo se obtiene utilizando la norma L_2 para medir la diferencia entre la función de deformación dada por el modelo ε y la deformación solución $\tilde{\varepsilon}$. La expresión del error está dada por:

$$\text{Error}_\varepsilon = \frac{\|\varepsilon - \tilde{\varepsilon}\|_{L_2}}{\|\tilde{\varepsilon}\|_{L_2}} = \frac{\sqrt{\int_0^T |\varepsilon(t) - \tilde{\varepsilon}(t)|^2 dt}}{\sqrt{\int_0^T |\tilde{\varepsilon}(t)|^2 dt}}. \quad (19)$$

4.1. Ejemplo 1 - Datos Artificiales SELF

En este ejemplo se aplica el método de caracterización a datos generados artificialmente utilizando el modelo SELF. El objetivo es comprobar que la implementación del método de caracterización obtiene los parámetros mecánicos utilizados para generar los datos, incluso en presencia de ruido de bajo nivel.

Los datos son producidos utilizando el modelo SELF con parámetros mecánicos conocidos, sin ruido (conjunto de datos 1) y con un ruido aleatorio de nivel 2% (conjunto de datos 2). Los valores de deformación se producen utilizando la siguiente ecuación:

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon_{0c} + \sum_{i=1}^2 \varepsilon_{ic} \cos(\lambda_i t) + \varepsilon_{is} \sin(\lambda_i t) \quad (20)$$

donde las frecuencias son $\lambda_i = 2\pi \frac{6}{5} i$ rad/seg, y las amplitudes $\varepsilon_{0c} = 0.15$, $\varepsilon_{1c} = 0.075$, $\varepsilon_{1s} = 0.025$, $\varepsilon_{2c} = 0.3\varepsilon_{1c}$ y $\varepsilon_{2s} = 0.3\varepsilon_{1s}$. Los valores de $\tilde{\sigma}$ se calculan utilizando el modelo SELF, con los siguientes parámetros mecánicos $E = 1000$ Pa, $\tau_\varepsilon = 0.1$ s $^\alpha$, $\tau_\sigma = 0.01$ s $^\alpha$ y $\alpha = 0.64$ ($\varepsilon_0 = 0$). La adición de ruido a los datos se realiza utilizando un procedimiento similar al usado en [Lewandowski y Chorążyczewski \(2010\)](#) a través de la siguiente expresión

$$\hat{\varepsilon}(t) = \tilde{\varepsilon}(t) + v(t)\xi\sqrt{\text{var}(\tilde{\varepsilon})} \quad \hat{\sigma}(t) = \tilde{\sigma}(t) + w(t)\xi\sqrt{\text{var}(\tilde{\sigma})} \quad (21)$$

donde $v(t)$ y $w(t)$ son valores aleatorios con una distribución normal estándar y ξ es el nivel de ruido.

El método de caracterización se aplica para cada valor de α en el conjunto S_α asociado al intervalo $I_\alpha = [0.2, 1]$ con un paso $\Delta\alpha = 0.005$. En la Figura 3 podemos ver el valor óptimo de la función objetivo (*fitness*) obtenido para cada valor de α para ambas series de datos, con y sin ruido. Los resultados numéricos obtenidos se presentan en la Tabla 1. Podemos

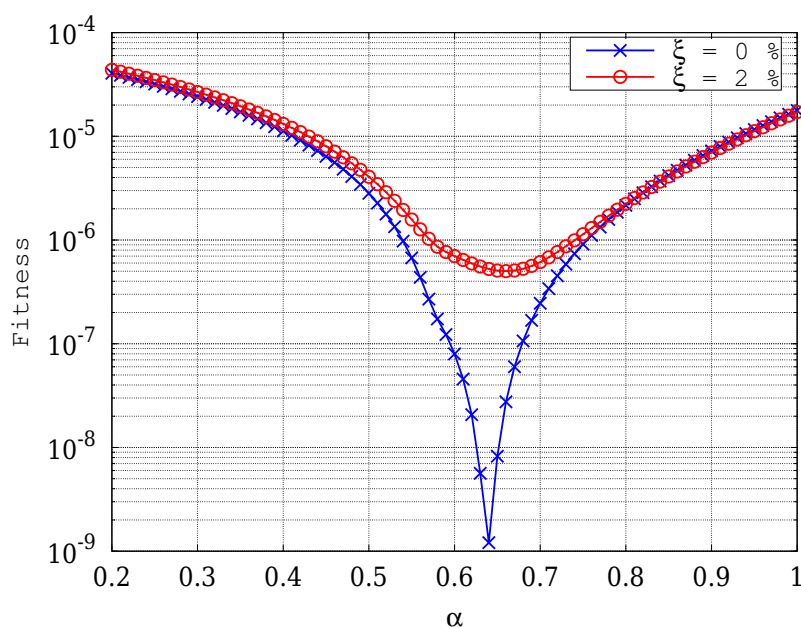


Figura 3: Gráfico de función objetivo óptimo del Ejemplo 1.

ver que la implementación del método es correcta ya que los valores obtenidos al utilizar los

datos sin ruido, tienen una precisión adecuada. Por otra parte, vemos que al adicionar ruido el método sigue siendo capaz de caracterizar bien el parámetro fraccional. El error del parámetro

Tabla 1: Resultados Ejemplo 1

Parámetro	Solución	Datos 1	Datos 2
$\varepsilon_0 (10^{-4})$	0	0.1613	$[-17.83, 1.6]$
E (Pa)	1000.00	1000.03	$[988.038, 1000.78]$
τ_ε (s^α)	0.10	0.09984	$[0.0992, 0.1049]$
τ_σ (s^α)	0.01	0.00989	$[0.005, 0.013]$
α	0.64	0.64	$[0.62, 0.65]$
f objetivo (10^{-9})	-	1.21	$[208.69, 433.51]$
Error $_\varepsilon$ (10^{-4})	-	2.804	$[74.79, 76.07]$

fraccional en los datos sin ruido viene dada por la precisión utilizado en la búsqueda, en este caso es 0.005 que representa un error por debajo de 0.7%. Es importante señalar también que la deformación de referencia ε_0 obtenida por el método se puede despreciar respecto a los valores de deformación de la señal.

Dado que los datos con ruido son generados de forma aleatoria, en la tabla se presenta el intervalo de valores obtenidos al resolver cinco veces el problema. Para todos los parámetros, exceptuando el τ_σ , el error es del orden del ruido introducido. En el parámetro τ_σ se observa un intervalo mayor, lo que es coherente con resultados presentados en [Valdez-Jasso et al. \(2009\)](#).

En la Figura 4 a la izquierda podemos ver la histéresis obtenida utilizando la deformación dada por el modelo con los parámetros mecánicos óptimos (cruces) y la histéresis producida con los datos de la solución (círculos). En la misma figura a la derecha podemos ver las histéresis respectivas obtenidas al utilizar los datos con ruido.

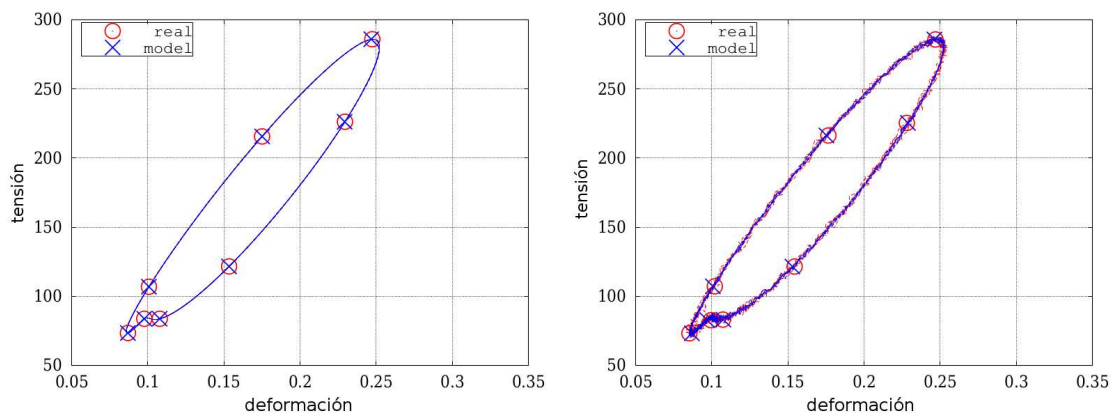


Figura 4: Ejemplo 1: Izquierda resultados de histéresis de datos sin ruido, Derecha resultados para los datos con ruido

4.2. Ejemplo 2 - Datos artificiales DMW

En este ejemplo, el método se aplica a datos de tensión y deformación generados artificialmente mediante un modelo DMW, y la caracterización se realiza utilizando el modelo presentado SELF. El objetivo de este ejemplo es probar la capacidad del modelo SELF para representar

el comportamiento de los modelos viscoelásticas compuestas por varios resortes y amortiguadores.

Como una primera aproximación a la modelización de los tejidos vivos, en este ejemplo, los valores de los parámetros mecánicos que se consideran son los valores medios obtenidos en literatura reciente para modelar el comportamiento de tejido porcino con un modelo DMW Wang et al. (2013). El primer conjunto de datos se generará utilizando los parámetros obtenidos para modelar el comportamiento de una muestra de bazo porcino. Los valores son $E_0 = 1.22$ kPa, $E_1 = 1.03$ kPa, $\eta_1 = 2.44$ kPa s, $E_2 = 0.66$ kPa y $\eta_2 = 38.22$ kPa s. El segundo conjunto de datos corresponde a hígado porcino y los parámetros son $E_0 = 3,53$ kPa, $E_1 = 7,74$ kPa, $\eta_1 = 21.81$ kPa s, $E_2 = 5.62$ kPa y $\eta_2 = 410.81$ kPa s. En ambos casos $\varepsilon_0 = 0$.

Aunque la deformación solución se genera utilizando el mismo procedimiento que en el Ejemplo 1, en este caso, las amplitudes de la tercera frecuencia son $\varepsilon_{3c} = 0.1\varepsilon_{1c}$ y $\varepsilon_{3s} = 0.1\varepsilon_{1s}$, con $\lambda_3 = 1.82\pi 3$. Además, vamos a considerar un factor de 10^{-3} para las amplitudes de tensión, así como para las frecuencias y la frecuencia de muestreo. Estos datos de deformación y el modelo DMW proporcionan valores de tensión en el mismo orden de los obtenidos en los procedimientos experimentales realizados en Wang et al. (2013).

Con el fin de comparar los resultados obtenidos para el modelo SELF usando el *spring-pot* y el elemento de HOSP, llevamos a cabo la caracterización teniendo en cuenta el parámetro fraccional en los intervalos $I_\alpha^1 = [0, 1]$ y $I_\alpha^2 = [0, 2]$. Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 2. Podemos ver que para ambos conjuntos de datos, el uso del elemento de HOSP reduce

Tabla 2: Resultados ejemplo 2

Parámetro	Datos 1 - I_α^1	Datos 1 - I_α^2	Datos 2 - I_α^1	Datos 2 - I_α^2
ε_0 (10^{-6})	2.18	6.66	9.97	24.48
E (Pa)	1,238	1,277	3,780	4,218
τ_ε (s^α)	90.73	121.53	183.71	229.15
τ_σ (s^α)	57.25	80.58	70.99	101.63
α	1	1.0775	1	1.0865
f objetivo (10^{-7})	14.96	2.48	44.78	8.61
Error (10^{-4})	17.061	7.62	29.91	14.64

el error en un 50%. Sin embargo remarcamos que no es tarea sencilla poder relacionar estos parámetros mecánicos con los parámetros mecánicos usados para generar los valores de tensión artificiales.

En la Figura 5 podemos ver los valores óptimos de la función objetivo obtenidos para los valores de α en el intervalo $[0.3, 1.6]$ con $\Delta = 0.0025$ para ambas series de datos, donde los valores rojos (círculos) representan la función objetivo obtenida para los datos utilizando los parámetros correspondientes a hígado porcino, y el azul (cruces) los parámetros de bazo porcino. Se puede apreciar que el uso del elemento HOSP, proporciona un mejor ajuste, es decir, un menor valor de la función objetivo para ambas series de datos DMW. Dado que en Wang et al. (2013) se concluye que los modelos DMW son apropiados para el modelado del comportamiento de los tejidos, se concluye entonces que los modelos SELF incluyendo el elemento HOSP pueden ser adecuados también.

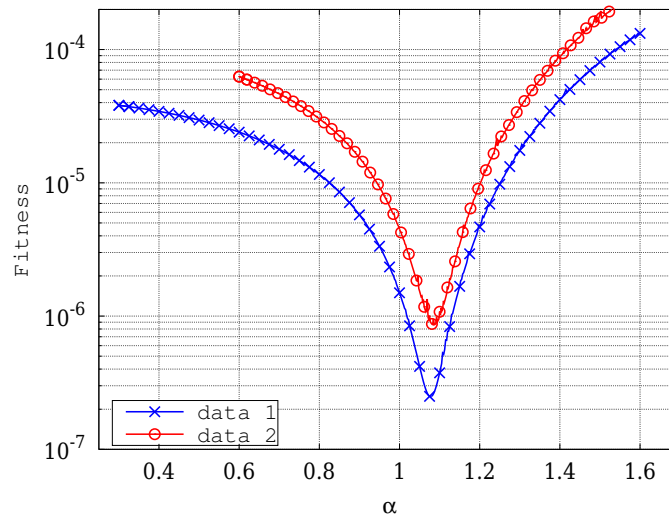


Figura 5: Ejemplo 2 resultados funcional óptimo

4.3. Ejemplo 3 - Datos experimentales

Dado que nuestro interés se centra en el modelado del comportamiento arterial, en este ejemplo vamos a realizar la caracterización utilizando datos experimentales obtenidos a partir ensayos realizados a un segmento arterial.

Los datos experimentales utilizados en este ejemplo forman parte de los datos obtenidos en Valdez-Jasso et al. (2009), a partir de mediciones de presión y radio promedio de una aorta ascendente de una oveja saludable. Teniendo en cuenta que para el vaso estudiado, aquí se puede suponer $h/r \approx 0.1$, donde h es el espesor y el r es el radio medio de la arteria, se puede utilizar un modelo similar al usado en Valdez-Jasso et al. (2009) y calcular la tensión y deformación tangencial según las expresiones para tubos de paredes delgadas

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{pr}{h}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{r - r_0}{r_0}, \quad (22)$$

donde p es la presión interna y r el radio medio. Las componentes radial y axial de la tensión se desprecian según Fung (1981); Armentano et al. (1995). Los datos fueron obtenidos con una frecuencia de muestreo 200 Hz y se convierte a valores de deformación y tensión teniendo en cuenta el radio de referencia $r_0 = 9.66$ mm. La presión se expresa en milímetros de mercurio.

La caracterización se realizó por $I_\alpha = [0, 1]$ y $I_\alpha = [0, 2]$, y el paso para α se consideró $\Delta\alpha = 0.001$. Los resultados se presentan en la Tabla 3. Es importante resaltar que estos parámetros mecánicos fueron obtenidos al utilizar datos con una cierta frecuencia fundamental, al utilizar otra frecuencia los mismos pueden variar. Podemos destacar que, al igual que en el ejemplo anterior, el uso del elemento HOSP ($I_\alpha = [0, 2]$) reduce el error en un 50%. En la Figura 6 a la izquierda podemos ver la histéresis obtenida en el óptimo con $I_\alpha = [0, 1]$, en donde los datos experimentales son de color rojo (círculos) y los datos del modelo son de color azul (cruces). A la derecha se muestran los resultados para $I_\alpha = [0, 2]$, donde se demuestra la mejora en el ajuste.

En la Figura 7 podemos ver la gráfica de valores óptimos de función objetivo para todo α en el intervalo $[0.5, 1.9]$.

Tabla 3: Resultados ejemplo 3

Variable	$I_\alpha = [0, 1]$	$I_\alpha = [0, 2]$
E (mmHg)	5812.58	7785.56
ε_0	-0.053	-0.0019
τ_ε	0.0327791	0.00763564
τ_σ	0.00697166	0.00284591
α	1.0	1.644
Error (%)	5.394	2.747
f objetivo (10^{-4})	13.369	1.5255

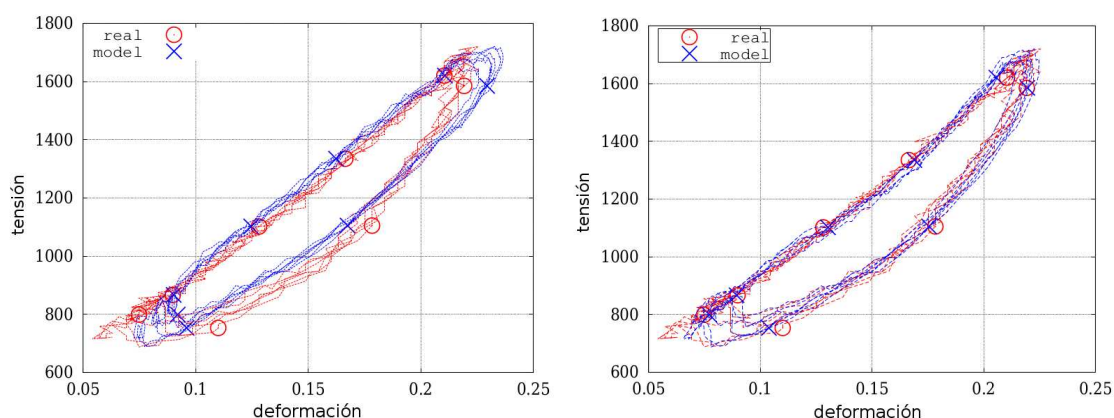


Figura 6: Ejemplo 3: Izquierda histéresis experimental y numérica para $I_\alpha = [0, 1]$, Derecha resultados para $I_\alpha = [0, 2]$

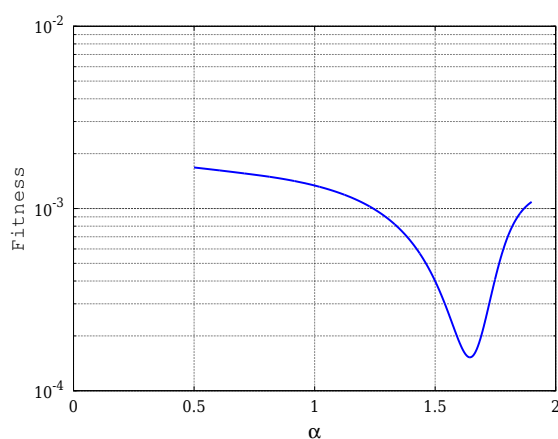


Figura 7: Ejemplo 3 valores óptimos función objetivo

5. CONCLUSIONES

En este trabajo fue presentado un elemento viscoelástico fraccional de orden superior llamado HOSP, el cual se incluyó en un modelo viscoelástico clásico. Luego, un método de caracterización de parámetros mecánicos del FVM fue descrito, implementado y validado usando GNU-Octave. El método fue aplicado a datos generados usando un modelo DMW y se mostró

que el uso del HOSP provee al modelo SELF una mejor capacidad para simular comportamientos complejos del tipo del DMW.

El método se aplicó a los datos experimentales de una pared arterial ovina. Los resultados obtenidos para $I_\alpha = [0, 1]$ son coherentes con los presentados en Valdez-Jasso et al. (2009), confirmando nuevamente que el método de caracterización está funcionando correctamente. Cuando fue utilizado el intervalo $I_\alpha = [0, 2]$, se vio que el parámetro fraccional óptimo es mayor que uno y que se mejora significativamente la precisión del ajuste. Dado que en la literatura el parámetro fraccional pertenece a $[0, 1]$, no se conoce una interpretación física clara para un parámetro fraccional superior a 1. Sin embargo, incluso si no hay interpretación física, se obtiene un mejor ajuste, lo que significa que se mejora la simulación del comportamiento de la pared arterial. Este resultado refuerza la importancia de los modelos viscoelásticos fraccionales. Mediante el uso de HOSPs podemos ajustar con gran precisión el comportamiento complejo de diversos materiales.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer el apoyo financiero de la Agencia Nacional de investigación e Innovación (ANII) a través del proyecto en ejecución FMV-3-2011-1-6125, y a la Comisión Sectorial de investigación Científica (CSIC).

REFERENCIAS

- Allam M. y Zenkour A. Bending response of a fiber-reinforced viscoelastic arched bridge model. *Applied Mathematical Modelling*, 27(3):233–248, 2003. ISSN 0307904X. doi:10.1016/S0307-904X(02)00123-3.
- Armentano R.L., Barra J., y Levenson J. Arterial Wall Mechanics in Conscious Dogs Assessment of Viscous, Inertial, and Elastic Moduli to Characterize Aortic Wall Behavior. *Circulation Research*, 76(3):468–478, 1995. doi:10.1161/01.RES.76.3.468.
- Craiem D. y Armentano R.L. A fractional derivative model to describe arterial viscoelasticity. *Biorheology*, 44(4):251–263, 2007. ISSN 0006-355X.
- Craiem D., Rojo F.J., Atienza J.M., Armentano R.L., y Guinea G.V. Fractional-order viscoelasticity applied to describe uniaxial stress relaxation of human arteries. *Physics in medicine and biology*, 53(17):4543–54, 2008. ISSN 0031-9155. doi:10.1088/0031-9155/53/17/006.
- Fung Y.C. *Biomechanics, Mechanical Properties of Living Tissues*. Springer New York, New York, NY, 1981. ISBN 978-1-4757-1754-9. doi:10.1007/978-1-4757-1752-5.
- Lakes R. *Viscoelastic Materials*. Cambridge University Press, 1 edición, 2009. ISBN 9780521885683.
- Lewandowski R. y Chorążyczewski B. Identification of the parameters of the Kelvin–Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers. *Computers & Structures*, 88(1-2):1–17, 2010. ISSN 00457949. doi:10.1016/j.compstruc.2009.09.001.
- Marques S.P.C. y Creus G.J. *Computational viscoelasticity*. Springer Heidelberg, 2012. ISBN 9783642253102.
- Naghavi M., Libby P., Falk E., Casscells S.W., Litovsky S., Rumberger J., Badimon J.J., Stefanadis C., Moreno P., Pasterkamp G., Fayad Z., Stone P.H., Waxman S., Raggi P., Madjid M., Zarrabi A., Burke A., Yuan C., Fitzgerald P.J., Siscovick D.S., de Korte C.L., Aikawa M., Juhani Airaksinen K.E., Assmann G., Becker C.R., Chesebro J.H., Farb A., Galis Z.S., Jackson C., Jang I.K., Koenig W., Lodder R.a., March K., Demirovic J., Navab M., Priori S.G., Rekhter M.D., Bahr R., Grundy S.M., Mehran R., Colombo A., Boerwinkle E., Ba-

- llantyne C., Insull W., Schwartz R.S., Vogel R., Serruys P.W., Hansson G.K., Faxon D.P., Kaul S., Drexler H., Greenland P., Muller J.E., Virmani R., Ridker P.M., Zipes D.P., Shah P.K., y Willerson J.T. From vulnerable plaque to vulnerable patient: a call for new definitions and risk assessment strategies: Part I. *Circulation*, 108(14):1664–72, 2003. ISSN 1524-4539. doi:10.1161/01.CIR.0000087480.94275.97.
- Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, 1 edición, 1999.
- Then C., Vogl T.J., y Silber G. Method for characterizing viscoelasticity of human gluteal tissue. *Journal of Biomechanics*, 45(7):1252–8, 2012. ISSN 1873-2380. doi:10.1016/j.jbiomech.2012.01.037.
- Valdez-Jasso D., Haider M.A., Banks H.T., Bia Santana D., Zócalo Germán Y., Armentano R.L., y Olufsen M.S. Analysis of viscoelastic wall properties in ovine arteries. *IEEE transactions on biomedical engineering*, 56(2):210–9, 2009. ISSN 1558-2531. doi:10.1109/TBME.2008.2003093.
- Wang X., Schoen J.A., y Rentschler M.E. A quantitative comparison of soft tissue compressive viscoelastic model accuracy. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 20:126–36, 2013. ISSN 1878-0180. doi:10.1016/j.jmbbm.2013.01.007.
- Zhang M., Nigwekar P., Castaneda B., Hoyt K., Joseph J.V., di Sant' Agnese A., Messing E.M., Strang J.G., Rubens D.J., y Parker K.J. Quantitative characterization of viscoelastic properties of human prostate correlated with histology. *Ultrasound in medicine & biology*, 34(7):1033–42, 2008. ISSN 0301-5629. doi:10.1016/j.ultrasmedbio.2007.11.024.