Asociación Argentina de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXXIII, págs. 3415-3421 (artículo completo)
Graciela Bertolino, Mariano Cantero, Mario Storti y Federico Teruel (Eds.)
San Carlos de Bariloche, 23-26 Setiembre 2014

SOLUCIÓN EXPLÍCITA EN EL PROBLEMA DE CAMBIO DE FASE CON ZONA PASTOSA CON UNA CONDICIÓN CONVECTIVA EN EL BORDE FIJO

Domingo A. Tarzia

Departamento de Matemática - CONICET, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina, DTarzia@austral.edu.ar

Palabras Clave: Cambio de fase, Problema de Lamé-Clapeyron-Stefan, Condición convectiva, Zona pastosa, Modelo de Solomon-Wilson-Alexiades.

Resumen. Se utiliza una condición convectiva, en el borde fijo de un material semi-infinito, en el modelo de región pastosa de Solomon-Wilson-Alexiades (Letters Heat Mass Transfer, 9 (1982), 319-324) a una fase para obtener soluciones explícitas en el correspondiente problema de cambio de fase. Se obtiene la condición necesaria y suficiente para la existencia de la solución explícita la cual está dada por una desigualdad que debe verificar el coeficiente de transferencia de calor en función de los datos del modelo. Más aún, dicho problema es equivalente al problema con condición de temperatura en el borde fijo obteniéndose para este caso una desigualdad para el coeficiente que caracteriza una de las fronteras libres.

1 INTRODUCCIÓN

Se considera un material semi-infinito que se encuentra inicialmente en la fase líquida a la temperatura de fusión 0 ºC (sin pérdida de generalidad). En el tiempo $t=0$ un flujo de calor saliente se impone en el borde fijo $x=0$ a través de una condición convectiva y la solidificación comienza, en la cual tres regiones distintas pueden ser distinguidas (por una descripción completa puede verse en (Solomon et al., 1982)):

H1) líquida a temperatura 0 ºC, ocupando la región $x>r(t), t>0$;

H2) sólida a temperatura $T(x,t)<0$, ocupando la región $0<x<s(t), t>0$ $(\text{con } s(t)<r(t))$;

H3) región pastosa (mushy region) a temperatura $T(x,t)=0$, ocupando la región $s(t)\le x\le r(t), t>0$. Se considera que la región pastosa es isotérmica sobre la cual se realizan dos hipótesis sobre su estructura:

H3i) el material contiene una fracción fija $\varepsilon\ell$ $(\text{con } 0<\varepsilon<1)$ del calor latente total ℓ, que se traduce en la siguiente condición sobre la frontera libre $x=s(t)$ dada por:

$$-kT_x(s(t),t)=\rho\ell[\varepsilon\dot{s}(t)+(1-\varepsilon)\dot{r}(t)], \quad t>0; \tag{1}$$

H3ii) su ancho es inversamente proporcional al gradiente de temperatura, es decir:

$$-T_x(s(t),t)(r(t)-s(t))=\gamma>0, \quad t>0\,(\text{con } \gamma>0). \tag{2}$$

Los problemas de cambio de fase son de una gran importancia en ciencia y tecnología (Alexiades y Solomon, 1993; Carslaw y Jaeger, 1959; Crank, 1984; Gupta, 2003; Lunardini, 1991). Una colección de soluciones explícitas a numerosos problemas de frontera libre con procesos de transferencia de calor y/o difusión de masa se han presentado recientemente en (Tarzia, 2011).

Siguiendo la metodología utilizada en (Solomon et. al., 1982; Tarzia, 1987) se impondrá una condición convectiva, en el borde fijo de un material semi-infinito, para obtener una solución explícita en el correspondiente problema de cambio de fase. Se obtiene la condición necesaria y suficiente para la existencia de la solución explícita la cual está dada por una desigualdad que debe verificar el coeficiente de transferencia de calor en función de los datos del modelo. Más aún, dicho problema es equivalente al problema con condición de temperatura en el borde fijo obteniéndose para este caso una desigualdad para el coeficiente que caracteriza una de las fronteras libres.

2 SOLUCIÓN EXPLÍCITA CON CONDICIÓN CONVECTIVA

El problema consiste en encontrar las fronteras libres $x=s(t)$ y $x=r(t)$, y la temperatura $T=T(x,t)$ de manera que se satisfagan las siguientes condiciones (Problema (P_1)):

$$\rho c T_t - kT_{xx}=0, \quad 0<x<s(t), \quad t>0\,(\alpha=k/\rho c) \tag{3}$$

$$T(s(t),t)=0, \quad t>0 \tag{4}$$

$$-kT_x(s(t),t) = \rho\ell[\varepsilon\dot{s}(t) + (1-\varepsilon)\dot{r}(t)], \quad t>0 \tag{5}$$

$$-T_x(s(t),t)(r(t)-s(t)) = \gamma > 0, \quad t>0 \,(\text{con } \gamma > 0) \tag{6}$$

$$s(0) = r(0) = 0 \tag{7}$$

$$kT_x(0,t) = \frac{h_0}{\sqrt{t}}\left(T(0,t) + D_\infty\right), \quad t>0 \quad (\text{with } h_0 > 0, D_\infty > 0)\,. \tag{8}$$

La condición (8) representa el flujo de calor saliente dado por una condición convectiva sobre el borde fijo $x=0$. El coeficiente de transferencia de calor son inversamente proporcional a la raíz cuadrada del tiempo (Tarzia, 1981; Tarzia, 2004; Zubair y Chaudhry, 1994).

Teorema 1.

Si el coeficiente h_0 satisface la desigualdad

$$h_0 > \frac{1}{D_\infty}\sqrt{\frac{\gamma(1-\varepsilon)\rho\ell k}{2}} \tag{9}$$

entonces la solución del problema (3)-(8) está dada por:

$$T(x,t) = -\frac{\frac{h_0 D_\infty\sqrt{\pi\alpha}}{k}erf(\xi)}{1+\frac{h_0\sqrt{\pi\alpha}}{k}erf(\xi)}\left[1-\frac{erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)}{erf(\xi)}\right], \quad 0<x<s(t),\ t>0\,, \tag{10}$$

$$s(t) = 2\xi\sqrt{\alpha t}, \quad t>0\,, \tag{11}$$

$$r(t) = 2\mu\sqrt{\alpha t}, \quad t>0\,, \tag{12}$$

$$\mu = \xi + \frac{\gamma k}{2D_\infty h_0\sqrt{\alpha}}\mathrm{e}^{\xi^2}\left[1+\frac{h_0\sqrt{\pi\alpha}}{k}erf(\xi)\right], \tag{13}$$

donde el coeficiente ξ está dado como la única solución de la ecuación:

$$\frac{D_\infty c}{\ell\sqrt{\alpha}}F_3(\xi) = G(\xi), \quad \xi>0\,, \tag{14}$$

con

$$F_3(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\frac{k}{h_0\sqrt{\pi\alpha}} + erf(x)}, \quad G(x) = x + \frac{\gamma(1-\varepsilon)\sqrt{\pi}}{2D_\infty}\frac{1}{F_3(x)}, \quad x > 0. \tag{15}$$

Demostración.

Teniendo en cuenta que $erf\left(x/2\sqrt{\alpha t}\right)$ es solución de la ecuación del calor (3) (Carslaw y Jaeger, 1959) se propone como solución del problema a la siguiente expresión:

$$T(x,t) = C_1 + C_2\, erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right), \quad 0 < x < s(t),\ t > 0, \tag{16}$$

con los dos coeficientes C_1 y C_2 a ser determinados. De la condición (4) se deduce la expresión (11) para la frontera libre $s(t)$, con el coeficiente ξ a determinar. De las condiciones (4) y (8) se deducen las expresiones de los dos coeficientes:

$$C_1 = -\frac{\frac{h_0\sqrt{\pi\alpha}}{k}D_\infty erf(\xi)}{1 + \frac{h_0\sqrt{\pi\alpha}}{k}erf(\xi)}, \quad C_2 = \frac{h_0 D_\infty\sqrt{\pi\alpha}}{k}\frac{1}{1 + \frac{h_0\sqrt{\pi\alpha}}{k}erf(\xi)}. \tag{17}$$

De la condición (6) se deducen la expresión (13) para μ y la expresión (12) para la interfase $r(t)$. De la condición (5) y teniendo en cuenta (17) se deduce la ecuación (14) para el coeficiente ξ. Teniendo en cuenta las propiedades de las funciones reales F_3 y G se deduce que la ecuación (16) tiene una única solución cuando el coeficiente coeficiente h_0 satisface la desigualdad (9). □

3 EQUIVALENCIA ENTRE LOS MODELOS DE ZONA PASTOSA CON CONDICIÓN CONVECTIVA Y TEMPERATURA EN EL BORDE FIJO

Si se considera la condición de temperatura en el borde fijo:

$$T(0,t) = -D_0 < 0, \quad t > 0 \tag{18}$$

entonces la solución del problema dado por las ecuaciones y condiciones (3) – (7) y (18) (Problema (P_2)) está dada en (Solomon et al., 1982). Se tiene la siguiente propiedad:

Teorema 2.

Si el coeficiente h_0 satisface la desigualdad (9) entonces el Problema (P_1), definido por las ecuaciones y condiciones (3)-(8) es equivalente al Problema (P_2), definido por las ecuaciones y condiciones (3)-(7) y (18).

Demostración.

Si el coeficiente h_0 satisface la desigualdad (9) entonces la solución del Problema (P_1) está dado por (10) – (13). Teniendo en cuenta que:

$$T(0,t) = -\frac{\frac{h_0\sqrt{\pi\alpha}}{k} D_\infty erf(\xi)}{1+\frac{h_0\sqrt{\pi\alpha}}{k} erf(\xi)} = -\frac{D_\infty erf(\xi)}{\frac{k}{h_0\sqrt{\pi\alpha}} + erf(\xi)} < 0\,, \quad t>0 \tag{19}$$

entonces se puede definir el Problema (P_2) con el dato de temperatura (18) siguiente:

$$D_0 = \frac{D_\infty erf(\xi)}{\frac{k}{h_0\sqrt{\pi\alpha}} + erf(\xi)} > 0 \tag{20}$$

Utilizando el dato D_0, dado por (20) en el Problema (P_2), se puede demostrar que la soluciones de los Problemas (P_1) y (P_2) coinciden y por ende los dos problemas son equivalentes. □

Corolario 3.
Si el coeficiente h_0 satisface la desigualdad (9) entonces el coeficiente ξ de la frontera libre del Problema (P_2) satisface la siguiente desigualdad:

$$erf(\xi) < \frac{D_\infty D_0}{D_\infty - D_0}\sqrt{\frac{2c}{\pi\gamma(1-\varepsilon)\ell}}\,. \tag{21}$$

NOMENCLATURA

$-D_0(<0)$: temperatura en el borde fijo $x=0$,
$-D_\infty(<0)$: temperatura externa al borde fijo $x=0$,
$c>0$: calor específico,
$h_0>0$: coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo $x=0$.
$k>0$: conductividad térmica,
$\ell>0$: calor latente por unidad de masa,
$q_0>0$: coeficiente que caracteriza el flujo de calor en el borde fijo $x=0$,
$r=r(t)\ (>s(t))$: interfase líquida-zona pastosa,
$s=s(t)>0$: interfase sólida-zona pastosa,
T: temperatura de la fase sólida,
t: variable temporal,
x: variable espacial,

Letras griegas:

$\alpha = \dfrac{k}{\rho c}$: difusividad térmica,
$\gamma > 0$: uno de los dos coeficientes que caracterizan la zona pastosza,
$\varepsilon \in (0,1)$: uno de los dos coeficientes que caracterizan la zona pastosa,
$\mu\ (> \xi)$: coeficiente que caracteriza la interfase $r(t)$,
ρ : densidad de masa,
$\xi > 0$: coeficiente que caracteriza la interfase $s(t)$.

CONCLUSIONES

Para el modelo de región pastosa de Solomon et al. (1982), con una condición convectiva en el borde fijo de un material semi-infinito, se obtiene un cambio de fase instantáneo si y sólo si el coeficiente de transferencia de calor es suficientemente grande. Más aún, cuando dicha desigualdad se satisface se demuestra que los problemas con condición de temperatura y convectivo en el borde fijo son equivalentes.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por PIP Nº 0534 de CONICET-UA, Rosario, Argentina y AFOSR-SOARD Grant FA9550-14-1-0122.

REFERENCES

Alexiades V. y Solomon A.D. (1993), *Mathematical modeling of melting and freezing processes*, Hemisphere Publ. Corporation, Washington.
Carslaw H.S. y Jaeger J.C. (1959), *Conduction of heat in solids*, Oxford University Press, London.
Crank J. (1984), *Free and moving boundary problems*, Clarendon Press, Oxford.
Gupta S.C. (2003), *The classical Stefan problem. Basic concepts, modelling and analysis*, Elsevier, Amsterdam.
Lunardini V.J. (1991), *Heat transfer with freezing and thawing*, Elsevier, Amsterdam.
Solomon A.D., Wilson D.G. y Alexiades V. (1982), A mushy zone model with an exact solution, *Letters in Heat and Mass Transfer* 9, 319-324.
Tarzia D.A. (1981-82), An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem, *Quarterly of Applied Mathematics* 39, 491-497.
Tarzia D.A. (1987), Determination of unknown thermal coefficients of a semi-infinite material for the one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem through the Solomon-Wilson-Alexiades mushy zone model, *International Communications in Heat and Mass Transfer* 14, 219-228.
Tarzia D.A. (2004), An explicit solution for a two-phase unidimensional Stefan problem with a convective boundary condition at the fixed face, *MAT – Serie A* 8, 21-27.

Tarzia D.A. (2011), Explicit and Approximated Solutions for Heat and Mass Transfer Problems with a Moving Interface, Chapter 20, pp. 439-484, In *Advanced Topics in Mass Transfer*, Mohamed El-Amin (Ed.), InTech Open Access Publisher, Rijeka. Available from: http://www.intechopen.com/articles/show/title/explicit-and-approximated-solutions-for-heat-and-mass-transfer-problems-with-a-moving-interface

Zubair S.M. y Chaudhry M.A. (1994), Exact solutions of solid-liquid phase-change heat transfer when subjected to convective boundary conditions, *Wärme und Stoffübertragung (Heat and Mass Transfer)* 30, 77-81.