

RESPUESTA DINÁMICA NO LINEAL DE SISTEMAS DE COMPORTAMIENTO POSCRÍTICO INESTABLE DE DOS GRADOS DE LIBERTAD SOMETIDOS A CARGAS IMPULSIVAS

Mariano P. Ameijeiras^a y Luis A. Godoy^b

^a *Universidad Nacional de Córdoba, FCEFyN, Córdoba, Argentina, m.ameijeiras@unc.edu.com*

^b *Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT UNC-CONICET) y FCEFyN, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, luis.godoy@gmail.com*

Palabras clave: Vibraciones, Dinámica de las estructuras, Estabilidad elástica, Estabilidad del equilibrio, Estabilidad dinámica

Resumen. En los últimos años, los problemas debidos a acciones impulsivas actuando sobre sistemas de comportamiento poscrítico inestable atrajo la atención de investigadores debido a accidentes ocurridos en tanques de almacenamiento de petróleo sometidos a ondas provenientes de explosiones. Los criterios de determinación de carga crítica dinámica en sistemas de bifurcación inestable sometidos al tipo de eventos en los cuales las acciones alternan sus valores en intervalos muy cortos de tiempo (como cargas sísmicas) o en caso de cargas de muy corta duración (del orden de milisegundos) debidas a explosiones externas no han sido aún establecidos. Un análisis del estado del arte muestra trabajos con soluciones para carga tipo escalón (por ejemplo, criterios de Budiansky-Roth, Hoff-Hsu y Simitzes); sin embargo surgen problemas en la identificación de cargas de pandeo dinámico para los casos impulsivos. Este trabajo establece bases para avanzar sobre el problema de inestabilidad dinámica para sistemas de punto límite y bifurcación inestable. Para ese fin, se integran las ecuaciones no lineales de movimiento de un sistema de dos grados de libertad con comportamiento poscrítico similar al de una cáscara. Luego se determinan y analizan los resultados para distintas condiciones de carga cuyos resultados estáticos se comparan con publicaciones existentes. Con el criterio propuesto, se determina la inestabilidad dinámica del sistema bajo estudio. Finalmente se establecen conclusiones y se muestran ideas de desarrollos a futuro.

1 INTRODUCCIÓN

Durante la última década, ha habido un auge de interés en el estudio de efectos causados por explosiones sobre la infraestructura de plantas industriales, refinerías y granjas de almacenamiento de petróleo. Los tanques son un elemento clave de tales instalaciones y mostraron ser vulnerables a ondas debidas a explosiones. El foco de la explosión puede ser accidental o intencional, o puede ocurrir como parte de un efecto en cadena. [Taveau \(2011\)](#) reporta ejemplos de accidentes sobre tanques ocurridos en Francia y en otros países con el objetivo de explicar la secuencia de los eventos que iniciaron el accidente y mostrar sus consecuencias. Una descripción del efecto dominó se describe en [Salzano y Cozzania \(2003\)](#).

Como los tanques son cáscaras de pared delgada, los modos de falla ante cargas impulsivas suelen asociarse a problemas de inestabilidad. El pandeo de cáscaras sometidas a cargas dinámicas es un problema complejo que está aún bajo estudio. Muchos investigadores acuerdan en la necesidad de utilizar análisis de respuesta en el tiempo considerando la cinemática no lineal de la cáscara. En la década de 1960, [Budiansky y Roth \(1962\)](#) y [Budiansky \(1967\)](#) propusieron un criterio de pandeo dinámico que analiza la historia en el tiempo para varios niveles de carga: la inestabilidad dinámica se produce cuando un incremento pequeño de carga induce grandes cambios de desplazamiento. Este criterio fue empleado para caracterizar la respuesta de tanques de petróleo sometidos a la acción del viento para ráfagas de 3s, que se modelan con una carga del tipo escalón ([Flores y Godoy, 1998](#)). También se ha utilizado para predecir la inestabilidad de tanques bajo cargas sísmicas ([Virella et al., 2006](#)), entre muchos otros.

Un accidente emblemático fue el ocurrido en Buncefield, Inglaterra en 2005 ([Buncefield Major Incident Investigation Board, 2008](#)). [Atkinson \(2011\)](#) describe que los tanques de Buncefield se diseñaron para resistir presiones de viento de 0.6KPa , y con respecto a las explosiones aventura que "debido a que las presiones se elevan en un periodo de varias centenas de milisegundos, la respuesta estructural del tanque puede ser comprendida mediante un análisis cuasi-estático". Por el contrario, este trabajo demuestra que la respuesta frente a una carga impulsiva difiere significativamente de la respuesta tomada como cuasi-estática o aún como carga escalón, por lo que surge la necesidad de llevar a cabo estudios de dinámica no lineal bajo cargas impulsivas para representar efectos de explosiones. Pero en muchos casos el interés por modelar estructuras complejas tal como se las encuentra en la práctica profesional tiende a oscurecer la mecánica del comportamiento. Por ello interesa comprender la mecánica de esta clase de problemas en sistemas sencillos, como base para un tratamiento de sistemas complejos.

Este artículo analiza la respuesta estructural dinámica considerando cinemática no lineal de un sistema de dos grados de libertad con bifurcación inestable propio de la inestabilidad de cáscaras de pared delgada.

2 CRITERIOS DE ESTABILIDAD

Previo a definir criterios que impliquen la determinación de la estabilidad de un sistema en varios tipos y niveles de carga, se necesita razonar sobre el significado, dentro del marco de la ingeniería, de la estabilidad del equilibrio y cómo evaluarla.

Brevemente, se podría afirmar que cualquier cuantificación de la estabilidad de los estados de equilibrio depende de la naturaleza de la respuesta dinámica a una perturbación externa. Las estructuras en equilibrio estable poseen la propiedad que, sometidas a una perturbación externa, se caracterizan por una respuesta dinámica que eventualmente desaparece cuando la perturbación se remueve, mientras que las respuestas dinámicas de estados de equilibrio inestable no desaparecerán cuando se remueve la perturbación. En este sentido, las preguntas sobre estabilidad, pertenecen al ámbito de las vibraciones no lineales. Sin embargo,

simplificando este criterio a la evaluación de estabilidad frente a perturbaciones pequeñas, estaremos en condiciones de obtener medidas de estabilidad considerando solamente los movimientos dinámicos linealizados alrededor de una posición de equilibrio.

2.1 Criterio estático

Tal vez, el criterio mejor comprendido de estabilidad sea el que considera el sistema como estático, que aplica un desplazamiento pequeño alrededor de un estado de equilibrio como una forma de inferir una probable respuesta dinámica. Si las fuerzas que actúan sobre el sistema tienden a restaurar la posición original diremos que el sistema es estable, de otro modo será inestable.

El método puede presentarse en forma matricial del siguiente modo. Supongamos un sistema en el que actúan cargas externas de referencia, $\{R\}_r$, al que luego se lo analiza linealmente. Para las tensiones producidas por esa carga, la matriz geométrica es $[K_\sigma]_r$. Para otro nivel de cargas con un multiplicador λ cualquiera,

$$[K_\sigma] = \lambda [K_\sigma]_r \text{ cuando } \{R\} = \lambda \{R\}_r \quad (1)$$

Como se presume el problema lineal, la proporción de cambio de las cargas externas es la misma que los esfuerzos internos. Posteriormente se da una variación al desplazamiento desde una posición de referencia $\{D\}_r$. Como las cargas exteriores no cambian en el punto de bifurcación,

$$([K] + \lambda_{cr} [K_\sigma]_r) \{D\}_r = \lambda_{cr} \{R\}_r \quad (2)$$

$$([K] + \lambda_{cr} [K_\sigma]_r) \{D + \delta D\}_r = \lambda_{cr} \{R\}_r \quad (3)$$

De la diferencia entre (2) y (3),

$$([K] + \lambda_{cr} [K_\sigma]_r) \{\delta D\}_r = \{0\} \quad (4)$$

La ecuación (4) es un problema de autovalores cuya raíz mínima provee la carga de bifurcación (LBA, *linear buckling analysis*), siendo $\{R\}_{cr} = \lambda_{cr} \{R\}_r$ la carga crítica o de pandeo con λ_{cr} el autovalor mínimo.

Para el caso de pandeo no lineal, se determina a través de una matriz $[K_t]$, que incluye no sólo el efecto provocado por las tensiones previas al pandeo sino también el efecto relacionado al cambio de geometría.

Estos criterios tienen limitaciones en proveer información acerca del movimiento real y no son directamente aplicables a casos de cargas dinámicas.

2.2 Criterio dinámico

Muchas de las dificultades asociadas al criterio estático desaparecen si se consideran los desplazamientos como dinámicos. Con este criterio se podría graficar la respuesta en el tiempo de un grado de libertad generalizado frente a incrementos sucesivos de cargas como se ilustra en la [Figura 1](#). Luego se observa que al aumentar la carga, se reduce la frecuencia de oscilación y eventualmente esta oscilación tiende a cero. Sin amortiguamiento, la respuesta a este nivel de carga es crítica. Una trayectoria inestable no necesariamente implica un mínimo (curva B, [Figura 1](#)), por cuanto habrá que iterar hasta hallarlo (curva A, [Figura 1](#)). Este criterio, debido a [Budiansky y Roth \(1962\)](#), es ampliamente aceptado para cargas tipo escalón.

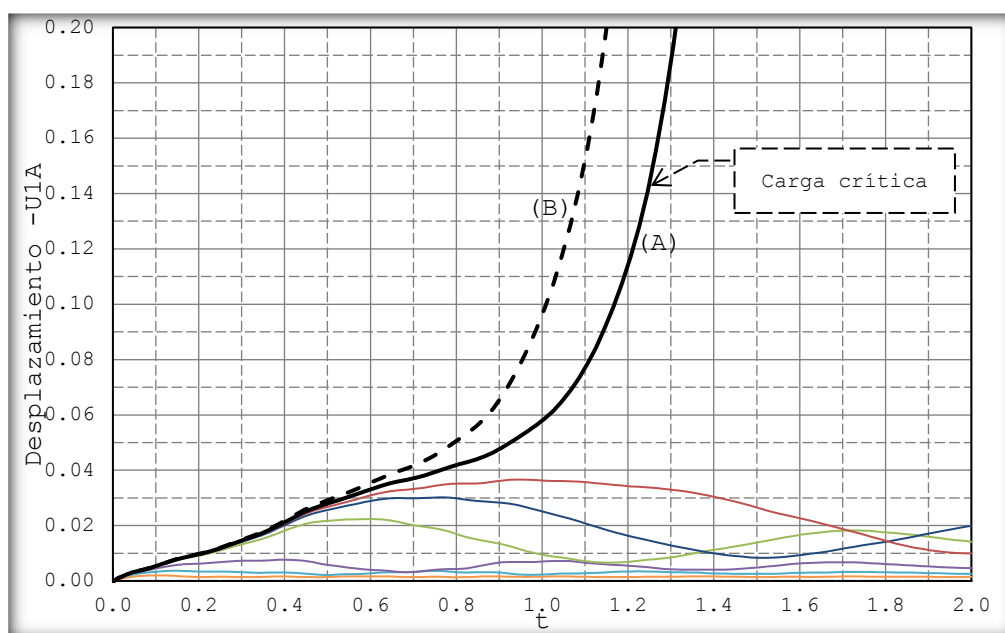


Figura 1: Análisis para carga escalón de un movimiento radial representativo de un tanque esbelto con distribución de presiones tipo explosivas (Ameijeiras y Godoy, 2013).

2.3 Criterio energético

Simitses (1990), propuso un criterio de energía potencial elástica que, bajo cargas tipo impulsivas, afirma que la carga crítica será aquella que lleve al sistema a poseer la misma cantidad de energía elástica acumulada que un análisis crítico estático. Un movimiento se define como crítico o inestable si pasa por o encierra puntos de equilibrio estático; esto es equivalente a afirmar que, en el caso de equilibrio estable, la energía potencial fuese un mínimo y de ese modo en las vecindades de ese estado, esta energía se incrementa. Este modo de identificar una carga crítica elimina complicaciones matemáticas, y facilita la vinculación entre la intuición y el sistema dinámico (Figura 2). Este criterio se utiliza además, para sistemas con varios grados de libertad, aunque “como una expresión de fe” más que como una realidad física. Este criterio ha sido estudiado por los autores (Figura 3), con la conclusión que movimientos por encima del equilibrio estático pueden resultar estables, situación que se intensifica en presencia de amortiguamiento. Para estos sistemas, la búsqueda de una condición crítica requiere de un mínimo o máximo absoluto en la expresión de energía potencial total (Croll y Walker, 1972). Este último se describe y utiliza en este trabajo.

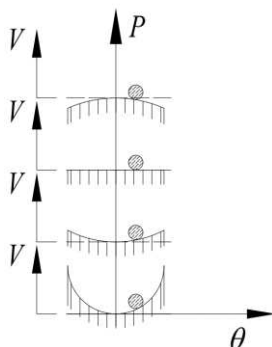


Figura 2: Estados estables, indiferente e inestable relacionados a una carga P , la energía potencial total V y una variable desplazamiento θ .

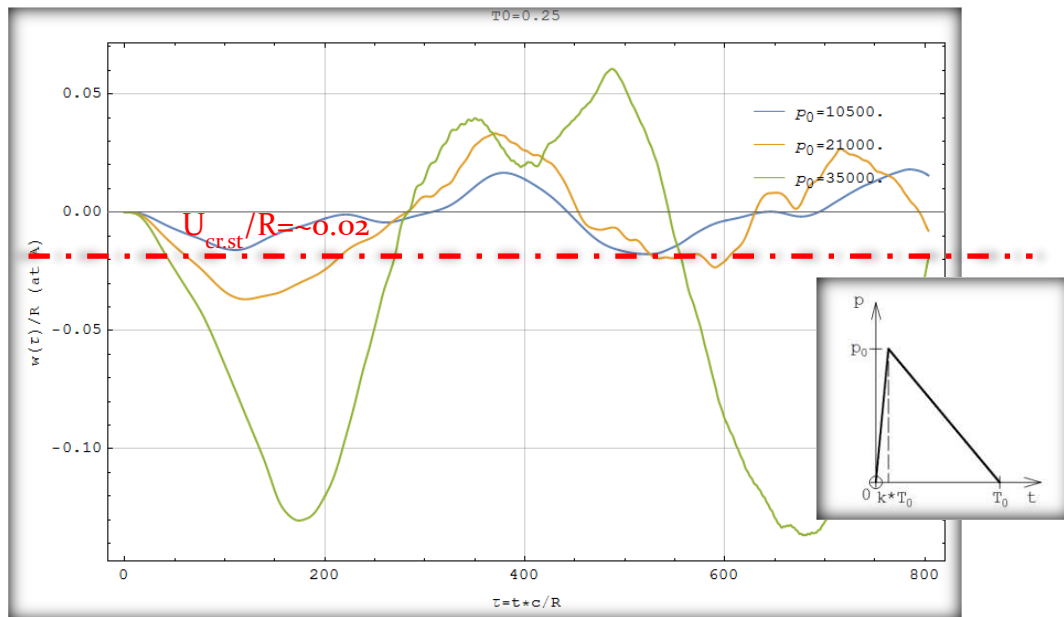


Figura 3: Análisis para carga impulsiva de un movimiento radial representativo de un tanque esbelto con distribución de presiones tipo explosivas de presiones tipo explosivas.

3 ESTUDIO DE CASO

Con el objetivo de considerar un sistema de comportamiento poscrítico del tipo de tanque de pared delgada sometido a explosiones externas y poder comparar al menos resultados estáticos bien establecidos, se analiza un modelo conservativo de dos grados de libertad de bifurcación inestable desarrollado en [Croll y Walker \(1972\)](#), al que se lo extiende considerando cinemática no lineal exacta, inercia en el sentido longitudinal y el agregado de análisis dinámicos con cargas del tipo escalón e impulsivas. El sistema considerado se ilustra en la [Figura 4](#) en donde α_0 y β_0 son ángulos en la configuración inicial, los grados de libertad considerados se designan por $\alpha(t)$ y $\beta(t)$, m representan las masas del sistema y K y C las constantes elásticas flexionales y membranales

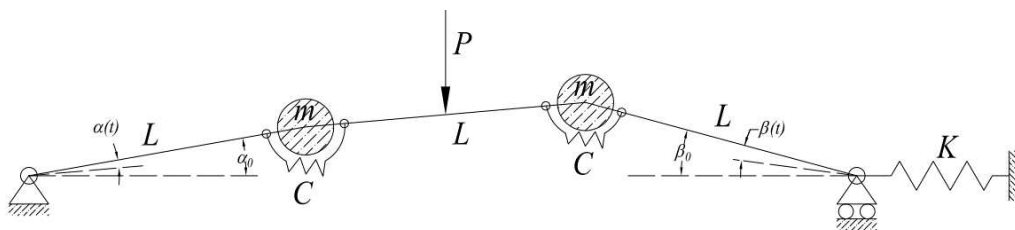


Figura 4: Modelo de dos grados de libertad analizado ([Croll y Walker, 1972](#), pp. 154).

3.1 Formulación del modelo matemático

Las ecuaciones de movimiento se derivan del criterio energético de Lagrange (ver por ejemplo, [Baruh, 1999](#)).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} + Q_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

donde \mathcal{T} es la energía cinética; \mathcal{V} es la energía potencial total ($\mathcal{V}_{int} - \mathcal{V}_{ext}$); \mathcal{D} es la función de disipación; q_i son un conjunto de n coordenadas generalizadas; $Q_i(t)$ son las fuerzas generalizadas no conservativas y el punto encima de la variable indica derivación temporal. Para el caso analizado en este trabajo $n=2$, $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = 0$ y $Q_i(t) = 0$.

El sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento, ordinarias y algebraicas, en términos de las variables temporales $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ se obtuvieron con la ayuda de un software de manipulación simbólica (*Mathematica*, 2015), y para la solución se utilizan el código IDA dentro del paquete *SUNDIALS* (2005), que está disponible dentro de *Mathematica*.

3.2 Formulación del criterio energético de estabilidad para n grados de libertad

Los desarrollos que siguen consideran la respuesta dinámica lineal de un sistema de dos grados de libertad alrededor de un estado de equilibrio. Si las masas generalizadas m_i se asocian a desplazamientos u_i , con estos últimos elegidos, sin pérdida de generalidad, de modo tal que la energía cinética sea una forma cuadrática,

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \dot{u}_i^2 \quad (6)$$

luego, la ecuación de Lagrange queda expresada por,

$$\frac{\partial V}{\partial u_i} = -m_i \ddot{u}_i \quad (7)$$

desarrollando V en series de Taylor y teniendo en cuenta las condiciones de equilibrio se llega a,

$$\frac{\partial V}{\partial u_i} = \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j} \Big|_E u_j = -m_i \ddot{u}_i \quad (8)$$

proponiendo la solución $u_i = \tilde{u}_i e^{i\omega t}$ y resolviendo el problema de autovalores, se arriba a la siguiente condición necesaria y suficiente para que ambos ω^2 sean positivos, es decir ambas frecuencias naturales ω sean reales y en consecuencia el equilibrio sea estable,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2} \Big|_E > 0 \quad (9a)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2} \Big|_E > 0 \quad (9b)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2} \Big|_E \frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2} \Big|_E - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u_1 \partial u_2} \Big|_E \right)^2 > 0 \quad (9c)$$

Las ecuaciones (9) se conocen como coeficientes de estabilidad. De este modo, para un sistema conservativo, si las frecuencias naturales de vibración alrededor de un punto de equilibrio son reales, la energía potencial total es un mínimo relativo y el estado del sistema es estable. En el caso de que cualquier condición (9) sea violada, el estado de equilibrio es definido como inestable (*Croll and Walker, 1972; Thompson and Hunt, 1973*).

Este criterio se utiliza para la determinación de los estados críticos del sistema analizado en este trabajo.

4 RESULTADOS

Los datos geométricos y de constantes elásticas que se utilizan para los análisis que siguen son: $L=1$; $K=1000$; $C=1$; $\alpha_0=\beta_0=0.2$. La configuración de referencia con $\alpha_0=\beta_0$ corresponde a

un sistema *perfecto*.

4.1 Trayectoria fundamental de equilibrio

La trayectoria fundamental se obtiene de la integración numérica de la ecuación (5) para cargas estáticas, que se reduce al principio de mínima energía potencial total. En la [Figura 5](#) se muestra la trayectoria fundamental mencionada. La [Figura 6](#) muestra los estados de equilibrio (o de mínima energía potencial total), para carga P creciente.

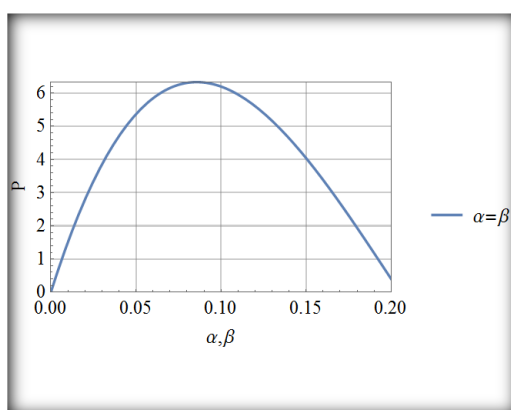


Figura 5: Trayectoria fundamental.

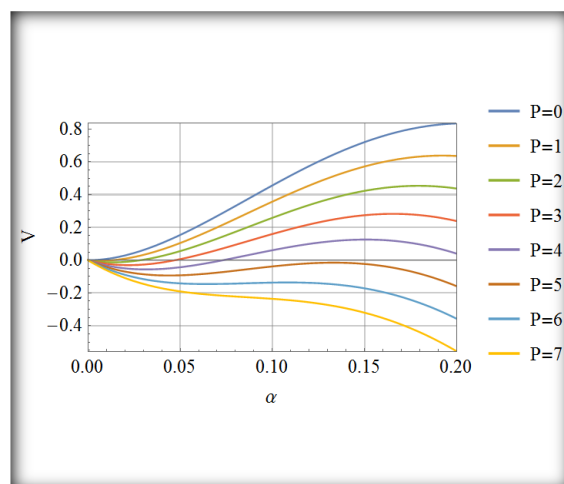


Figura 6: Gráficos de energía potencial total para trayectoria fundamental y P creciente.

La trayectoria evoluciona conservando la forma de la estructura ($\alpha=\beta$), de modo que el estado de máxima carga $P=6.32$ corresponde a un punto límite. El desplazamiento asociado resulta $\alpha=\beta=0.0857$.

4.2 Análisis de bifurcación

Se analiza a continuación el caso de una posible bifurcación sobre la trayectoria primaria. El análisis surge de aplicar el criterio contenido en las ecuaciones (9). De esos análisis surge una bifurcación con $P_{cr}=1.18$. El desplazamiento para ese nivel de carga, sobre la trayectoria fundamental es $\alpha_{cr}=\beta_{cr}=0.0076$. La [Figura 7](#) y la [Figura 8](#) reflejan esta situación. Para una carga menor, por ejemplo $P=0.50 < P_{cr}$, la energía en el equilibrio corresponde a un mínimo ([Figura 7](#)), mientras que para una carga mayor, por ejemplo $P=2.00 > P_{cr}$ se presenta un máximo en la energía del sistema ([Figura 8](#)).

Como valor de referencia, en el texto de [Croll y Walker \(1972, pp.164\)](#), se encuentra una carga crítica sobre trayectoria fundamental linealizada de 1.23; si en la trayectoria se eliminan términos no lineales de manera consistente, la carga crítica se reduce a 1.11.

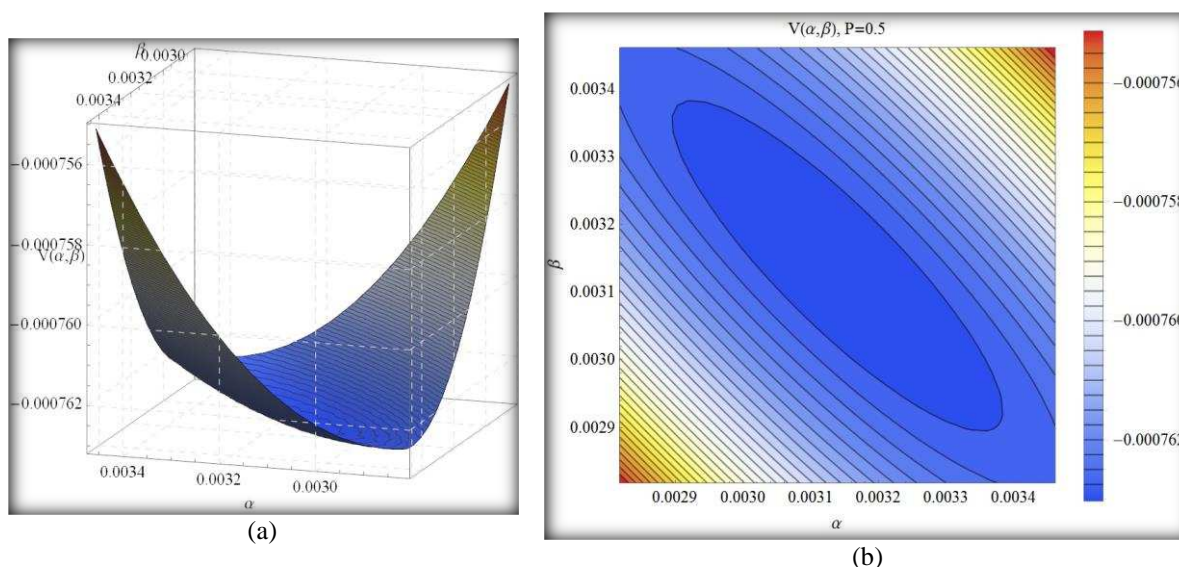


Figura 7: Energía potencial total V para $P=0.5$, (a) en vista 3D y (b) en curvas de nivel.

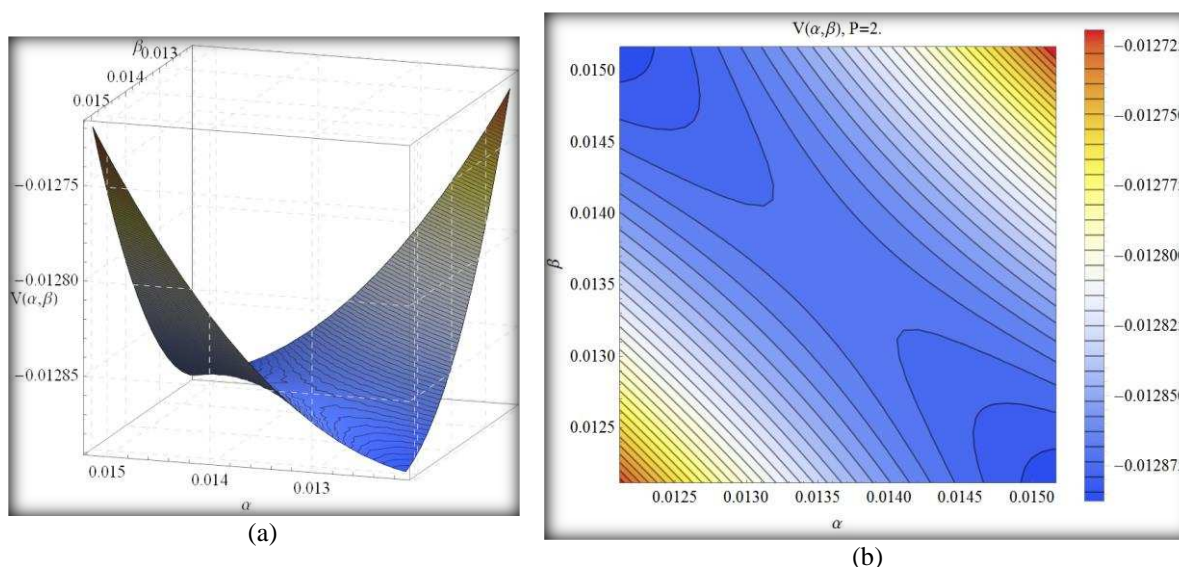


Figura 8: Energía potencial total V para $P=2$, (a) en vista 3D y (b) en curvas de nivel

4.3 Análisis dinámico para carga escalón

El análisis dinámico para carga escalón se obtiene de la integración de las ecuaciones de movimiento (5). Los gráficos de la Figura 9 a la Figura 14 muestran los resultados obtenidos.

Para una carga baja, por ejemplo $P=0.75$, los dos grados de libertad oscilan de manera conjunta en fase (Figura 9). Para $P=1.15 \approx P_{cr}$, la Figura 11 muestra que las oscilaciones de α se separan de las de β , lo que indica que el sistema cambia su forma antes de alcanzar un par de oscilaciones en el tiempo. Finalmente, Para $P=1.55 > P_{cr}$, las oscilaciones permanecen desfasadas, con cambios en la configuración geométrica del sistema al progresar en el tiempo (Figura 13).

Los coeficientes de estabilidad se han graficado en la Figura 10, Figura 12 y Figura 14 para los niveles de carga considerados. En el primer caso resultan todos positivos, en el segundo y tercer caso alternan a valores negativos.

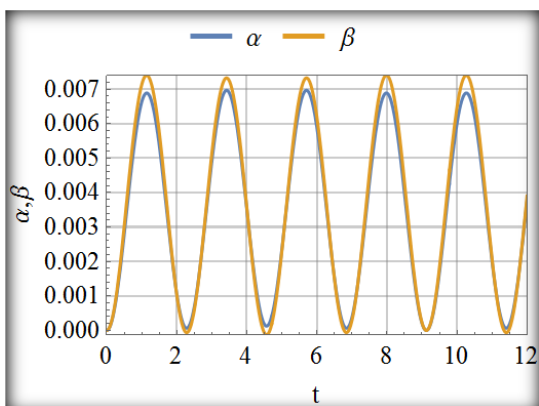


Figura 9: $\alpha(t), \beta(t)$ para $P=0.75$

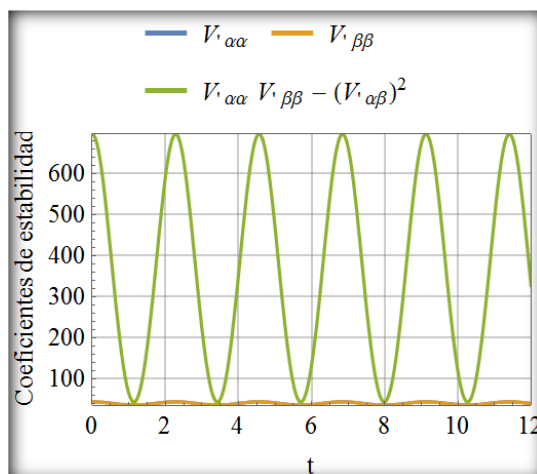


Figura 10: Historia ec.(9) para $P=0.75$

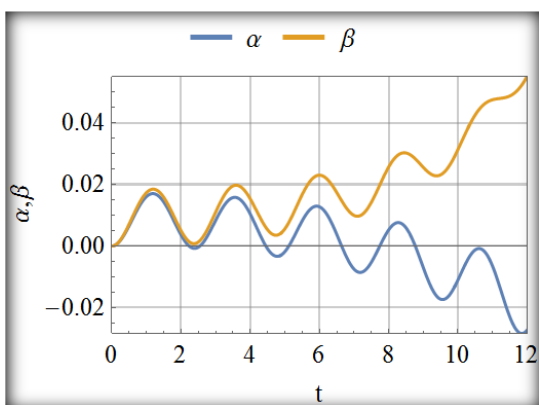


Figura 11: $\alpha(t), \beta(t)$ para $P=1.15$.

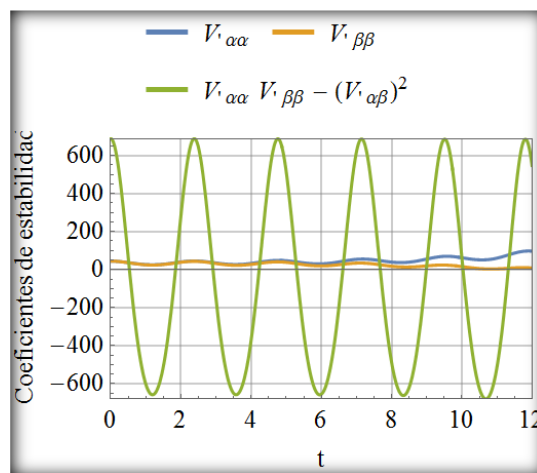


Figura 12: Historia ec.(9) para $P=1.15$

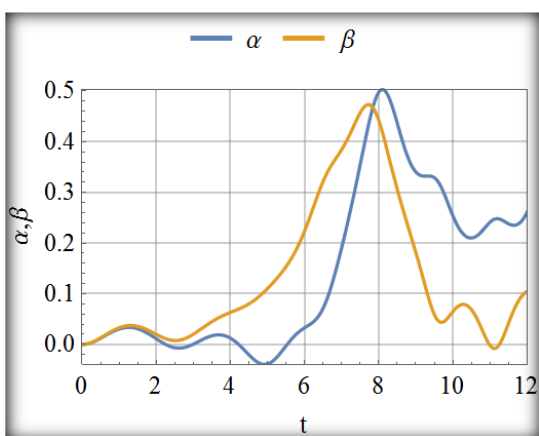


Figura 13: $\alpha(t), \beta(t)$ para $P=1.55$

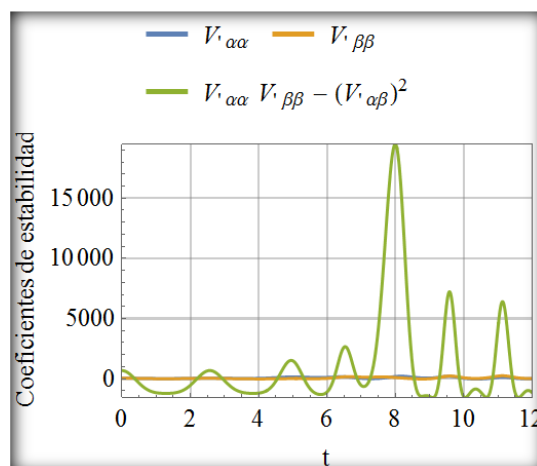


Figura 14: Historia ec.(9) para $P=1.55$

4.4 Análisis dinámico para carga impulsiva

El análisis dinámico para carga impulsiva se obtiene de la integración de las ecuaciones de movimiento (5). Una alternativa conveniente para definir un pulso de magnitud pico unitaria de manera continua (Ameijeiras y Godoy, 2016) es,

$$P_0(t) = \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)e^{-\frac{tk_2}{t_0}} \tag{10}$$

En la ecuación (10), t_0 representa la duración del pulso principal en tanto que se ha elegido convenientemente $k_2=2$. La expresión (10) se multiplica luego por valores constantes para representar incrementos de carga. El gráfico de esta expresión puede verse en la Figura 15.

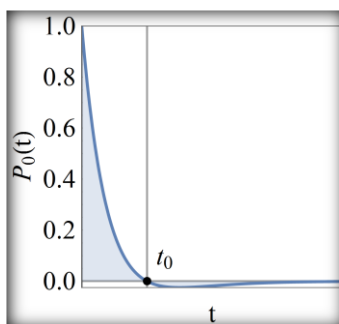


Figura 15: Carga impulsiva $P_0(t)$

Los gráficos de la Figura 16 a la Figura 21 muestran los resultados obtenidos.

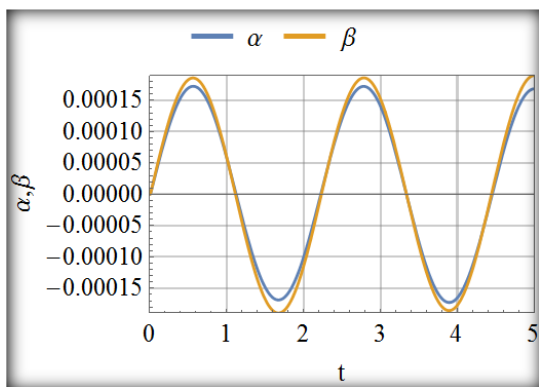


Figura 16: Respuesta dinámica $P=1.15$, $t_0=0.05$

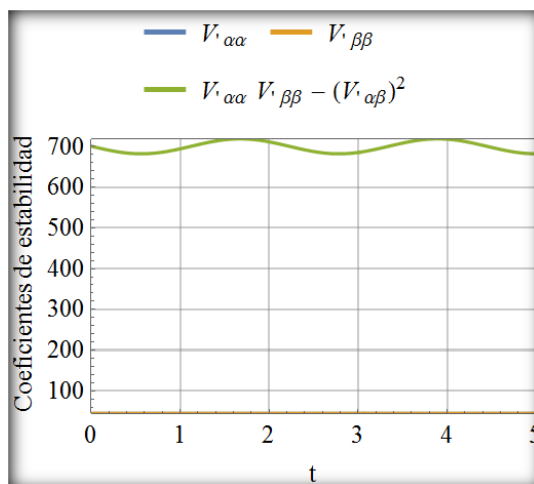


Figura 17: Historia ec.(9), $P=1.15$, $t_0=0.05$

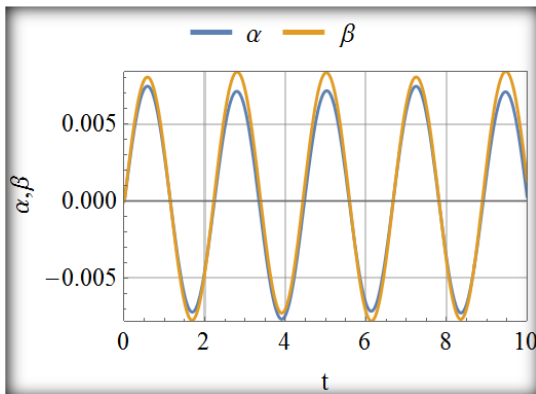


Figura 18: Respuesta dinámica $P=7.5$, $t_0=0.05$

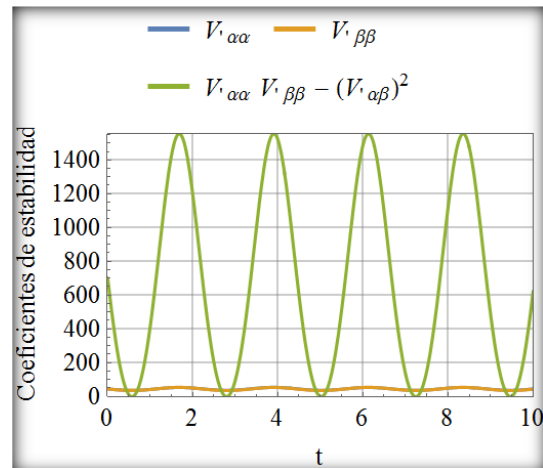


Figura 19: Historia ec.(9), $P=7.5$, $t_0=0.05$

Las oscilaciones conjuntas de α y β en la Figura 16 y en la Figura 18 indican un comportamiento estable, lo cual se visualiza en los coeficientes de estabilidad de la Figura 17 y la Figura 19 respectivamente. La pérdida de estabilidad se verifica para cargas mayores (Figura 20 y Figura 21). Habrá que realizar un proceso de aproximaciones sucesivas para determinar el mínimo que produce inestabilidad.

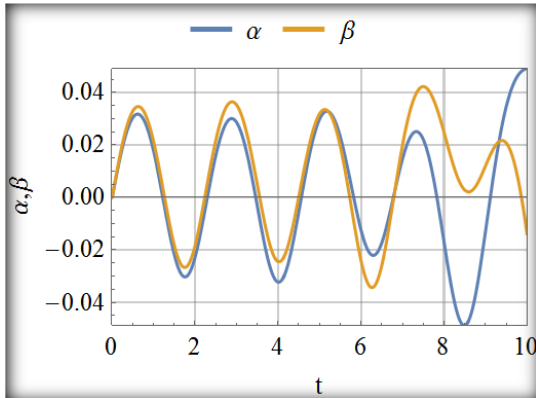


Figura 20: Respuesta dinámica $P=15$, $t_0=0.05$

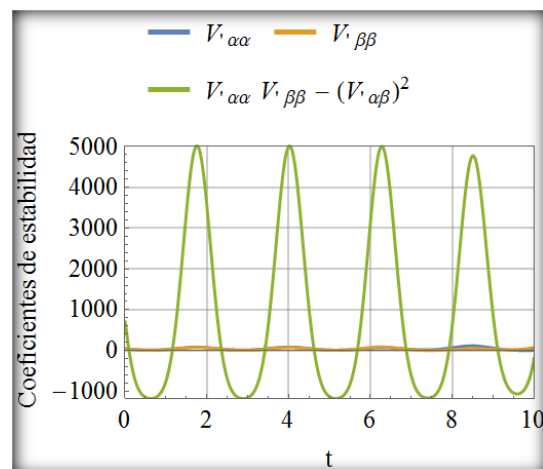
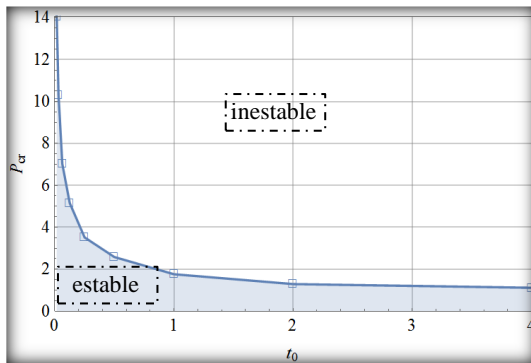
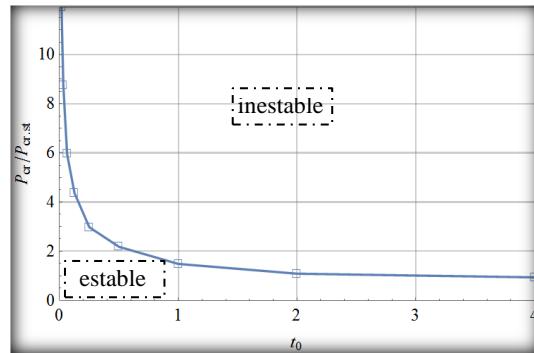


Figura 21: Historia ec.(9), $P=15$, $t_0=0.05$

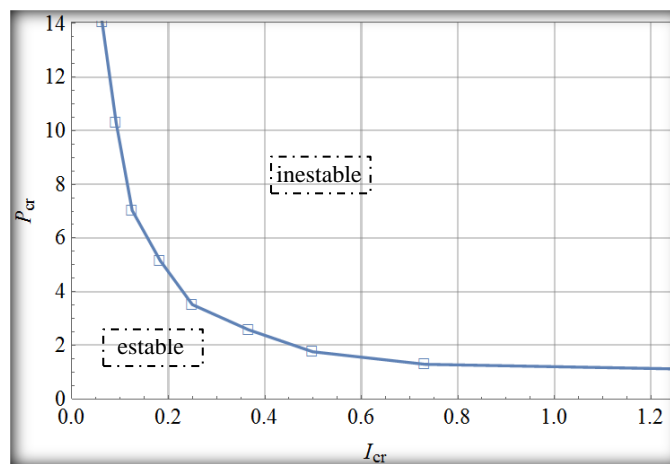
El proceso mencionado de aproximaciones sucesivas a la carga mínima que produce el incumplimiento de alguna de las ecuaciones (9) se ha resumido en la Figura 22 donde se muestra la carga crítica determinada en función de la duración del pulso. La Figura 23 representa el incremento de carga crítica dinámica frente a la estática para distintos valores de duración del pulso. Notar las zonas estables de las inestables.

Figura 22: P_{cr} vs t_0 Figura 23: Relación pandeo dinámico/estático vs t_0

Otra forma de representar este fenómeno es a través del impulso. Considerando la carga crítica el impulso queda definido por,

$$I_{cr+}(t) = \int_0^{t_0} P_{cr} \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) e^{-\frac{tk_2}{t_0} t} dt \quad (11)$$

El gráfico de la [Figura 24](#) muestra la curva de impulso crítico frente a carga crítica.

Figura 24: P_{cr} vs Impulso de fase positiva

Se observa que para duraciones del pulso largas la carga crítica permanece constante e igual a la estática o de *Heaviside* en tanto que para duraciones cortas, la carga crítica muestra una dependencia del tiempo o del impulso.

5 DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Este trabajo ilustra los procedimientos que pueden seguirse para determinar la carga de pandeo dinámico, a través del estudio de la respuesta dinámica no lineal de un sistema de dos grados de libertad. El objetivo es identificar estrategias que puedan ser extendidas a sistemas de múltiples grados de libertad.

Tanto los resultados de la trayectoria fundamental como aquellos de bifurcación coinciden con los aportados por [Croll and Walker \(1972\)](#). En la [Figura 5](#) se muestra la trayectoria fundamental y en la [Figura 6](#) la variación de la energía potencial total sobre la trayectoria

fundamental para carga creciente. Notar que el punto de inflexión alrededor del valor de carga límite de la [Figura 5](#), asegura un pandeo inestable.

Los resultados de carga tipo escalón muestran, como es de esperar, coincidencia en carga de bifurcación con los análisis estáticos. En la [Figura 7](#), se observa que para valores de carga por debajo de la carga crítica de bifurcación cualquier perturbación alrededor del punto de equilibrio se mantendrá estable, en tanto que la [Figura 8](#) indica que una vez alcanzado el punto de bifurcación inestable (silla de montar), el sistema evolucionará por caminos de menor energía que el de trayectoria fundamental. Los resultados concuerdan con las conclusiones obtenidas por [Flores y Godoy \(1998\)](#) y [Simitse \(1990\)](#) en lo que se refiere a una equivalencia práctica entre un análisis LBA y un estado de inestabilidad dinámica para cargas de este tipo. Notar que la sola presencia de error numérico hace que el sistema salga de la trayectoria fundamental y se encamine hacia la trayectoria secundaria sin requerir imperfecciones de modo de pandeo de bifurcación. Los gráficos de la [Figura 9](#) a la [Figura 14](#) muestran para carga creciente pasando por la crítica como evolucionan los desplazamientos en el tiempo y los coeficientes de estabilidad, evidenciando la validez del criterio contenido en las ecuaciones (9).

Para carga impulsiva, aplicando el criterio de coeficientes de estabilidad, los gráficos de la [Figura 9](#) a la [Figura 14](#) indican la evolución de los desplazamientos para cargas crecientes. Allí se observa que los pulsos producen inestabilidades para cargas mayores a las críticas estáticas o del tipo escalón.

Para sistemas sometidos a cargas impulsivas, los criterios de inestabilidad estáticos se deben utilizar solo como referencia y no con propósitos de diseño. Las cargas críticas tipo pulso son mayores a las estáticas. Cuando la duración del pulso decrece, hay un aumento significativo en la carga de inestabilidad dinámica. El criterio provisto por las ecuaciones (9) es de gran utilidad y establece una base sólida para análisis de estructuras de varios grados de libertad.

Se considera que los tópicos más relevantes para desarrollos futuros deberían abarcar:

- Sistemas de varios grados de libertad.
- Análisis considerando imperfecciones.
- Desarrollo de criterios para análisis de estructuras continuas.

Agradecimientos. Los autores agradecen el soporte recibido por la Universidad Nacional de Córdoba y CONICET. El segundo autor es Investigador Superior de CONICET.

REFERENCIAS

- Ameijeiras, M. P. and Godoy L. A., Simplified analytical approach to evaluate the nonlinear dynamics of elastic cylindrical shells under lateral blast loads, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 13: 1281-1298, 2016. <http://dx.doi.org/10.1590/1679-78252587>
- Ameijeiras, M. P. y Godoy L. A., Respuesta no lineal de tanques de almacenamiento de petróleo frente a cargas debidas a explosiones, AMCA, *Mecánica Computacional*, 22: 3323-3340, 2013.
- Atkinson, G., Blast damage to storage tanks and steel clad buildings, *Process Safety and Environmental Protection*, 89: 382-390, 2011.
- Baruh, H., *Analytical Dynamics*, McGraw-Hill Book Co, Singapore, 1999.
- Budiansky B. and Roth R. S., Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow spherical shells, in *Collected Papers on Instability of Shell Structures*, NASA TN D-1510, Washington, DC, 597-606, 1962.
- Budiansky B., Dynamic buckling of elastic structures: Criteria and Estimates, in: *Dynamic Stability of Structures*, 83-106, (Ed. G. Herrmann), Pergamon Press, 1967.

- Buncefield Major Incident Investigation Board, The Buncefield Incident, 11 December 2005, *The final report of the Major Incident Investigation Board*. v.11, The Office of Public Sector Information, Richmond, Surrey, United Kingdom, 2008.
- Croll J. G. and Walker, A. C., *Elements of structural stability*, The Macmillan Press Ltd, London, 1972.
- Flores, F. G. and Godoy, L. A., Buckling of short tanks due to hurricanes, *Engineering Structures*, Vol. 20 (8): 752-760, 1998.
- Hindmarsh, A.C., Brown, P.N., Grant, K.E., Lee, S.L., Serban, R., Shumaker, D.E., Woodward, C.S. SUNDIALS: Suite of Nonlinear and Differential/Algebraic Equation Solvers. *ACM Transactions on Mathematical Software* 31(3):363-396, 2005.
- Mathematica, Wolfram Research, Champaign, IL, 2015.
- Salzano, E., Cozzania V., The analysis of domino accidents triggered by vapor cloud explosions, *Reliability Engineering & System Safety*, 90 (2-3): 271-284, 2003.
- Simitses, G. J., *Dynamic Stability of Suddenly Loaded Structures*, Springer-Verlag, New York Inc., 1990.
- Taveau, J., Explosion of fixed roof atmospheric storage tanks, Part 1: Background and review of case histories, *Process Safety Progress*, 30 (4): 381-392, 2011.
- Thompson, J. M. T. and Hunt, G. W., *A general theory of elastic stability*, John Wiley & Sons Ltd., London, 1973.
- Virella, J. C., Godoy, L. A., Suárez, L. E., Dynamic buckling of anchored steel tanks subjected to horizontal earthquake excitation, *Journal of Constructional Steel Research*, 62 (6): 521:531, 2006.