

## UN ENFOQUE PRÁCTICO AL TRATAMIENTO DE ESTRUCTURAS CON IMPERFECCIONES

Claudio E. Jouglaard<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Ingeniería Civil, Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina, [claudio.jouglaard@frba.utn.edu.ar](mailto:claudio.jouglaard@frba.utn.edu.ar)*

**Palabras clave:** inestabilidad, imperfecciones, elementos finitos.

**Resumen.** En este trabajo presentamos una metodología para el análisis de estructuras metálicas con imperfecciones según los lineamientos de los códigos más modernos (AISC, Eurocode) usando cualquier programa de elementos finitos que tenga la capacidad de determinar los clásicos modos de pandeo y que pueda realizar un análisis no lineal de una estructura con imperfecciones geométricas iniciales. La propuesta se basa en simplificar el análisis suponiendo un comportamiento prepandeo lineal elástico y asumiendo que las imperfecciones críticas están en correspondencia con la orientación inicial de los caminos de bifurcación, las cuales son determinadas usando la teoría asintótica de la estabilidad. Las imperfecciones así determinadas se utilizan para generar un modelo imperfecto que se analiza de manera no lineal mediante cualquier programa disponible de elementos finitos. Si bien es posible utilizar cualquier software comercial con capacidad para este tipo de análisis, se requieren algunos cálculos específicos para determinar los caminos de bifurcación, especialmente cuando tenemos puntos críticos de bifurcación coincidentes o cuasi-coincidentes. El objetivo final de la propuesta es presentar una metodología que permita automatizar la verificación de estructuras metálicas, aún en aquellos casos de comportamiento muy complejos, cómo los que se presentan en ciertas estructuras laminares y reticuladas.

## 1 INTRODUCCIÓN

El comportamiento de inestabilidad estructural se analiza usualmente mediante la determinación de las llamadas cargas críticas de pandeo. En teoría al alcanzar esta carga la estructura se desestabiliza y para cargas menores permanece en situación de equilibrio estable. Si bien este comportamiento es representativo de una gran variedad de tipologías estructurales, existen algunas estructuras laminares, como las cáscaras cilíndricas o circulares, que se desestabilizan a cargas sensiblemente inferiores (Galambos, 1998). Es bien conocido que la causa principal de esta discordancia es la sensibilidad de estas estructuras a imperfecciones o pequeños desvíos de la geometría perfecta de la estructura (Thompson y Hunt, 1984; Godoy, 1996).

En los últimos años las normas más modernas de Estados Unidos (AISC, 2010) y Europa (EUROCODE, 2009) han incorporado la posibilidad de modelar directamente las imperfecciones para la verificación de la estabilidad de estructuras metálicas, sustituyendo los análisis clásicos basados en longitudes de pandeo y factores de mayoración.

Estas normas recomiendan emplear la “*peor*” imperfección para analizar la estructura, esto es utilizar aquella que causa el mayor efecto desestabilizante. Diversos autores (Ho, 1974; Lanzo y Garcea, 1976, Delm y Wunderlich, 1997) proponen como *peor imperfección* a la deformada correspondiente a la bifurcación de mayor pendiente, esto es, que presente la mayor pérdida de carga en las proximidades del punto de bifurcación.

Luego es necesario encontrar los caminos de bifurcación asociados a las cargas críticas más bajas para determinar las peores imperfecciones. Los programas comerciales, como ABAQUS (Simulia, 2016), no calculan los caminos de bifurcación, sólo determinan las cargas críticas y los llamados modos de pandeo.

El objetivo del presente trabajo es describir una metodología para el análisis de estructuras imperfectas según las normas de diseño y usando programas comerciales, indicando los pasos complementarios que deben ser implementados para definir un análisis completo.

## 2 COMPORTAMIENTO DE ESTRUCTURAS IMPERFECTAS

Asumiremos que el sistema estructural es conservativo y posee una energía potencial total  $V$  que se puede expresar como

$$V(\mathbf{u}, \lambda) = U(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{p}^t \cdot \mathbf{u} \quad (1)$$

Donde  $U(\mathbf{u})$  es la energía de deformación del sistema que es función de las coordenadas generalizadas  $\mathbf{u}$  usualmente asociadas a desplazamientos nodales,  $\mathbf{p}$  es el vector de cargas nodales de referencia, asumido constante, y  $\lambda$  es el factor de proporcionalidad de las cargas.

### 2.1 Ecuaciones de equilibrio

Para obtener las ecuaciones de equilibrio del sistema debemos derivar la energía potencial respecto de cada coordenada generalizada

$$\mathbf{F} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (2)$$

Donde  $\mathbf{f}_i$  es el vector de fuerzas internas

$$\mathbf{f}_i = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}} \quad (3)$$

Además  $\mathbf{f}_e$  es el vector de fuerzas externas que varía de forma proporcional al parámetro de cargas

$$\mathbf{f}_e = \lambda \mathbf{p} \quad (4)$$

Debido a la consideración de no linealidad geométrica las componentes del vector de fuerzas internas  $\mathbf{f}_i(\mathbf{u})$  son funciones no lineales de los desplazamientos  $\mathbf{u}$  y las soluciones de las ecuaciones de equilibrio (2) vienen dadas en la forma de curvas en el espacio  $\mathbf{u}, \lambda$  llamadas *camino de equilibrio*.

Cada punto  $\mathbf{u}_E, \lambda_E$  de estos caminos representa una configuración de equilibrio sobre la cual podemos definir un *vector tangente*  $\mathbf{T}$  (ver fig. 1) como

$$\mathbf{T} = \{\mathbf{du} \quad d\lambda\}^T \quad (5)$$

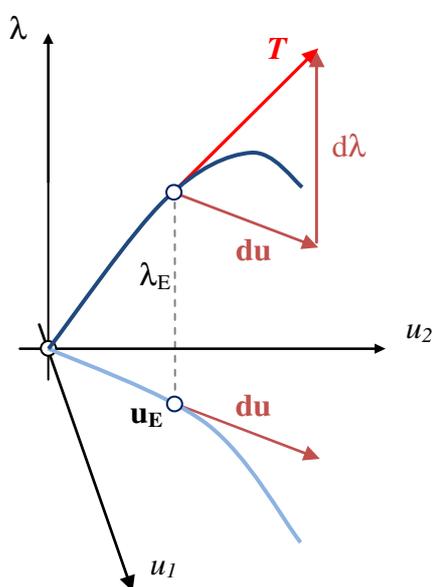


Figura 1: Vector tangente en una configuración de equilibrio

Donde  $\mathbf{du}, d\lambda$  se miden a partir de una configuración de equilibrio conocida  $\mathbf{u}_E, \lambda_E$

$$\mathbf{du} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_E \quad (6)$$

$$d\lambda = \lambda - \lambda_E$$

Estas componentes del vector tangente deben satisfacer las ecuaciones de equilibrio incremental (Crisfield, 1996)

$$\mathbf{K} \mathbf{du} = d\lambda \mathbf{p} \quad (7)$$

Donde  $\mathbf{K}$  es la *matriz de rigidez tangente* cuyos elementos  $K_{ij}$  son evaluados en la configuración de equilibrio  $E$  como

$$K_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j} \right|_E \quad (8)$$

Notemos que si la configuración de equilibrio es estable la energía potencial  $V$  debe tener un mínimo en la configuración  $E$  y por lo tanto en esa configuración su matriz Hessiana (que coincide con la matriz de rigidez tangente) debe ser definida positiva y por lo tanto todos sus autovalores deben ser estrictamente positivos (Jouglard, 1993).

## 2.2 Puntos de equilibrio crítico

Como ya mencionamos las ecuaciones de equilibrio (2) son no lineales y sus soluciones son curvas que se pueden representar en un diagrama de respuesta  $u, \lambda$  (fig. 2). Sobre estas curvas podemos tener *puntos límite*, que representan máximos y mínimos locales respecto del parámetro de cargas  $\lambda$ , a los cuales hemos identificado con la letra L a la izquierda de la fig. 2.

Dado que el problema es no lineal también podemos tener más de una curva solución y llamamos *puntos de bifurcación* a los puntos de intersección entre caminos. Si sólo se intersectan dos caminos de equilibrio tenemos un *punto de bifurcación simple* (punto B en la fig. 2) y si se intersectan más de dos caminos tenemos un *punto de bifurcación múltiple* (punto C en la fig 2).

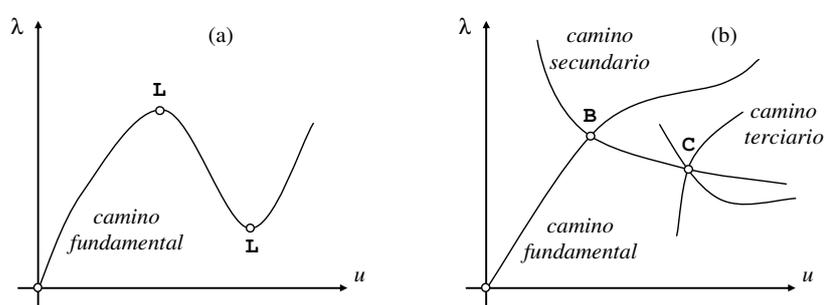


Figura 2: Diagramas de respuesta no lineal

Sobre cada camino los autovalores de la matriz de rigidez tangente varían punto a punto hasta que en algún punto uno o más autovalores se anulan. En ese caso estamos ante la presencia de un *punto crítico de equilibrio* pues en ese punto no se puede asegurar que el equilibrio sea estable. Se puede demostrar (Thompson, 1973, Jouglard 1993) que los puntos críticos sólo pueden ser puntos límite o puntos de bifurcación.

## 2.3 Respuesta de sistemas imperfectos

Si el sistema estructural presenta pequeñas imperfecciones geométricas sabemos que su comportamiento es asintótico al de la estructura perfecta (Godoy, 1996).

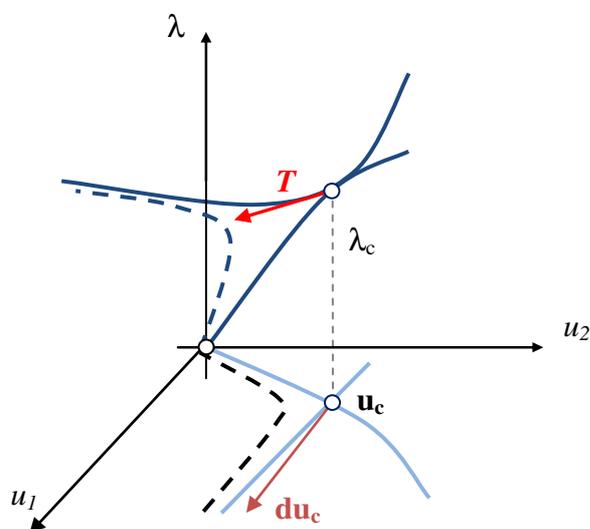


Figura 3: Vector tangente a una bifurcación

Las componentes  $\mathbf{du}_c$  de los vectores tangente a un camino de bifurcación son los llamados *modos de pandeo* pues indican la tendencia que tendrán los desplazamientos en un punto de bifurcación. Si quisiéramos una aproximación al comportamiento real deberíamos imponer una imperfección según los modos de pandeo en cada punto crítico.

Notemos que en una bifurcación existen dos direcciones posibles para el vector tangente a un camino de bifurcación (fig. 4). La dirección más desfavorable es aquella que va en la dirección de cargas decrecientes o sea cuya componente  $d\lambda$  sea negativa.

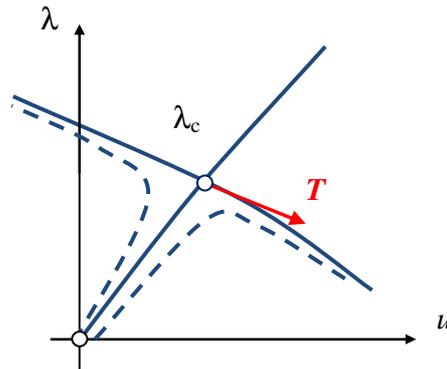


Figura 4: Vector tangente a una bifurcación

Notemos además que en el caso de una bifurcación simple sólo tendremos un modo de pandeo pero si tenemos una bifurcación múltiple tendremos tantos modos de pandeo como caminos de bifurcación haya.

## 2.4 Autovectores en un punto crítico simple

Si el problema es moderadamente no lineal y nos interesa conocer el comportamiento apenas en las proximidades de la configuración indeformada podemos asumir que en el rango de interés la estructura presenta un comportamiento lineal

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}_0 \quad (9)$$

Donde  $\mathbf{u}_0$  es la dirección de desplazamiento lineal

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{u}_0 = \mathbf{p} \quad (10)$$

Siendo  $\mathbf{K}_0$  la matriz de rigidez tangente inicial evaluada en la configuración indeformada  $\mathbf{u}_E = \mathbf{0}, \lambda_E = 0$ .

Luego en las inmediaciones de la configuración inicial la matriz de rigidez tangente se puede expresar como

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \lambda \mathbf{K}_G \quad (11)$$

Donde  $\mathbf{K}_G$  es la *matriz de rigidez geométrica* cuyos elementos  $KG_{ij}$  son evaluados en la configuración inicial de equilibrio como

$$KG_{ij} = \left. \frac{\partial^3 V}{\partial \lambda \partial u_i \partial u_j} \right|_0 \quad (12)$$

La matriz de rigidez tangente irá variando sus autovalores a medida que se incrementa la carga con el factor  $\lambda$ , hasta alcanzar una configuración crítica, identificada por el valor  $\lambda_c$  del parámetro de cargas, donde uno o más de sus autovalores se anulen indicando una situación

de equilibrio crítico a partir de la cual la estructura se torna inestable.

La ecuación de autovector, autovalor para la matriz de rigidez tangente se puede expresar como

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\xi} = \omega \boldsymbol{\xi} \quad (13)$$

Donde  $\boldsymbol{\xi}$  es un autovector de la matriz  $\mathbf{K}$  y  $\omega$  es su autovalor asociado. Una matriz de dimensión  $n \times n$  tiene  $n$  autovectores distintos y ortogonales entre sí

$$\boldsymbol{\xi}_i^T \boldsymbol{\xi}_j = 0 \quad (14)$$

Si uno o más de los autovalores se anulan en el punto crítico entonces en ese punto los autovectores críticos  $\boldsymbol{\xi}_c$  deben satisfacer la siguiente ecuación

$$\mathbf{K}_c \boldsymbol{\xi}_c = \mathbf{0} \quad (15)$$

Donde  $\mathbf{K}_c$  es la matriz de rigidez tangente en el punto crítico y se debe verificar

$$\boxed{(\mathbf{K}_0 + \lambda_c \mathbf{K}_G) \boldsymbol{\xi}_c = \mathbf{0}} \quad (16)$$

Este es el *problema de autovalor generalizado* que se halla implementado en la mayoría de los programas de análisis estructural que dan como resultado los valores de carga crítica  $\lambda_c$  y los autovectores críticos  $\boldsymbol{\xi}_c$  asociados. Si todos los  $\lambda_c$  son diferentes diremos que cada uno representa un *punto crítico simple*. Si varios cargas críticas  $\lambda_c$  son coincidentes entonces tenemos un *punto crítico múltiple*.

En la figura 2 tenemos una representación de las aproximaciones a las cargas críticas obtenidas con la suposición de un camino inicial lineal. Si el camino de equilibrio es no lineal en general tendremos cargas críticas reales menores que las obtenidas mediante el problema simplificado (15). Sin embargo estamos más interesados en conocer los modos de pandeo para utilizarlos como imperfecciones.

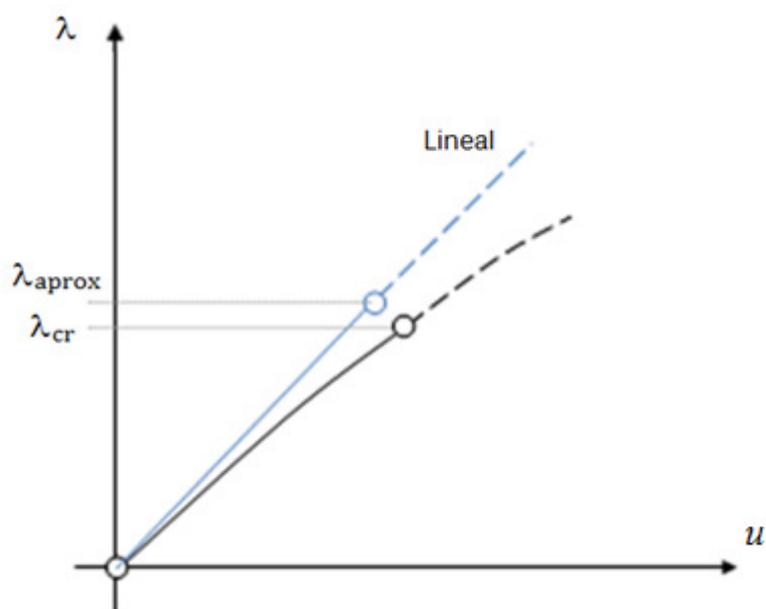


Figura 5: Aproximación carga crítica

Si conocemos los autovectores críticos  $\boldsymbol{\xi}_c$  siempre se pueden normalizar para que verifiquen

$$\begin{aligned}\xi_c^T \mathbf{K}_0 \xi_c &= |\lambda_c| \\ \xi_c^T \mathbf{K}_G \xi_c &= \pm 1\end{aligned}\quad (17)$$

Debemos notar que los valores de cargas críticas pueden ser positivos o negativos. Si una carga crítica fuese negativa indica que las cargas aplicadas de referencia  $\mathbf{p}$  se deben considerar actuando en sentido inverso.

Por otro lado si  $\xi_{ci}$  y  $\xi_{cj}$  son dos autovectores críticos asociados a cargas críticas distintas  $\lambda_{ci}$  y  $\lambda_{cj}$  se deben verificar las siguientes condiciones de ortogonalidad

$$\begin{aligned}\xi_{ci}^T \mathbf{K}_0 \xi_{cj} &= 0 \\ \xi_{ci}^T \mathbf{K}_G \xi_{cj} &= 0\end{aligned}\quad (18)$$

También se puede demostrar (Bazant y Cedolin, 2010) que los autovectores críticos son ortogonales entre sí, esto es

$$\xi_{ci}^T \xi_{cj} = 0 \quad (19)$$

Debemos notar que para ciertos problemas la matriz  $\mathbf{K}_G$  puede resultar *singular*, esto es, que presente  $p$  autovalores nulos. En estos caso si la dimensión de la matriz es de  $n \times n$  del problema de autovalor generalizado (16) sólo se pueden obtener  $(n-p)$  autovectores críticos linealmente independientes.

Además por conveniencia normalizaremos los autovectores críticos de manera que verifiquen

$$\xi_c^T \xi_c = 1 \quad (20)$$

Y no impondremos las condiciones de normalización (17).

## 2.5 Autovectores en un punto crítico múltiple

Si existen varios autovectores críticos  $\xi_{ci}$  asociados a un mismo valor de carga crítica  $\lambda_c$  tenemos un punto crítico múltiple y cada uno de estos vectores debe satisfacer la ecuación de autovector crítico (15)

$$\mathbf{K}_c \xi_{ci} = (\mathbf{K}_0 + \lambda_c \mathbf{K}_G) \xi_{ci} = \mathbf{0} \quad (21)$$

Supongamos que tenemos  $m$  autovectores críticos múltiples  $\xi_{ci}$  y definimos a un vector  $\Psi$  como una combinación lineal de estos autovectores

$$\Psi = c_1 \xi_{c1} + c_2 \xi_{c2} + \dots + c_m \xi_{cm} \quad (22)$$

Notemos que cualquier combinación lineal  $\Psi$  es también un autovector crítico múltiple. Esto implica que en un punto crítico múltiple los autovectores críticos  $\xi_{ci}$  no están definidos de manera unívoca. Sin embargo siempre será posible definir un conjunto de  $m$  autovectores críticos  $\Psi_{ci}$  mutuamente ortogonales tal que verifiquen

$$\begin{aligned}\Psi_{ci}^T \Psi_{ci} &= 1 \\ \Psi_{ci}^T \Psi_{cj} &= 0\end{aligned}\quad (23)$$

En general los programas comerciales ya nos dan estos vectores críticos múltiples ortogonalizados entre sí, pero si no lo estuvieran es necesario hacerlo.

## 2.6 Vector tangente en un punto crítico

En un punto de bifurcación los vectores tangentes  $\phi_c$  a cada camino crítico tienen componentes

$$\phi_c = \{d\mathbf{u}_c \quad d\lambda_c\}^T \quad (24)$$

Estas componentes del vector tangente deben verificar las ecuaciones incrementales de equilibrio (7) a partir del punto crítico

$$\mathbf{K}_c d\mathbf{u}_c = d\lambda_c \mathbf{p} \quad (25)$$

Notando que la matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_c$  es singular en el punto crítico, el cual asumiremos simple, entonces la componente  $d\mathbf{u}_c$  pueden expresarse como

$$d\mathbf{u}_c = \alpha \xi_c + d\lambda_c \mathbf{u}_c \quad (26)$$

Donde  $\xi_c$  es el autovector crítico y  $\mathbf{u}_c$  es la solución de

$$\mathbf{K}_c \mathbf{u}_c = \mathbf{p} \quad (27)$$

Para que exista solución única este vector  $\mathbf{u}_c$  debe ser ortogonal al autovector crítico. Como veremos a continuación no es necesario calcular este vector ya que para caminos pre-críticos lineales coincide siempre con la solución inicial  $\mathbf{u}_0$ .

Además notemos que por el hecho de asumir una trayectoria fundamental lineal, sólo puede haber puntos críticos de bifurcación sobre esta trayectoria y en dichos puntos el vector de cargas  $\mathbf{p}$  es siempre ortogonal a todos los autovectores críticos (Jouglard, 1993)

$$\xi_c^T \mathbf{p} = 0 \quad (28)$$

Esta condición de compatibilidad asegura la existencia de la solución  $\mathbf{u}_c$  en la ec. (27).

## 2.7 Ortogonalidad del camino fundamental lineal. Modos de pandeo

El vector tangente  $\phi_f$  del camino fundamental tiene componentes

$$\phi_f = \{d\mathbf{u}_f \quad d\lambda_f\} \quad (29)$$

Si el camino fundamental es lineal estas componentes deben permanecer invariables a lo largo de este camino

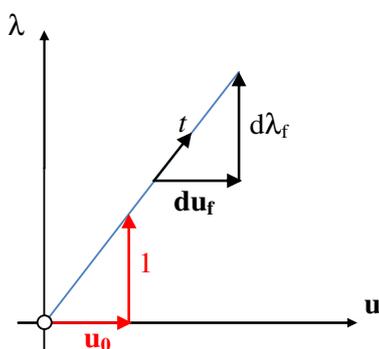


Figura 6: Componentes del vector tangente del camino fundamental lineal

Luego debe verificarse la siguiente relación entre componentes

$$d\mathbf{u}_f = d\lambda_f \mathbf{u}_0 \quad (30)$$

En cualquier punto del camino fundamental se debe verificar la ecuación de equilibrio incremental

$$\mathbf{K} \mathbf{d}\mathbf{u}_f = (\mathbf{K}_0 + \lambda \mathbf{K}_G) d\lambda_f \mathbf{u}_0 = d\lambda_f \mathbf{p} \quad (31)$$

Resultando

$$\lambda \mathbf{K}_G \mathbf{u}_0 = \mathbf{p} - \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \quad (32)$$

Como esta expresión debe ser válida para cualquier  $\lambda$  debe verificarse

$$\boxed{\mathbf{K}_G \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}} \quad (33)$$

Esto implica que si el camino fundamental es lineal entonces el producto de la matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_G$  por el vector solución inicial  $\mathbf{u}_0$  es siempre nulo. En otras palabras decimos que  $\mathbf{u}_0$  está en el espacio nulo de  $\mathbf{K}_G$ .

Notemos que  $\mathbf{u}_0$  debe ser ortogonal a todos los autovectores críticos, ya que no es posible encontrar una combinación lineal de autovectores críticos que pertenezca al espacio nulo de  $\mathbf{K}_G$ . Luego se debe verificar

$$\boxed{\boldsymbol{\xi}_c^T \mathbf{u}_0 = 0} \quad (34)$$

Esto es, la solución inicial es ortogonal a todos los autovectores críticos.

Luego para cualquier punto crítico sobre el camino fundamental lineal  $\mathbf{u}_0$  es la solución de

$$\mathbf{K}_c \mathbf{u}_0 = \mathbf{p} \quad (35)$$

Resultando

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{u}_0 \quad (36)$$

Siendo  $\mathbf{u}_0$  además la única solución posible que verifica la ortogonalidad con todos los autovectores críticos.

Luego en un punto crítico simple la componente  $\mathbf{d}\mathbf{u}_c$ , de la ec.(26), se puede expresar como

$$\mathbf{d}\mathbf{u}_c = \alpha \boldsymbol{\xi}_c + d\lambda_c \mathbf{u}_0 \quad (37)$$

El primer término es el llamado *modo de pandeo* que define la componente de deformación, ortogonal al camino fundamental, que toma el camino de bifurcación y coincide con la forma del autovector crítico.

## 2.8 Ecuación de restricción paramétrica en un punto crítico simple

Las componentes del vector tangente  $\mathbf{d}\mathbf{u}_c$ ,  $d\lambda_c$  a los caminos de bifurcación deben verificar una *ecuación de restricción paramétrica* que define el parámetro  $t$  que se utilizará para describir el avance sobre cada camino de equilibrio. Esto es importante para definir los vectores tangentes a los caminos de bifurcación, ya que no todos los parámetros son válidos (Jouglard, 1993):

Un parámetro válido en cualquier circunstancia es la *longitud de arco* del camino, en este caso las componentes del vector tangente están vinculadas como:

$$\boxed{\mathbf{d}\mathbf{u}_c^T \mathbf{d}\mathbf{u}_c + (d\lambda_c)^2 = 1} \quad (38)$$

Si sustituimos  $\mathbf{d}\mathbf{u}_c$  de la ec. (37) y utilizando las condiciones de ortogonalidad (34) y la normalización (17) resulta

$$\alpha^2 + (\mathbf{u}_0^T \mathbf{u}_0 + 1)(d\lambda_c)^2 = 1 \quad (39)$$

Esta será la ecuación de restricción paramétrica a utilizar en un punto crítico simple. Esta

ecuación no es única y se pueden usar otras alternativas (Jouglard, 1993) pero como se mencionó encima esta expresión es siempre válida desde el punto de vista matemático.

Luego la ec. (39) se debe verificar para cualquier camino pasando por el punto crítico, en particular para el camino fundamental cuyo vector tangente tiene componente  $\mathbf{du}_f$  ortogonal al autovector crítico

$$\xi_c^T \mathbf{du}_f = \alpha_f \xi_c^T \xi_c + d\lambda_c \xi_c^T \mathbf{u}_0 = \alpha_f = 0 \quad (40)$$

Por lo tanto resulta nulo el coeficiente  $\alpha_f$  y las componentes  $(\mathbf{du}_f, d\lambda_f)$  del vector tangente al camino fundamental en el punto crítico son de las ecs. (37) y (39)

$$d\lambda_f = \pm 1/\beta \quad (41)$$

$$\mathbf{du}_f = d\lambda_f \mathbf{u}_0$$

Donde

$$\beta = \sqrt{\mathbf{u}_0^T \mathbf{u}_0 + 1} \quad (42)$$

Notemos que el signo en la ec. (41) indica el sentido de recorrido, positivo para cargas crecientes y negativo para decrecientes.

## 2.9 Ecuaciones de bifurcación en un punto crítico simple

Para determinar los vectores tangente a cada camino de bifurcación debemos encontrar los valores del parámetro  $\alpha$  y del incremento  $d\lambda_c$ . Necesitamos dos ecuaciones para hallar estas dos incógnitas, una es la ecuación de restricción paramétrica (39) y la otra es la siguiente ecuación de bifurcación (Riks, 1984, Decker y Keller, 1981, Jouglard, 1993)

$$\alpha^2 A_1 + 2\alpha d\lambda_c A_2 + (d\lambda_c)^2 A_3 = 0 \quad (43)$$

Donde

$$A_1 = \xi_c^T \mathbf{dK}_c(\xi_c) \xi_c \quad (44)$$

$$A_2 = \xi_c^T \mathbf{dK}_c(\xi_c) \mathbf{u}_0$$

$$A_3 = \mathbf{u}_0^T \mathbf{dK}_c(\xi_c) \mathbf{u}_0$$

Siendo  $\mathbf{dK}_c(\xi_c)$  la matriz incremental de rigidez en el punto crítico cuyos elementos  $dK_{cij}$  son funciones del autovector crítico  $\xi_c$

$$dK_{cij}(\xi_c) = \sum_k \frac{\partial^3 V}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} \Big|_c \xi_{ck} \quad (45)$$

La ecuación de bifurcación (43) proviene de imponer una condición de compatibilidad sobre las componentes del vector curvatura del camino de equilibrio (Jouglard, 1993, Cardona y Huespe, 1997) y debe ser verificada por todos los vectores tangentes en el punto crítico.

Luego las ecuaciones (39) y (43) forman un sistema de dos ecuaciones cuadráticas. Por el teorema de Bezout (Sturmfels, 2002) un sistema de  $p$  ecuaciones cuadráticas tiene  $2^p$  soluciones posibles, por lo tanto para dos ecuaciones deberíamos tener 4 soluciones distintas. Sin embargo notemos que si el par  $(\alpha, d\lambda_c)$  es solución de estas ecuaciones entonces el par opuesto  $(-\alpha, -d\lambda_c)$  también es solución y ambos pertenecen al mismo camino. Esto significa que si bien hay 4 vectores tangentes emanando del punto crítico sólo hay dos caminos de equilibrio que se intersectan en él.

Luego una de las soluciones debe ser la del camino fundamental  $(\alpha_f, d\lambda_f)$ , como vimos previamente para este camino, ec. (40), debemos tener  $\alpha_f = 0$  y la ec. (43) queda

$$(d\lambda_f)^2 A_3 = 0 \quad (46)$$

Como para el camino fundamental la componente  $d\lambda_f$  es siempre diferente de cero entonces debe ser nulo el coeficiente  $A_3$ .

$$\boxed{A_3 = 0} \quad (47)$$

Para el camino de bifurcación cuyo vector tangente viene definido por  $(\alpha_b, d\lambda_b)$  la ecuación de bifurcación queda

$$(\alpha_b)^2 A_1 + 2\alpha_b d\lambda_b A_2 = 0 \quad (48)$$

Debe notarse que para que exista una solución diferente de la fundamental el coeficiente  $A_2$  debe ser diferente de cero. De aquí en adelante supondremos que este coeficiente es siempre no nulo y por lo tanto podemos expresar

$$d\lambda_b = -\frac{A_1}{2A_2} \alpha_b \quad (49)$$

Sustituyendo en la ecuación de restricción paramétrica resulta

$$\alpha_b = \pm 1/\sqrt{1 + \beta^2 \gamma^2} \quad (50)$$

Luego la dirección del camino de pandeo en el punto crítico simple es

$$\boxed{d\mathbf{u}_b = \alpha_b \boldsymbol{\xi}_c + d\lambda_b \mathbf{u}_0} \quad (51)$$

El signo de  $\alpha_b$  en la ec.(50) se debe elegir de manera que  $d\lambda_b$  sea siempre negativo en (49). Notemos que si el coeficiente  $A_1$  fuese nulo resulta  $d\lambda_b = 0$  y estamos en la presencia de una bifurcación simétrica con vector tangente horizontal.

## 2.10 Aproximaciones a las matrices incrementales de rigidez

La mayoría de los programas de elementos finitos no calculan las matrices incrementales de rigidez  $d\mathbf{K}_c$  que dependen de las derivadas terceras de la energía potencial. A continuación se proponen dos alternativas posibles.

### 2.10.1 Aproximaciones a las matrices incrementales de rigidez usando diferencias finitas

Los tensores de tercer orden que participan en la definición de las matrices incrementales de rigidez, ec. (45), se pueden expresar como

$$\frac{\partial^3 V}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} \Big|_c = \frac{\partial}{\partial u_k} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j} \right) \Big|_c \quad (52)$$

Luego podemos usar diferencias finitas para aproximar esta derivada respecto de  $u_k$  como fue sugerido por (Wriggers y Simo, 1990)

$$\frac{\partial^3 V}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} \Big|_c \cong \frac{1}{\Delta u_k} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j} \Big|_{c+\Delta u_k} - \frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j} \Big|_c \right) \quad (53)$$

Donde  $\Delta u_k$  es un pequeño incremento en el desplazamiento  $u_k$ . Además  $c+\Delta u_k$  indica que la

expresión es evaluada en  $(u_1, u_2, \dots, u_{k+\Delta u_k}, \dots, u_n)$ .

De la ec. (8) tenemos que los coeficientes de la matriz de rigidez tangente en el punto crítico son

$$K_{ij}^c = \frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j} \Big|_c \quad (54)$$

Luego los tensores de tercer orden en el punto crítico se pueden expresar como

$$\frac{\partial^3 V}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} \Big|_c = \frac{\partial K_{ij}}{\partial u_k} \Big|_c \cong \frac{1}{\Delta u_k} (K_{ij}^{c+\Delta u_k} - K_{ij}^c) \quad (55)$$

Por lo tanto es posible aproximar a los elementos  $dK_{cij}$  de la matriz incremental de rigidez como

$$dK_{cij}(\xi_c) \cong \sum_k \frac{1}{\Delta u_k} (K_{ij}^{c+\Delta u_k} - K_{ij}^c) \xi_{ck} \quad (56)$$

Notemos que para realizar este cálculo sólo es necesario utilizar las rutinas que calculan la matriz de rigidez tangente en una configuración específica  $c$ . Además esta expresión es independiente de la formulación utilizada para definir la matriz de rigidez tangente siempre que esta quede completamente definida por los desplazamientos  $u_i$ .

### 2.10.2 Matrices incrementales de rigidez usando energía potencial aproximada

El procedimiento anterior requiere tener acceso a las rutinas internas de los programas, lo cual no es siempre posible. Otra alternativa es calcular por fuera las matrices de rigidez incrementales asumiendo que la energía potencial se puede expresar como

$$V(\mathbf{u}, \lambda) = \frac{1}{2} U_{ij} u_i u_j + \frac{1}{6} U_{ijk} u_i u_j u_k + \frac{1}{24} U_{ijkl} u_i u_j u_k u_l - \lambda p_i u_i \quad (57)$$

Donde los tres primeros términos corresponden a una expansión en series de Taylor hasta términos cuárticos en desplazamientos y hemos asumido la convención de suma sobre índices repetidos.

En este caso se puede demostrar (Jougard, 1993) que los coeficientes  $dK_{cij}$  de la matriz incremental de rigidez son

$$dK_{cij}(\xi_c) \cong U_{ijk} \xi_{ck} + U_{ijkl} u_l^c \xi_{ck} \quad (58)$$

Donde  $\mathbf{u}^c$  es la configuración de equilibrio en el punto crítico.

Notemos que si desarrollamos la energía de deformación  $U(\mathbf{u})$  en series de Taylor de los desplazamientos entonces la matriz de rigidez geométrica viene dada por (12)

$$KG_{ij}(\mathbf{u}^0) = \frac{\partial^3 V}{\partial \lambda \partial u_i \partial u_j} \Big|_0 = U_{ijk} u_k^0 \quad (59)$$

Donde  $\mathbf{u}^0$  representa el estado base, o sea los desplazamientos para el estado de cargas de referencias  $\mathbf{p}$ . Si despreciamos los términos de cuarto orden y superiores en la energía de deformación entonces podemos aproximar la matriz incremental de rigidez como

$$dK_{cij}(\xi_c) \cong KG_{ij}(\xi_c) \quad (60)$$

Luego podrían usarse las mismas rutinas utilizadas para calcular la matriz de rigidez

geométrica pero utilizando el autovector crítico  $\xi_c$  en vez de los desplazamientos iniciales  $\mathbf{u}^0$ . Debemos destacar que en algunas formulaciones de la matriz de rigidez geométrica (Cook y otros, 2002) sólo se consideran las contribuciones de los desplazamientos que generan esfuerzos axiales y eso invalida la aproximación (60) ya que los autovectores críticos  $\xi_c$  en general son deformadas con flexión predominante. Por lo tanto, esta aproximación será válida si para el cálculo de la matriz de rigidez geométrica se han considerado todas las componentes de los desplazamientos iniciales.

Notemos además que esta última aproximación es válida sólo si el trabajo de las fuerzas externas varía linealmente con los desplazamientos. Puede haber situaciones donde, a pesar que las cargas sean conservativas, su trabajo puede variar de manera no lineal con los desplazamientos. En estas situaciones la aproximación (60) también deja de ser válida.

## 2.11 Ecuaciones de bifurcación en un punto crítico múltiple

Consideremos un punto crítico de multiplicidad  $m$  sobre el camino fundamental lineal. Sobre este punto las soluciones  $\mathbf{du}_c$  de las ecuaciones de equilibrio incremental (25) pueden expresarse como

$$\mathbf{du}_c = \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i \psi_{ci} \right) + d\lambda_c \mathbf{u}_0 \quad (61)$$

Utilizando a la longitud de arco como parámetro para describir el avance sobre el camino de equilibrio, todas las componentes del vector tangente  $\mathbf{du}_c$ ,  $d\lambda_c$  de los caminos de bifurcación deben verificar la ecuación de restricción paramétrica (38). Por lo tanto sustituyendo en esta ecuación los vectores  $\mathbf{du}_c$  y asumiendo que los autovectores críticos están ortonormalizados entre sí resulta

$$\sum_{i=1}^m (\alpha_i)^2 + \beta^2 (d\lambda_c)^2 = 1 \quad (62)$$

Notando que las componentes del vector tangente al camino fundamental también deben satisfacer esta ecuación y como la componente  $\mathbf{du}_c$  debe ser ortogonal a todos los autovectores críticos múltiples  $\psi_{ci}$  resultan

$$\psi_{cj}^T \mathbf{du}_f = \left( \sum_{i=1}^m \alpha_{fi} \psi_{cj}^T \psi_{ci} \right) + d\lambda_c \psi_{cj}^T \mathbf{u}_0 = \alpha_{fi} = 0 \quad (63)$$

Donde hemos utilizado las condiciones de ortonormalidad (23) y el resultado implica que todos los coeficientes  $\alpha_{fi}$  del camino fundamental deben ser nulos.

Las componentes de los vectores tangentes deben satisfacer también las siguientes ecuaciones de bifurcación múltiple, una por cada autovector crítico múltiple

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k A_{1_{ijk}} + 2 \sum_{j=1}^m \alpha_j d\lambda A_{2_{ij}} + (d\lambda)^2 A_{3_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (64)$$

Donde los coeficientes  $A_{1_{ijk}}, A_{2_{ij}}, A_{3_i}$  son

$$\begin{aligned}
A_{1ijk} &= \boldsymbol{\psi}_{ci}^T \mathbf{dK}_c(\boldsymbol{\psi}_{cj}) \boldsymbol{\psi}_{ck} \\
A_{2ij} &= \boldsymbol{\psi}_{ci}^T \mathbf{dK}_c(\boldsymbol{\psi}_{cj}) \mathbf{u}_0 \\
A_{3i} &= \mathbf{u}_0^T \mathbf{dK}_c(\boldsymbol{\psi}_{ci}) \mathbf{u}_0
\end{aligned} \tag{65}$$

Las ecuaciones (62) y (64) forman un sistema de  $m+1$  ecuaciones cuadráticas en las incógnitas  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, d\lambda_c)$ . Por el teorema de Bezout tenemos  $2^{m+1}$  soluciones posibles, esto es habrá  $2^{m+1}$  vectores tangentes distintos en el punto crítico. Sin embargo notemos que si el conjunto  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, d\lambda_c)$  es solución de estas ecuaciones entonces el conjunto opuesto  $(-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_m, -d\lambda_c)$  también es solución y ambos pertenecen al mismo camino. Esto significa que en un punto de bifurcación de multiplicidad  $m$  si bien hay  $2^{m+1}$  vectores tangentes emanando del punto crítico sólo hay  $2^m$  caminos de equilibrio que se intersectan en él.

Luego una de las soluciones debe ser la del camino fundamental  $(\alpha_i, d\lambda_f)$ , como vimos previamente para este camino, ec.(63), debemos tener  $\alpha_{fi} = 0$  y la ec. (43) queda

$$(d\lambda_f)^2 A_{3i} = 0 \tag{66}$$

Como para el camino fundamental la componente  $d\lambda_f$  es siempre diferente de cero entonces deben ser nulos todos los coeficientes  $A_{3i}$ .

$$A_{3i} = 0 \tag{67}$$

Luego para un camino de bifurcación cuyo vector tangente viene definido por el conjunto  $(\alpha_{b1}, \alpha_{b2}, \dots, \alpha_{bm}, d\lambda_b)$  las ecuaciones de bifurcación (64) quedan

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_{bj} \alpha_{bk} A_{1ijk} + 2 \sum_{j=1}^m \alpha_{bj} d\lambda_b A_{2ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \tag{68}$$

Notemos que ahora a diferencia del caso de un punto crítico simple, la solución no es obvia y es necesario recurrir a algún método de solución de ecuaciones cuadráticas simultáneas para encontrar la solución de las ecs. (62) y (68), por ejemplo (Williams,2010).

Una vez encontradas estas soluciones podemos expresar a la componentes  $\mathbf{du}_c$  de un camino de bifurcación en el punto crítico múltiple como

$$\mathbf{du}_b = \left( \sum_{i=1}^m \alpha_{bi} \boldsymbol{\psi}_{ci} \right) + d\lambda_b \mathbf{u}_0 \tag{69}$$

El primer término es el *modo de pandeo* que define la componente de deformación, ortogonal al camino fundamental, que toma cada camino de bifurcación. Notemos que los modos de pandeo no se corresponden ni en cantidad ni en forma con los autovectores crítico y en general habrá muchos más modos de pandeo que autovectores críticos (Sarpero, 2016).

### 3 METODOLOGÍA PROPUESTA

La idea es definir las imperfecciones geométricas en la dirección de los modos de pandeo, asumiendo que estas son las “peores” imperfecciones para luego efectuar un análisis no lineal sobre la estructura imperfecta.

Luego los pasos a seguir son los siguientes:

1. Determinar el autovector crítico (o los autovectores críticos en el caso de una carga crítica coincidente) asociado a la carga crítica más baja.
2. Generar la combinación de autovectores críticos que dan lugar a los modos de pandeo.
3. Utilizar esta combinación de modos para generar imperfecciones en la geometría asignando una amplitud que es función de las tolerancias constructivas.
4. Realizar un análisis no lineal para cada una de las imperfecciones para determinar cuál es la más desfavorable.

A continuación analizaremos estos pasos en más detalle.

### 3.1 Determinación de autovectores críticos

Esto se puede hacer con cualquier programa de análisis estructural que calcule los autovectores críticos con el problema linealizado de autovalor.

En ciertas situaciones, como en cáscaras delgadas, las cargas críticas, si bien no son coincidentes, se encuentran muy próximas unas de otras, dando lugar al fenómeno de interacción entre modos (Thompson y Hunt, 1984). En estos casos conviene asumir que las cargas críticas son coincidentes y se combinan todos los autovectores asociados a estas cargas críticas que se encuentran muy próximas entre sí.

### 3.2 Generación de la combinación de autovectores críticos

Para el caso de un punto crítico simple donde sólo tenemos un autovector crítico no hay problema. Sin embargo si tenemos varios autovectores críticos debemos resolver un sistema de ecuaciones simultáneas para obtener los coeficientes  $\alpha_{bi}$  para la combinación de modos, ec. (69).

La complejidad reside en obtener las matrices de rigidez incrementales  $\mathbf{dK}$ , ec. (45) para calcular los coeficientes  $A_{1ijk}$ ,  $A_{2ij}$  de las ecuaciones de bifurcación.

Una alternativa es usar una aproximación a las derivadas en diferencias finitas como se mostró en la ec. (56). Sin embargo esto requiere tener acceso a las rutinas que calculan las matrices de rigidez, lo cual no siempre es posible con programas comerciales.

Otra alternativa posible, si estamos usando software comercial, es calcular las matrices  $\mathbf{dK}$  por fuera del programa asumiendo una formulación aproximada para la energía de deformación. Esto es más laborioso porque requiere un desarrollo para cada tipo de elemento finito empleado.

Finalmente otra posibilidad que merece ser estudiada es aproximar las matrices  $\mathbf{dK}$  mediante las matrices de rigidez geométrica. En este caso sólo se necesitan modificaciones mínimas en los programas de elementos finitos.

Una vez calculadas las matrices incrementales con cualquiera de los procedimientos anteriores podemos calcular los coeficientes  $A_{1ijk}$ ,  $A_{2ij}$  de las ecuaciones de bifurcación y resolviendo el sistema de ecuaciones cuadráticas dado por (62) y (68) podemos obtener los coeficientes  $\alpha_{bi}$  de la combinación de modos.

### 3.3 Generación de imperfecciones como combinación de modos

El comportamiento de la estructura imperfecta es asintótico a los caminos de bifurcación luego es suficiente con introducir una imperfección en la dirección de cada modo de pandeo para inducir este comportamiento.

La forma de la imperfección viene dada por un vector  $\mathbf{v}$  de imperfecciones nodales, esto es

asumimos que la imperfección viene dada por una configuración deformada de la estructura.

Si tenemos un punto crítico simple la imperfección es directamente proporcional al modo de pandeo, esto es

$$\mathbf{v} = \pm \varepsilon (\boldsymbol{\xi}_c) \quad (70)$$

Donde  $\varepsilon$  mide la amplitud de la imperfección. Cada miembro estructural tiene una tolerancia constructiva o de montaje para la amplitud de la imperfección. El parámetro  $\varepsilon$  debería adoptar el máximo valor posible sin que se sobrepasen estas tolerancias en ningún miembro.

En el caso de un punto crítico múltiple debemos generar imperfecciones en la forma de cada modo de pandeo

$$\mathbf{v} = \pm \varepsilon \left( \sum_{i=1}^m \alpha_{bi} \boldsymbol{\Psi}_{ci} \right) \quad (71)$$

Adoptamos el mismo criterio anterior para definir la amplitud de la imperfección.

Las imperfecciones se pueden ingresar como desplazamientos de los nodos de la malla y existen programas que facilitan la entrada de esta manera (SIMULIA, 2016). Sin embargo debe tenerse la precaución que la malla sea lo suficientemente refinada para capturar adecuadamente la forma de la imperfección.

### 3.4 Análisis no lineal de la estructura imperfecta

Una vez introducidas las imperfecciones debemos analizar el modelo imperfecto de manera incremental hasta llegar a las magnitudes de servicio especificadas por las normas.

Notemos que una imperfección puede adoptar valores negativos o positivos y el comportamiento puede ser diferente en una u otra dirección. Siempre deberíamos adoptar el signo en la dirección de cargas decrecientes. Esto es si  $d\lambda_c$  es negativo adoptamos el signo positivo en (70) o (71), en caso contrario el signo negativo y si  $d\lambda_c$  fuese nulo o cuasi-nulo verificamos los dos signos de la imperfección.

Durante el análisis se debe verificar que la matriz de rigidez tangente permanezca siempre definida positiva hasta el nivel final de cargas para asegurarnos que la estructura puede soportar de manera estable las mismas.

## 4 CONCLUSIONES

Se ha presentado una metodología para el análisis de una estructura imperfecta mostrando las diferentes etapas de análisis. Se ha hecho hincapié en la posibilidad de utilizar programas existentes realizando las mínimas modificaciones posibles.

En principio la metodología se presenta promisoría aunque son necesarios una gran cantidad de ensayos numéricos para certificar la viabilidad de la propuesta, especialmente en la resolución de sistemas de ecuaciones cuadráticas simultáneas, donde a diferencia de los sistemas de ecuaciones lineales no existe una estrategia que se presente a priori como la más robusta y se deberán analizar las alternativas disponibles.

Finalmente se desea destacar que si bien las normas constructivas impulsan el análisis de estructuras imperfectas no existe al presente una metodología general que permita automatizar el análisis estructural de manera confiable y el presente trabajo se encamina en ese sentido.

## REFERENCIAS

ANSI/AISC 360-10, *Specification for structural steel buildings*, American Institute of Steel Construction, Chicago, USA, 2010.

- Bazant Z.P y Cedolin L., *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*, World Scientific, 2010.
- Cardona A. y Huespe A.E., Métodos de continuación para el trazado de curvas de equilibrio primarias y secundarias en análisis de mecanismos, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 13(4):423-436, 1997.
- Crisfield M.A., *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Essentials*, John Wiley, 1996.
- Cook D.C., Malkus D.S., Plesha M.E. y Witt R.J., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley and Sons, 2002.
- Decker D.N. y Keller H.B., Path following near bifurcation, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 34:149-175, 1981.
- Deml M. y Wunderlich W., Direct evaluation of the ‘worst’ imperfection shape in shell buckling, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149:201-222, 1997.
- EUROCODE 3, *Design of Steel Structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings*, European Committee for Standardization (CEN), Brussels, 2009.
- Galambos, T.V., *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, John Wiley, 1998.
- Godoy, L.A., *Thin-Walled Structures with Structural Imperfections*, Elsevier, 1996.
- Ho. D., Buckling load of non-linear systems with multiple eigenvalues. *International Journal of Solids and Structures*, 10:1315–1330, 1974.
- Jouglard C.E., *Análise não linear incremental assintótica da estabilidade de estruturas elásticas*, M.Sc. Tesis, COPPE-UFRJ, 1993.
- Lanzo A.D. y Garcea G., Koiter’s analysis of thin-walled structures by a finite element approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:3007–3032, 1996.
- Riks E., Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47:219-259, 1984.
- Sarpero C.J., *Análisis de la estabilidad de estructuras con puntos críticos múltiples*, Tesis de Maestría en Ingeniería Estructural, UTN-FRA, 2016.
- Simulia, *ABAQUS*, ver. 6.14, Dassault Systèmes, 2016.
- Sturmfels, B., *Solving Systems of Polynomial Equations*, American Mathematical Society, 2002.
- Thompson J.M.T. y Hunt G.W., *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley, 1973.
- Thompson J.M.T. y Hunt G.W., *Elastic Instability Phenomena*, John Wiley, 1984.
- Williams M.P., Solving polynomial equations using linear algebra, *Johns Hopkins APL Technical Digest*, 28(4):354-363, 2010.
- Wriggers P. y Simo J.C., A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30:155–176, 1990.