

VIBRACIONES DE VIGAS CONSTRUIDAS CON MATERIAL FUNCIONALMENTE GRADUADO QUE SOPORTAN MASAS ADOSADAS

Gonzalo J. Gilardi ^{a,b}, Carlos A. Rossit ^{a,b} y Diana V. Bambill ^{a,b}

^a *Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, (IMA), Universidad Nacional del Sur,
Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, <http://www.uns.edu.ar>*

^b *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina.*

gonzalo.gilardi@uns.edu.ar, carossit@criba.edu.ar, dbambill@criba.edu.ar

Palabras clave: Vibración de vigas, AFG vigas, masa adosada, sección variable, Método de Rayleigh-Ritz, Método de Cuadratura Diferencial Generalizada.

Resumen. La presencia de una masa sobre una estructura resistente en un entorno vibratorio es una situación que se presenta en innumerables circunstancias tecnológicas de la ingeniería, desde un motor funcionando sobre una viga hasta componentes electrónicos montados sobre plaquetas de circuitos impresos.

En esos casos pueden producirse severos esfuerzos estructurales. Para evitarlo, se trata de elevar las frecuencias naturales del sistema acoplado estructura-masa para alejarlas de la frecuencia de operación, generalmente baja. Esto puede lograrse mediante la utilización de materiales avanzados en que sus propiedades varían gradualmente con alguna de sus dimensiones.

En particular, en el elemento estructural de utilización más difundida, la viga, es adecuado a tal fin que las propiedades del material varíen a lo largo del eje. El problema dinámico de la viga vibrante conduce, en ese caso, a ecuaciones con coeficientes variables dificultando su tratamiento matemático. Es por ello que, en general, para la determinación de los parámetros que caracterizan su comportamiento dinámico es necesario recurrir a métodos aproximados.

En el presente trabajo se utilizan los métodos aproximados de Rayleigh-Ritz y Cuadratura Diferencial Generalizada para analizar el comportamiento dinámico de vigas que sostienen masas, cuya sección puede variar a lo largo de su eje y están constituidas por materiales (combinación de acero y alúmina) cuyas propiedades varían funcionalmente a lo largo de su directriz. Se evalúan variados ejemplos numéricos de vigas en voladizo con uno y dos tramos, con distintas composiciones, variación lineal en las propiedades del material y diferentes magnitudes de masas puntuales adosadas. El comportamiento de la viga es asumido siguiendo la teoría de Euler-Bernoulli. Los resultados obtenidos, para algunos casos particulares, se comparan con resultados publicados en la literatura técnico-científica y paralelamente se analiza el efecto de rigidización dinámica que se logra en alguno de ellos.

1 INTRODUCCIÓN

En la ingeniería existen diversas circunstancias tecnológicas en las que se evidencia la presencia de masas adosadas sobre una estructura resistente bajo un entorno vibratorio, ya sea un motor trabajando adosado a una viga o bien componentes electrónicos montados sobre plaquetas de circuitos impresos, etc. Debido a que el funcionamiento de un motor es capaz de introducir tensiones dinámicas severas en el elemento estructural, es primordial para el ingeniero predecir las frecuencias naturales del sistema elemento-motor (viga-masa acoplada), con el fin de obtener un diseño apropiado de los elementos estructurales.

En las últimas tres décadas, se ha logrado un valioso progreso en el estudio y utilización de materiales avanzados cuyas propiedades varían gradualmente con alguna de sus dimensiones (Functionally Graded Materials-FGM-), con aplicaciones a elementos resistentes. Las características del material adquieren mayor importancia cuando el elemento estructural se encuentra en entornos vibratorios, considerando la influencia del efecto inercial.

Los FGM fueron empleados por primera vez a mediados de los años ochenta, por un grupo de investigadores japoneses que enfrentó el reto de proyectar una barrera térmica para un avión espacial hipersónico, Niino et al. (1987). Consecuentemente, esto llevaría a resolver el problema de delaminación que sufren los materiales compuestos cuando son sometidos a condiciones extremas de esfuerzos, Wang (1983), Martinez et al. (2011). Este material revolucionario elimina las interfaces bruscas y las sustituye por una interfaz gradual que produce una transición suave entre un material y el próximo. En consecuencia, se reducen las tensiones residuales y térmicas, así como los factores de concentración de tensiones que se hallan en los compuestos laminados.

Esta clase de materiales avanzados se puede fabricar mediante una ley de variación predeterminada, de manera que el contenido en porcentaje de dos o más materiales que constituyan al nuevo material, permitan obtener las propiedades requeridas (con un gradiente deseado) en las direcciones espaciales establecidas. Esta libertad en el diseño, les otorga la característica más particular y distintiva, que es su capacidad para adaptarse a una aplicación específica.

En virtud de las características favorables citadas precedentemente, se han realizado gran cantidad de estudios acerca del comportamiento estático y dinámico de las estructuras resistentes de FGM. Originalmente, la tarea investigativa estableció un gran avance en el campo de la Teoría de la Elasticidad, el estudio de placas y láminas construidas con estos materiales avanzados. Paradójicamente, su aplicación a vigas compuestas por FGM se extendió a posteriori.

Sankar (2001), desarrolló un modelo de viga Euler-Bernoulli con FGM para abordar un problema estático en una viga con vínculos simplemente apoyados. Luego, Aydogdu y Taskin (2007), estudiaron las vibraciones transversales libres de una viga simplemente apoyada. Adicionalmente Chabraborty et al. (2003), desarrollaron un elemento finito para estudiar el comportamiento termoelástico de vigas con FGM. Lu y Chen (2005) y Zhong y Yu (2007), desarrollaron complejos procedimientos analíticos para resolver en forma exacta las vigas con FGM dentro del marco de la Teoría de la Elasticidad. Posteriormente Li (2008), presentó un estudio para analizar las vigas Euler-Bernoulli, Rayleigh y Timoshenko en forma conjunta, considerando FGM.

Los antecedentes bibliográficos evidencian que los primeros trabajos publicados sobre vigas con FGM consideraron, en su mayoría, la gradación de las propiedades del material en la dirección transversal al eje de la viga, siendo menor la cantidad de trabajos que trataron la gradación de las propiedades del material en la dirección del eje (Axially Functionally Graded -AFG-). Probablemente esto se deba a que el problema se torna más complicado de resolver

cuando aparecen coeficientes variables en las ecuaciones gobernantes. A causa de las dificultades en el tratamiento matemático, se han obtenido pocas soluciones analíticas y particularmente para gradientes arbitrarios específicos. Elishakoff y colaboradores (2004a, b), (2005a, b), haciendo uso del método semi-inverso, abordaron diversos casos de vigas AFG.

Huang y Li (2010), resolvieron el problema transformando la ecuación diferencial gobernante con coeficientes variables en una ecuación integral de Fredholm. Alshorbgy et al. (2011), investigaron las características dinámicas de vigas no-uniformes con graduación del material axialmente o transversalmente en la altura. Çetin y Şimşek (2011), obtuvieron frecuencias de vibración libre de vigas AFG embebidas en un medio elástico. Shahba y Rajasekaran (2012), estudiaron las vibraciones y el pandeo de vigas AFG Euler-Bernoulli utilizando el método de elementos finitos.

Agköz y Civalek (2013), estudiaron las vibraciones longitudinales de barras AFG sobre la base de la teoría del gradiente de deformaciones recurriendo al método de Rayleigh-Ritz. Gilardi et al. (2015), estudiaron las vibraciones transversales libres de una viga AFG Euler-Bernoulli en voladizo con una masa concentrada en su extremo libre, empleando el método de Rayleigh-Ritz.

El presente trabajo aborda el estudio de vibraciones transversales libres de vigas constituidas por materiales AFG. El uso de tales materiales en el caso de vigas que soportan equipos electromecánicos (representados por la masa), tiene como finalidad rigidizar de forma dinámica a la viga. Es decir, reducir el peso del elemento de manera adecuada para que al mismo tiempo se incremente su rigidez global. El objetivo es elevar las frecuencias naturales de la viga, principalmente la frecuencia fundamental, para que ésta esté lejos de la frecuencia de funcionamiento del equipo conectado y de este modo se evite el fenómeno de resonancia.

Las soluciones del modelo se obtienen empleando los conocidos métodos aproximados de Rayleigh-Ritz (Ilanko et al. 2014) y cuadratura diferencial generalizada (Generalized Differential Quadrature Method-GDQM-) (Liu y Wu 2001), posibilitando su comparación para esta aplicación específica.

2 CONSIDERACIONES GENERALES DEL MODELO DE ANÁLISIS

El modelo desarrollado considera una viga en voladizo de dos tramos, escalonada y con una masa puntual adosada en su extremo libre. La viga presenta sección transversal A de doble simetría (rectangular) ahusada en la dirección de su directriz y posee propiedades de material AFG en cada tramo. Los ejes de coordenadas tienen origen en el extremo izquierdo de la viga; el eje \bar{x} coincide con el eje de la viga en la posición sin flexionar y el eje \bar{y} es perpendicular al eje \bar{x} en el baricentro de la sección transversal inicial.

La Figura 1 presenta un esquema del modelo, donde se denota como b al ancho, h a la altura, L a la longitud de la viga y m a la masa adosada.

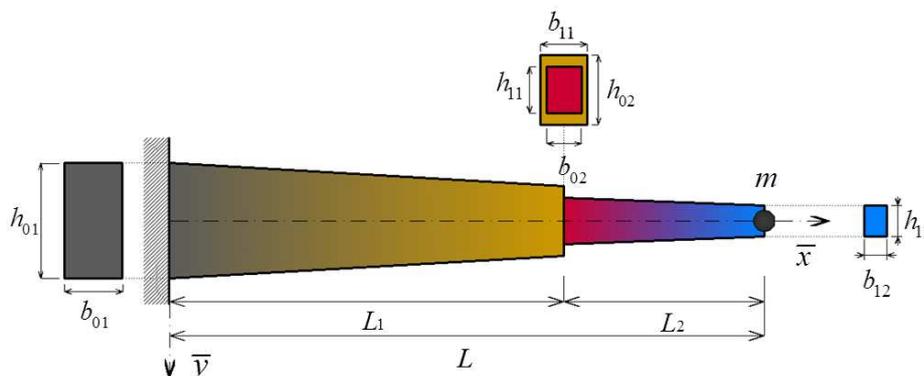


Figura 1: Esquema general del modelo

Cada parámetro geométrico posee un subíndice que identifica el extremo del tramo al que se está haciendo referencia. Es decir, “0” para el extremo izquierdo y “1” para el derecho. Y además, un subíndice que identifica el tramo en consideración, “1” y “2” respectivamente.

3 CARACTERÍSTICAS GEOMETRÍAS Y GRADACIÓN DE LAS PROPIEDADES DEL MATERIAL EN LA VIGA

La particularidad de trabajar con una viga de características geométricas descriptas y constituida por materiales AFG, cuyas propiedades elásticas en consideración son ρ la densidad de masa por unidad de longitud y E el módulo de Young, hace que sea necesario definir una expresión genérica que describa tanto la variación de la sección transversal como la distribución de los materiales constituyentes. Se adopta entonces, una ley de la forma:

$$T_k(\bar{x}) = T_{0k} f_{Tk}(\bar{x}) \quad \text{con } k = 1, 2 \quad (1)$$

donde $T_k(\bar{x})$ representa una característica de la viga (geométrica o del material) que varía en la dirección axial de la viga desde un valor inicial T_{0k} y según una distribución $f_{Tk}(\bar{x})$.

Para el desarrollo de los cálculos se considera la adimensionalización de la coordenada espacial \bar{x} respecto de la longitud L de la viga. Y además, se define la coordenada x_s donde la sección presenta el escalón.

$$x = \bar{x} / L \rightarrow L dx = d\bar{x} \quad ; \quad x_s = L_1 / L \quad (2)$$

Luego, las propiedades del material y características geométricas pueden ser escritas como:

$$T_k(x) = T_{0k} \left[1 + \left(\frac{T_{1k}}{T_{0k}} - 1 \right) (x)^n \right] \quad \text{con } f_{Tk}(x) = 1 + \left(\frac{T_{1k}}{T_{0k}} - 1 \right) (x)^n, \quad \text{para } k = 1, 2. \quad (3)$$

donde n es el número que determina el grado de variación de la función. En particular

$$\begin{aligned} E_k(x) &= E_{0k} f_{Ek}(x), \quad \rho_k(x) = \rho_{0i} f_{\rho i}(x) \\ I_k(x) &= I_0 f_I(x), \quad A_k(x) = b_k(x) h_k(x) = A_{0k} f_{Ak}(x) \\ b_k(x) &= b_{0k} f_{bk}(x), \quad h_k(x) = h_{0k} f_{hk}(x); \quad \text{con } k = 1, 2 \end{aligned} \quad (4)$$

donde I es el momento de inercia de la sección transversal A . Y obviamente, $f_{Ak}(x) = f_{bk}(x) f_{hk}(x)$ y $f_{Ik}(x) = f_{bk}(x) f_{hk}^3(x)$.

4 MÉTODOS APROXIMADOS

4.1 Método de Rayleigh-Ritz

Como se desean obtener los coeficientes de frecuencias naturales del sistema, la deflexión de la viga puede expresarse, para sus modos normales de vibración, como:

$$v(x, t) = V(x) \cos(\omega t) \quad (5)$$

donde $V(x)$ es la amplitud de desplazamiento y ω es la frecuencia natural circular de vibración transversal de la viga.

Para aplicar el método es necesario aproximar la componente espacial de la solución como:

$$V(x) \cong V_a(x) = \sum_{j=1}^P C_j \varphi_j \quad (6)$$

donde C_j son constantes arbitrarias, φ_j son funciones coordenadas que satisfacen las

condiciones de borde esenciales, y P el número de términos a sumar. Para el presente análisis se elige $P = 20$, ya que resulta suficiente para obtener una buena precisión en los resultados.

El funcional de energía J para el problema de vibraciones en vigas puede ser escrito en términos de la energía máxima de deformación $U_{máx}$ y de la energía cinética máxima $T_{máx}$

$$J = U_{máx} - T_{máx}, \quad (7)$$

y para el caso de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli de dos tramos adoptan las siguientes formas, considerando la función aproximada $V_a(x)$:

$$U_{máx} = \frac{1}{2} \int_0^{x_s} \frac{E_1(x) I_1(x)}{L^3} \left[\frac{d^2 V_a(x)}{dx^2} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x_s}^1 \frac{E_2(x) I_2(x)}{L^3} \left[\frac{d^2 V_a(x)}{dx^2} \right]^2 dx$$

$$T_{máx} = \frac{1}{2} \omega^2 \left\{ \int_0^{x_s} \rho_1(x) A_1(x) L [V_a(x)]^2 dx + \int_{x_s}^1 \rho_2(x) A_2(x) L [V_a(x)]^2 dx + m [V_a(x)|_{x=1}]^2 \right\} \quad (8)$$

Se reemplazan las Ecs. (4) en la Ec. (8) y posteriormente en la Ec. (7). Luego, el funcional J puede escribirse de la siguiente manera:

$$J[V_a(x)] = \frac{E_{01} I_{01}}{2L^3} \left\{ \int_0^{x_s} f_{E1} f_{I1} \left[\frac{d^2 V_a(x)}{dx^2} \right]^2 dx + C_E C_I \int_{x_s}^1 f_{E2} f_{I2} \left[\frac{d^2 V_a(x)}{dx^2} \right]^2 dx \right. \\ \left. - \Omega^2 \left[\int_0^{x_s} f_{\rho1} f_{A1} L [V_a(x)]^2 dx + C_\rho C_A \int_{x_s}^1 f_{\rho2} f_{A2} L [V_a(x)]^2 dx + M [V_a(x)|_{x=1}]^2 \right] \right\} \quad (9)$$

$$\text{con } \Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_{01} A_{01}}{E_{01} I_{01}}}, \quad C_E = \frac{E_{02}}{E_{01}}, \quad C_I = \frac{I_{02}}{I_{01}}, \quad C_\rho = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}, \quad C_A = \frac{A_{02}}{A_{01}} \text{ y } M = \frac{m}{\rho_0 A_0 L}$$

Ω son los coeficientes de frecuencia. M es el coeficiente de masas que relaciona la masa puntual m con la masa de una viga de material homogéneo y sección constante.

Seguidamente, el funcional es minimizado respecto a cada constante arbitraria C_j

$$\frac{\partial J[V_a(x)]}{\partial C_j} = 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, P \quad (10)$$

lo que da como resultado un sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{R} \{C_j\} = 0. \quad (11)$$

Sea el determinante de la matriz \mathbf{R} la ecuación de los coeficientes de frecuencias, la misma puede expresarse de la siguiente manera:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M} \quad (12)$$

donde

$$k_{ij} = \int_0^{x_s} f_{E1}(x) f_{I1}(x) \varphi_i'' \varphi_j'' dx + C_E C_I \int_{x_s}^1 f_{E2}(x) f_{I2}(x) \varphi_i'' \varphi_j'' dx$$

$$m_{ij} = \int_0^{x_s} f_{\rho1}(x) f_{A1}(x) \varphi_i \varphi_j dx + C_\rho C_A \int_{x_s}^1 f_{\rho2}(x) f_{A2}(x) \varphi_i \varphi_j dx + M \varphi_i|_{x=1} \varphi_j|_{x=1} \quad (13)$$

k_{ij} y m_{ij} son los elementos que constituyen a las matrices de rigidez \mathbf{K} y de masa \mathbf{M}

respectivamente. Entonces, el problema de autovalores puede ser expresados como:

$$|\mathbf{KM}^{-1} - \Omega^2 \mathbf{I}| = |\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (14)$$

con $\lambda = \sqrt{\Omega}$ como los autovalores de la matriz \mathbf{B} .

En el caso de la viga en voladizo, se propone la siguiente función coordenada

$$\{\varphi_j\}_{j=1}^P = \{x^{j+1}\}_{j=1}^P. \quad (15)$$

que satisface las condiciones de borde esenciales $\varphi_{(x=0)} = \varphi'_{(x=0)} = 0$, según requiere el método.

4.2 Método de Cuadratura Diferencial Generalizada (GDQM)

En este caso los coeficientes de frecuencia naturales del sistema viga-masa adosada, se obtienen de resolver un sistema de ecuaciones análogas de cuadratura diferencial. Dichas ecuaciones se adquieren de transformar la ecuación diferencial gobernante del problema en un sistema de ecuaciones lineales equivalente.

Para estudiar las vibraciones transversales libres de una viga AFG, se parte entonces de la ecuación diferencial gobernante que brinda la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, ya expresada con la coordenada espacial adimensionalizada según la Ec. (2),

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E(x) I(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho(x) A(x) L^4 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (16)$$

Debido a que se considera una viga de dos tramos, el dominio de aplicación de la Ec. (16), puede ser expresado de forma segmentada como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E_1(x) I_1(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho_1(x) A_1(x) L^4 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} &= 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq x_s \quad \text{para el tramo 1} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E_2(x) I_2(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho_2(x) A_2(x) L^4 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} &= 0 \quad \text{para } x_s \leq x \leq 1 \quad \text{para el tramo 2.} \end{aligned} \quad (17)$$

Luego, se reemplaza la Ec. (5) en la Ec. (17) para separar variables, y teniendo en cuenta la Ec. (4) se desarrolla la regla de la cadena. Las expresiones que se obtienen son:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}(x) \frac{d^2 V_1(x)}{dx^2} + \alpha_{21}(x) \frac{d^3 V_1(x)}{dx^3} + \alpha_{31}(x) \frac{d^4 V_1(x)}{dx^4} &= \Omega^2 V_1(x) \quad \text{con } \Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_{01} A_{01}}{E_{01} I_{01}}} \\ \chi \left[\alpha_{12}(x) \frac{d^2 V_2(x)}{dx^2} + \alpha_{22}(x) \frac{d^3 V_2(x)}{dx^3} + \alpha_{32}(x) \frac{d^4 V_2(x)}{dx^4} \right] &= \Omega^2 V_2(x) \quad \chi = \frac{C_E C_I}{C_\rho C_A} \end{aligned} \quad (18)$$

donde $\alpha_{1i}(x)$, $\alpha_{2i}(x)$ y $\alpha_{3i}(x)$ son los coeficientes de forma, y están definidos como:

$$\alpha_{1i} = \frac{f_{Ei}'' f_{Ii} + 2f_{Ei}' f_{Ii}' + f_{Ei} f_{Ii}''}{f_{\rho i} f_{A i}}, \alpha_{2i} = \frac{2(f_{Ei}' f_{Ii} + f_{Ei} f_{Ii}')}{f_{\rho i} f_{A i}}, \alpha_{3i} = \frac{f_{Ei} f_{Ii}}{f_{\rho i} f_{A i}} \quad \text{para } i = 1, 2 \quad \text{y con } f_j' = \frac{df_j}{dx} \quad (19)$$

Siguiendo con el GDQM, la viga AFG es discretizada en una grilla de N_k nodos de prueba, por tramo, del tipo Chebyshev–Gauss–Lobato (Zong y Zhang, 2009) (Para el presente estudio se adoptó $N_k = 18$, valor obtenido de un análisis de convergencia y para el cual el método brinda muy buena precisión a los resultados):

$$x_{i,k} = \frac{1 - \cos\left[\frac{(i-1)\pi}{(N_k - 1)}\right]}{2} \frac{L_k}{L} \text{ con } i = 1, 2, \dots, N_k \text{ y } k = 1, 2 \quad (20)$$

con $x_{i,k}$ como la coordenada espacial que ubica al nodo i en el sub-dominio o tramo k de la viga. La derivada de orden (q) del desplazamiento V en el nodo i de la grilla en el tramo k . De acuerdo con las reglas del método (Bert y Malik, 1996), se expresan como:

$$\left. \frac{d^{(q)}V}{dx^q} \right|_{x_{ik}} = \sum_{j=1}^{N_k} D_{ijk}^{(q)} V_{jk} \text{ con } k = 1, 2 \quad (21)$$

V_{jk} es el desplazamiento del nodo j en el tramo k , y $D_{ijk}^{(q)}$ son los coeficientes de ponderación obtenidos a través de las funciones de interpolación de Lagrange (Karami et al. 2003):

$$\prod(x_{ik}) = \prod_{j=1 \text{ con } j \neq i}^{N_k} (x_{ik} - x_{jk}) \text{ con } i, j = 1, 2, \dots, N_k \text{ y } k = 1, 2 \quad (22)$$

$$D_{ijk}^{(1)} = \frac{\prod(x_{ik})}{(x_{ik} - x_{jk}) \prod(x_{jk})}, q = 1; D_{ijk}^{(q)} = D_{iik}^{(q-1)} D_{ijk}^{(1)} - \frac{D_{ijk}^{(q-1)}}{x_{ik} - x_{jk}}, q > 1 \quad (23)$$

$i, j = 1, 2, \dots, N_k \text{ con } k = 1, 2 \text{ y para } i \neq j$

$$D_{iik}^{(1)} = - \sum_{j=1 \text{ con } j \neq i}^{N_k} D_{ijk}^{(1)}, q = 1; D_{iik}^{(q)} = - \sum_{j=1 \text{ con } j \neq i}^{N_k} D_{ijk}^{(q)}, q > 1 \quad (24)$$

$i, j = 1, 2, \dots, N_k \text{ con } k = 1, 2 \text{ y para } i = j$.

Seguidamente, se aplica la regla definida en la Ec. (21) para obtener la ecuación gobernante análoga de cuadratura, la cual adopta la forma:

$$\alpha_{11}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} D_{ij1}^{(2)} V_{j1} + \alpha_{21}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} D_{ij1}^{(3)} V_{j1} + \alpha_{31}(x_{i1}) \sum_{j=1}^{N_1} D_{ij1}^{(4)} V_{j1} = \Omega^2 V_{i1} \text{ con } i = 3, 4, \dots, N_1 - 2 \quad (25)$$

$$\chi \left[\alpha_{12}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} D_{ij2}^{(2)} V_{j2} + \alpha_{22}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} D_{ij2}^{(3)} V_{j2} + \alpha_{32}(x_{i2}) \sum_{j=1}^{N_2} D_{ij2}^{(4)} V_{j2} \right] = \Omega^2 V_{i2} \text{ con } i = 3, 4, \dots, N_2 - 2$$

Para constituir el sistema de ecuaciones del problema, es necesario además obtener las condiciones de borde y continuidad análogas de cuadratura. Las mismas fueron obtenidas y adoptan las siguientes formas:

En $x = 0$

$$V_{i1} = 0 \text{ con } i = 1$$

$$\sum_{j=1}^{N_1} D_{ij1}^{(1)} V_{j1} = 0 \text{ con } i = 1$$

En $x = 1$

$$\sum_{j=1}^{N_2} D_{ij1}^{(2)} V_{j2} = 0 \text{ con } i = N_2 \quad (26)$$

$$\sum_{j=1}^{N_2} D_{ij1}^{(3)} V_{j2} = 0 \text{ con } i = N_2 \text{ sin masa}$$

$$-\frac{\rho_0 A_0 L}{m} C_E C_I \left[\beta_2(x) \sum_{j=1}^{N_2} D_{ij2}^{(2)} V_{j2} + f_{E2} f_{I2} \sum_{j=1}^{N_2} D_{ij1}^{(3)} V_{j2} \right] = \Omega^2 V_{i2} \text{ con } i = N_2 \text{ con masa}$$

con $\beta_2(x) = f_{E2} f_{I2}' + f_{E2}' f_{I2}$

En $x = x_1$

$$\begin{aligned}
 V_{i1}(x)|_{i=N_1} &= V_{i2}(x)|_{i=1} \\
 \sum_{j=1}^{N_1} D_{ij1}^{(1)} V_{j1} \Big|_{i=N_1} &= \sum_{j=1}^{N_2} D_{ij2}^{(1)} V_{j2} \Big|_{i=1} \\
 \sum_{j=1}^{N_1} D_{ij1}^{(2)} V_{j1} \Big|_{i=N_1} &= C_E C_I \frac{f_{E2} f_{I2}}{f_{E1} f_{I1}} \sum_{j=1}^{N_2} D_{ij2}^{(2)} V_{j2} \Big|_{i=1} \tag{27} \\
 \beta_1(x) \sum_{j=1}^{N_1} D_{ij1}^{(2)} V_{j1} \Big|_{i=N_1} + f_{E1} f_{I1} \sum_{j=1}^{N_1} D_{ij1}^{(3)} V_{j1} \Big|_{i=N_1} &= C_E C_I \left[\beta_2(x) \sum_{j=1}^{N_2} D_{ij2}^{(2)} V_{j2} \Big|_{i=1} + f_{E2} f_{I2} \sum_{j=1}^{N_2} D_{ij2}^{(3)} V_{j2} \Big|_{i=1} \right] \\
 \text{con } \beta_k(x) &= f_{Ek} f_{Ik}' + f_{Ek}' f_{Ik} ; k = 1, 2.
 \end{aligned}$$

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

5.1 Casos de comparación

Con el objetivo verificar las soluciones que brindan (sobre el modelo propuesto) los dos métodos aproximados citados, es necesario realizar comparaciones con casos particulares disponibles en la literatura. Seguidamente se presentan 3 casos, los cuales pueden considerarse como casos particulares del modelo de análisis.

5.1.1 Viga AFG en voladizo sin masa:

El primer caso de comparación corresponde a una viga AFG Euler-Bernoulli de sección transversal rectangular y ahusada, la cual fue estudiada por [Shaba y Rajasekaran \(2012\)](#). Estos autores obtuvieron valores para los dos primeros coeficientes de frecuencias, empleando el método de transformada diferencial (Differential Transform Method-DTM).

c_b	0		0.2		0.4		0.6		0.8		Solución
	Ω_1	Ω_2									
0	2.4256	18.604	2.6054	19.004	2.8508	19.530	3.2137	20.296	3.8311	21.676	M.R-Ritz
	2.4256	18.604	2.6054	19.004	2.8508	19.530	3.2137	20.296	3.8311	21.676	GDQM
	2.4256	18.604	2.6054	19.004	2.8507	19.530	3.2137	20.296	3.8310	21.676	DTM
0.2	2.5051	17.380	2.6863	17.750	2.9336	18.238	3.2994	18.950	3.9219	20.243	M.R-Ritz
	2.5051	17.380	2.6863	17.750	2.9336	18.238	3.2994	18.950	3.9219	20.243	GDQM
	2.5051	17.380	2.6863	17.750	2.9336	18.238	3.2993	18.950	3.9219	20.243	DTM
0.4	2.6155	16.071	2.7987	16.409	3.0486	16.857	3.4181	17.514	4.0471	18.716	M.R-Ritz
	2.6155	16.071	2.7987	16.409	3.0486	16.857	3.4181	17.514	4.0471	18.716	GDQM
	2.6155	16.071	2.7987	16.409	3.0486	16.857	3.4181	17.514	4.0471	18.716	DTM
0.6	2.7836	14.651	2.9699	14.957	3.2237	15.363	3.5985	15.962	4.2355	17.069	M.R-Ritz
	2.7836	14.651	2.9699	14.957	3.2237	15.363	3.5985	15.962	4.2355	17.069	GDQM
	2.7836	14.651	2.9699	14.957	3.2236	15.363	3.5985	15.962	4.2355	17.069	DTM
0.8	3.0871	13.114	3.2794	13.385	3.5402	13.747	3.9232	14.285	4.5695	15.295	M.R-Ritz
	3.0871	13.114	3.2794	13.385	3.5402	13.747	3.9232	14.285	4.5695	15.296	GDQM
	3.0871	13.114	3.2794	13.385	3.5401	13.747	3.9232	14.285	4.5695	15.296	DTM

Tabla 1: Coeficientes de frecuencias $\Omega_i = \omega_i L^2 \sqrt{\rho_0 A_0 / E_0 I_0}$ viga AFG sin masa

La viga en consideración posee las siguientes leyes de variación para la geometría y propiedades del material:

$$b(x) = b_0(1 - c_b x); h(x) = h_0(1 - c_h x); \rho(x) = \rho_0(1 + x + x^2); E(x) = E_0(1 + x). \quad (28)$$

De acuerdo con el modelo general, se evalúa el caso particular en el que $L_2 = 0$ y $m = 0$. Los coeficientes de frecuencias determinados se presentan en la [Tabla 1](#) y se observa una excelente concordancia con los valores obtenidos por los autores mencionados.

5.1.2 Viga homogénea en voladizo con masa:

El segundo caso en consideración, es una viga en voladizo de material homogéneo y sección transversal uniforme; y que además, posee adosada una masa puntal en su extremo libre. [Rossit y Laura \(2001\)](#) obtuvieron los valores propios λ_i del sistema, resolviendo de manera exacta la ecuación diferencial gobernante. Luego, este mismo problema fue tratado por [Baneerje \(2012\)](#), como un caso particular, para validar su método de rigidez dinámica (Dynamic Stiffness Method-DSM-).

Para obtener los coeficientes de frecuencia Ω_i exactos basta con cuadrar los valores λ_i , obtenidos por [Rossit y Laura \(2001\)](#). Los primeros cinco coeficientes de frecuencias, para distintas masas adosadas, se encuentran tabulados en la [Tabla 2](#).

M	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Solución
0.5	2.0163	16.901	51.701	106.06	180.12	M.R-Ritz
	2.0163	16.901	51.701	106.06	180.12	GDQM
	2.0163	16.901	51.701	106.05	180.13	Baneerje (2012)
1	1.5573	16.250	50.896	105.20	179.23	M.R-Ritz
	1.5573	16.250	50.896	105.20	179.23	GDQM
	1.5570	16.229	50.895	105.20	179.23	Baneerje (2012)
	1.5573	16.250	50.895	105.21	179.24	Rossit y Laura (2001)
5	0.75694	15.602	50.162	104.45	178.47	M.R-Ritz
	0.75694	15.602	50.162	104.45	178.47	GDQM
	0.75693	15.603	50.162	104.45	178.46	Rossit y Laura (2001)
10	0.54138	15.512	50.064	104.35	178.37	M.R-Ritz
	0.54138	15.512	50.064	104.35	178.37	GDQM
	0.54160	15.511	50.065	104.34	178.37	Baneerje (2012)
	0.54137	15.512	50.064	104.35	178.36	Rossit y Laura (2001)

Tabla 2: Coeficientes de frecuencias $\Omega_i = \omega_i L^2 \sqrt{\rho_0 A_0 / E_0 I_0}$ viga de material homogéneo con masa

Se observa muy buena correlación entre los resultados. Los métodos de aproximación empleados, no evidencian tener diferencias entre sí y además, brindan una mejor aproximación a la solución exacta que el método de rigidez dinámica (DSM).

5.1.3 Viga homogénea en voladizo escalonada, sin y con masa:

El tercer caso en comparación corresponde a una viga escalonada en voladizo con una masa puntal adosada en su extremo libre. [Rossit et al. \(2007\)](#), analizaron este caso y

obtuvieron la solución exacta al problema. La viga posee dos tramos, ambos constituidos por material homogéneo y de sección transversal rectangular uniforme. El correspondiente escalón se produce a $x_s = 0.75$. Los primeros cinco coeficientes de frecuencias para la viga sin masa y con masa, se encuentran tabulados en la [Tabla 3](#).

M	h_1/h_0	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Solución
0	0.8	3.78642	22.3703	59.1532	113.1480	188.808	M.R-Ritz
		3.78613	22.3383	58.9212	112.9070	188.788	GDQM
		3.78615	22.3383	58.9212	112.9070	188.788	Rossit et al. (2007)
	0.6	4.12829	22.5712	53.8784	104.1080	178.160	M.R-Ritz
		4.12638	22.3294	52.7625	103.7530	177.443	GDQM
		4.12637	22.3294	52.7625	103.7530	177.443	Rossit et al. (2007)
	0.4	4.57629	21.7171	44.8458	96.7687	161.807	M.R-Ritz
		4.56678	20.5203	43.1710	96.5715	152.685	GDQM
		4.56677	20.5203	43.1710	96.5715	152.685	Rossit et al. (2007)
1	0.8	1.57042	15.6318	47.2315	98.6555	170.479	M.R-Ritz
		1.56989	15.5934	47.0964	98.6212	170.324	GDQM
		1.56990	15.5934	47.0964	98.6212	170.324	Exacta
	0.6	1.57057	14.2823	42.2691	92.7652	159.787	M.R-Ritz
		1.56621	14.0574	41.8811	92.7274	157.572	GDQM
		1.56621	14.0574	41.8811	92.7274	157.572	Rossit et al. (2007)
	0.4	1.51454	11.4429	37.4129	87.3960	137.842	M.R-Ritz
		1.48883	10.8765	37.1655	85.5991	129.509	GDQM
		1.48883	10.8765	37.1655	85.5991	129.509	Rossit et al. (2007)

Tabla 3: Coeficientes de frecuencias $\Omega_i = \omega_i L^2 \sqrt{\rho_0 A_0 / E_0 I_0}$ viga escalonada sin y con masa

Se aprecia que el método de Rayleigh-Ritz difiere de la solución exacta, es decir, tiene dificultades para aproximar discontinuidades en forma de escalón. Al efectuar un análisis del error relativo porcentual, se evidencia que el error tiende a disminuir cuando la relación de alturas tiende a 1 o mejor dicho a la no discontinuidad entre tramos (para ambos casos). Por otro lado, el error aumenta aún más cuando se considera la masa adosada a la viga. Entonces, a la hora de modelar una viga que presente discontinuidades, es más apropiado optar por el GDQM para obtener las soluciones.

5.2 Casos propuestos

Debido a la cantidad y variabilidad de parámetros que intervienen en la descripción del comportamiento dinámico de este tipo de estructuras, en el presente trabajo sólo se presentan algunos casos representativos para demostrar la conveniencia del procedimiento. Se considera un material AFG constituido por acero (Ac) y alúmina (Alum), propuesto por [Su et al. \(2013\)](#). Las propiedades son: $E_{Ac} = 210GPa$, $\rho_{Ac} = 7800kg / m^3$ y $E_{Alum} = 390GPa$, $\rho_{Alum} = 3960kg / m^3$; y las respectivas relaciones $E_{Alum} / E_{Ac} = 1.857$ y $\rho_{Alum} / \rho_{Ac} = 0.508$. Se evidencia que la alúmina es un material mucho más rígido y más liviano que el acero.

Gilardi et al. (2015) demostraron que utilizar materiales AFG permite obtener coeficientes de frecuencias mayores a los de una viga homogénea. Para el caso de la viga AFG en voladizo y con masa adosada en su extremo libre, es más conveniente (desde el punto de vista de la rigidización dinámica) utilizar la composición Alum-Ac frente a la composición Ac-Alum. El hecho de que la alúmina predomine en la zona de la viga con mayor curvatura (mayor momento de flexión), y el acero en la zona de mayores desplazamientos (extremo libre), permite que las frecuencias aumentan más, sobretodo la fundamental. La explicación radica en que la mayor rigidez de la viga cerca del empotramiento, disminuye la amplitud del desplazamiento en el punto de aplicación de la masa adosada y en consecuencia disminuye la energía cinética que la masa añade al balance energético.

Luego, al alejar la primera frecuencia natural de la viga de la frecuencia de funcionamiento del equipo, existen menos probabilidades de que se produzca el fenómeno de resonancia.

La Figura 2 presenta esquemas que serán de utilidad, para interpretar los casos propuestos.

	(a)	<table border="1"> <thead> <tr> <th>L_1</th> <th>L_2</th> <th>h_{11} / h_{01}</th> <th>M</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>L</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	L_1	L_2	h_{11} / h_{01}	M	L	0	1	1													
L_1	L_2	h_{11} / h_{01}	M																				
L	0	1	1																				
	(b)	<table border="1"> <thead> <tr> <th>L_1</th> <th>L_2</th> <th>h_{11} / h_{01}</th> <th>M</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>L</td> <td>0</td> <td>variable</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	L_1	L_2	h_{11} / h_{01}	M	L	0	variable	1													
L_1	L_2	h_{11} / h_{01}	M																				
L	0	variable	1																				
	(c)	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>L_1</th> <th>L_2</th> <th>$\frac{h_{11}}{h_{01}}$</th> <th>$\frac{h_{11}}{h_{02}}$</th> <th>$\frac{h_{12}}{h_{02}}$</th> <th>M</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>$0.67 L$</td> <td>$0.33 L$</td> <td>1</td> <td>0.8</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>$0.67 L$</td> <td>$0.33 L$</td> <td>1</td> <td>0.8</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>		L_1	L_2	$\frac{h_{11}}{h_{01}}$	$\frac{h_{11}}{h_{02}}$	$\frac{h_{12}}{h_{02}}$	M	1	$0.67 L$	$0.33 L$	1	0.8	1	0	2	$0.67 L$	$0.33 L$	1	0.8	1	1
	L_1	L_2	$\frac{h_{11}}{h_{01}}$	$\frac{h_{11}}{h_{02}}$	$\frac{h_{12}}{h_{02}}$	M																	
1	$0.67 L$	$0.33 L$	1	0.8	1	0																	
2	$0.67 L$	$0.33 L$	1	0.8	1	1																	
	(d)	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>L_1</th> <th>L_2</th> <th>$\frac{h_{11}}{h_{01}}$</th> <th>$\frac{h_{11}}{h_{02}}$</th> <th>$\frac{h_{12}}{h_{02}}$</th> <th>M</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(*) Ac</td> <td>$0.67 L$</td> <td>$0.33 L$</td> <td>variable</td> <td></td> <td></td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>(*) AFG</td> <td>$0.67 L$</td> <td>$0.33 L$</td> <td>variable</td> <td></td> <td></td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>		L_1	L_2	$\frac{h_{11}}{h_{01}}$	$\frac{h_{11}}{h_{02}}$	$\frac{h_{12}}{h_{02}}$	M	(*) Ac	$0.67 L$	$0.33 L$	variable			0	(*) AFG	$0.67 L$	$0.33 L$	variable			1
	L_1	L_2	$\frac{h_{11}}{h_{01}}$	$\frac{h_{11}}{h_{02}}$	$\frac{h_{12}}{h_{02}}$	M																	
(*) Ac	$0.67 L$	$0.33 L$	variable			0																	
(*) AFG	$0.67 L$	$0.33 L$	variable			1																	

Figura 2: Esquemas de casos propuestos para vigas AFG

5.2.1 Viga AFG en voladizo con masa:

Se modela una viga en voladizo AFG con $L_2=0$ y con masa puntual en el extremo libre ($M=1$). La composición de los materiales se considera que varía linealmente, es decir, con $n=1$ en la Ec. (3) para las propiedades. La viga tiene ancho b constante y para la altura h variable se presentan cuatro variantes: $n=0$, $n=0.5$, $n=1$ y $n=2$.

La viga AFG de sección transversal constante ($n=0$) pretende evidenciar numéricamente que la composición Alum-Ac permite lograr un mayor efecto de rigidización dinámica. La Tabla 4, tabula los coeficientes de frecuencia y paralelamente demuestra que existe una excelente concordancia de resultados entre los dos métodos.

Los resultados que se exponen están referenciados a una sección inicial de acero ($E_0 = E_{Ac}$, $\rho_0 = \rho_{Ac}$), ya que deben elegirse propiedades de referencia para poder contrastar distintas composiciones. Los resultados de las tablas siguientes contemplan esta observación.

n	V. Material	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Solución
0	Ac-Alum	1.76584	21.6925	68.9049	143.092	244.269	M.R-Ritz
	Ac-Alum	1.76584	21.6925	68.9049	143.092	244.268	GDQM
	Alum-Ac	2.60842	22.7111	70.0933	144.314	245.509	M.R-Ritz
	Alum-Ac	2.60842	22.7111	70.0933	144.314	245.509	GDQM

Tabla 4: Coeficientes de frecuencia $\Omega_i = \omega_i L^2 \sqrt{\rho_0 A_0 / E_0 I_0}$ viga AFG con masa ($M = 1$) -Figura 2(a)-

En la [Tabla 5](#), se tabulan los coeficientes de frecuencia para distintas vigas AFG de sección transversal ahusada, con variación del material Alum-Ac.

n	h_{11}/h_{01}	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Solución
0.5	0.8	2.30311	19.9248	60.7916	124.788	211.991	M.R-Ritz
		2.30696	19.9212	60.7861	124.775	211.968	GDQM
	0.6	1.96356	17.0645	51.2181	104.632	177.348	M.R-Ritz
		1.96601	17.0608	51.2097	104.613	177.315	GDQM
	0.4	1.57579	14.0735	41.1738	83.4179	140.842	M.R-Ritz
		1.57647	14.0707	41.1654	83.3997	140.812	GDQM
0.2	1.10735	10.7914	30.1303	60.0215	100.535	M.R-Ritz	
	1.10736	10.7897	30.1244	60.0086	100.505	GDQM	
1	0.8	2.45922	20.6442	62.7848	128.947	219.183	M.R-Ritz
		2.45922	20.6442	62.7848	128.947	219.183	GDQM
	0.6	2.27165	18.4456	55.1023	112.719	191.298	M.R-Ritz
		2.27165	18.4456	55.1023	112.719	191.299	GDQM
	0.4	2.02359	16.0444	46.8206	95.1209	160.952	M.R-Ritz
		2.02359	16.0444	46.8206	95.1209	160.950	GDQM
0.2	1.66015	13.2508	37.3546	74.8601	125.842	M.R-Ritz	
	1.65815	13.2504	37.3552	74.8616	125.855	GDQM	
2	0.8	2.57643	21.3151	64.8511	133.397	226.934	M.R-Ritz
		2.57643	21.3151	64.8511	133.397	226.934	GDQM
	0.6	2.52484	19.7314	59.1902	121.552	206.682	M.R-Ritz
		2.52483	19.7314	59.1902	121.552	206.681	GDQM
	0.4	2.43856	17.8571	52.8793	108.275	183.840	M.R-Ritz
		2.43769	17.8566	52.8792	108.276	183.843	GDQM
0.2	2.27507	15.4235	45.3172	92.2839	156.110	M.R-Ritz	
	2.21738	15.4021	45.3315	92.3169	156.189	GDQM	

Tabla 5: Coef. de frecuencia $\Omega_i = \omega_i L^2 \sqrt{\rho_0 A_0 / E_0 I_0}$ para h variable con masa ($M = 1$) -Figura 2(b)-

Se observa que el hecho de adosar una masa en el extremo libre de una viga produce una disminución de los coeficientes de frecuencias. Tal efecto se incrementa a medida que la

sección transversal final se reduce, es decir, la disminución de los coeficientes es mayor.

Además, se visualiza que existen diferencias en los coeficientes que se obtienen. El método de Rayleigh-Ritz arroja mejores valores para el primer coeficiente de frecuencia con $n = 0.5$, ya que es cota superior de la solución y los coeficientes que se obtienen por GDQM son mayores a esa cota. En cambio, para $n = 1$ y $n = 2$ no se puede asegurar. También, se aprecia que a medida que la sección final se reduce, esas diferencias tienden a disminuir para $n = 0.5$ y a aumentar para $n = 2$. En cambio, para $n = 1$ no se observan diferencias significativas.

5.2.2 Vigas escalonadas en voladizo:

Se modelan algunos casos particulares de vigas escalonadas, con el objetivo de mostrar el alcance del modelo. Los casos elegidos consideran que las propiedades de los materiales constituyentes varían linealmente $n = 1$ según la Ec. (3); y además, que los tramos poseen igual ancho b constante y de altura constante o bien variando linealmente.

Caso A: se eligió modelar un caso particular de viga escalonada, de dos tramos, desarrollada por Gilardi et al. (2014). La viga, sin masa adosada, es de sección transversal constante en ambos tramos y presenta un escalón en $x_s = 0.67$. El primer tramo está compuesto por material AFG (Ac-Alum) y el segundo por acero únicamente.

Caso B: se modela la viga descrita en el Caso A, pero modificando la composición del material AFG a (Alum-Ac) en el primer tramo.

Los coeficientes de frecuencia para el Caso A y B se tabulan en la [Tabla 6](#).

Caso	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Solución
A	4.42387	28.0638	66.2063	140.160	226.395	M.R-Ritz
	4.41970	27.7319	65.7695	139.820	223.240	GDQM
	4.41967	27.7316	65.7681	139.814	223.226	Gilardi et al. (2014)
B	4.85733	25.5710	67.9469	136.965	223.689	M.R-Ritz
	4.85538	25.4711	67.8090	136.838	222.775	GDQM

Tabla 6: Coeficientes de frecuencia $\Omega_i = \omega_i L^2 \sqrt{\rho_0 A_0 / E_0 I_0}$ viga sin masa -Figura 2(c.1)-

La [Tabla 6](#) permite apreciar que es más conveniente también ubicar la alúmina en las cercanías del empotramiento cuando la viga no tiene masa adosada, para lograr tener un mayor efecto de rigidización. Sin embargo, no siempre se obtiene la mejor eficiencia con la composición Alum-Ac. Gilardi et al. (2015) evidencian que para el caso de la viga de un tramo y de sección constante es más eficiente la composición Ac-Alum.

Seguidamente se calculan los casos expuestos en la [Tabla 6](#) pero adosando una masa puntual en el extremo libre ($M = 1$). Los coeficientes de frecuencia se tabulan en la [Tabla 7](#).

Caso	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Solución
A	1.75061	19.0344	54.8654	123.803	197.403	M.R-Ritz
	1.74644	18.8162	54.8014	122.816	195.517	GDQM
B	2.50353	18.2572	56.8321	119.4820	199.985	M.R-Ritz
	2.50120	18.1911	56.8070	119.1710	199.413	GDQM

Tabla 7: Coeficientes de frecuencia $\Omega_i = \omega_i L^2 \sqrt{\rho_0 A_0 / E_0 I_0}$ viga con masa -Figura 2(c.2)-

Se aprecia que los coeficientes de frecuencia disminuyen al adosar la masa. En el Caso A, el primer coeficiente disminuye en un 60%, el segundo en un 32%, el tercero un 17%. Y en el Caso B, el primer coeficiente disminuye en un 48%, el segundo en un 28%, el tercero un 16%.

Caso C: se modelan 3 ejemplos de vigas AFG con masa adosada en el extremo libre ($M = 1$). Los tramos de viga que contemplan material AFG son de composición Alum-Ac y las propiedades se consideran que varían linealmente. Se considera que la viga presenta un escalón en $x_s = 0.67$. Para cada geometría se analiza: (1) cuando el que el primer tramo es de material AFG y el segundo homogéneo de acero (Ac), y (2) cuando ambos tramos están constituidos por material AFG. Los coeficientes de frecuencia se tabulan en la [Tabla 8](#).

$\frac{h_{11}}{h_{01}}$	$\frac{h_{11}}{h_{02}}$	$\frac{h_{12}}{h_{02}}$	Caso C	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Solución
0.8	1	1	(1)	2.23513	17.4440	54.1678	110.915	188.284	M.R-Ritz
				2.23512	17.4438	54.1676	110.914	188.281	GDQM
			(2)	2.31281	19.6379	63.5309	121.927	211.278	M.R-Ritz
				2.31120	19.5870	63.4386	121.854	210.568	GDQM
0.8	1.33	0.67	(1)	2.19298	14.3878	45.2855	91.517	154.771	M.R-Ritz
				2.18748	14.3270	45.2763	90.901	154.660	GDQM
			(2)	2.29677	16.8553	51.7049	102.247	177.970	M.R-Ritz
				2.29641	16.8497	51.7046	102.208	177.942	GDQM
0.6	1	1.33	(1)	1.89218	15.3709	47.8355	97.344	164.714	M.R-Ritz
				1.89208	15.3690	47.8338	97.333	164.684	GDQM
			(2)	1.96247	17.4457	55.9967	107.389	185.341	M.R-Ritz
				1.95996	17.3887	55.9029	107.307	184.588	GDQM

Tabla 8: Coeficientes de frecuencia $\Omega_i = \omega_i L^2 \sqrt{\rho_0 A_0 / E_0 I_0}$ viga AFG escalonada con masa -Figura 2(d)-

La [Tabla 8](#) permite observar el efecto de rigidización que se logra al utilizar materiales AFG, y que la solución que brindan los métodos expuestos difieren muy poco entre sí. Se aprecian menos diferencias cuando la geometría tiende a la viga de sección constante.

6 CONCLUSIONES

En este trabajo, han quedado demostradas las ventajas estructurales de utilizar FGM en el diseño de vigas en voladizo de un tramo y dos tramos. Además, se ha probado que los métodos aproximados de Rayleigh-Ritz y Cuadratura Diferencial Generalizada son herramientas de gran precisión y eficiencia para la resolución de esta clase de problemas.

Los casos numéricos expuestos, permiten demostrar el efecto de rigidización dinámica que se logra con el uso de los FGM en el diseño de vigas. También, evidencian la influencia de una masa adosada, en el comportamiento dinámico de una viga; ya sea en la disminución de los coeficientes de frecuencia como en el diseño del elemento estructural. Es decir, el agregado de una masa se vuelve un factor determinante a la hora de elegir la composición del material AFG a utilizar, para lograr la mayor rigidización dinámica.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de la Universidad Nacional del Sur (UNS), del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (Conicet) y de la Comisión de Investigaciones Científicas (CIC) de la provincia de Bs.As. para la realización del presente trabajo.

REFERENCIAS

- Alshorbgy, A.E., Eltaher, M.A. and Mahmoud, F.F. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, 35:412–425, 2011.
- Akgöz, B. and Civalek, Ö. Longitudinal Vibration Analysis of Strain Gradient Bars Made of Functionally Graded Materials (FGM). *Composites: Part B*, 55:263–268, 2013.
- Aydogdu, M. and Taskin, V. Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges. *Materials and Design*, 28:1651–1656, 2007.
- Baneerje, J.R. Free vibration of beams carrying spring-mass systems-A dynamic stiffness approach. *Computers and Structures*, 104–105:21–26, 2012.
- Bert, C. W. and Malik, M. Differential quadrature method in computational mechanics: A review. *Applied Mechanics Review*, 49:1-28, 1996.
- Calio, I. and Elishakoff, I. Closed-form trigonometric solutions for inhomogeneous beam-columns on elastic foundation. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 4:139–146., 2004.
- Calio, I. and Elishakoff, I. Closed-form solutions for axially graded beam-columns. *Journal of Sound and Vibration*, 280:1083–1094, 2005.
- Çetin, D. and Şimşek, M. Free vibration of an axially functionally graded pile with pinned ends embedded in Winkler-Pasternak elastic medium. *Structural Engineering and Mechanics*, 40:583–594, 2011.
- Chabraborty, A., Gopalakrishnan, S. and Reddy, J.N. A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45:519–539, 2003.
- Elishakoff, I. and Guede, Z. Analytical polynomial solutions for vibrating axially graded beams. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 11:517–533, 2004.
- Gilardi, G.J., Bambill, D.V., Rossit, C.A., Felix D.H. and Rattazzi A.R. Respuesta dinámica de vigas Timoshenko rotantes de materiales con propiedades variando funcionalmente, *Mecánica Computacional Vol XXXIII*, 1025-1039, 2014.
- Gilardi, G.J., Bambill, D.V. and Rossit, C.A. Free vibrations of an axially functionally graded beam with a concentrated mass, *EbookPANACM 2015*. CIMNE, 410-421, 2015.
- Huang, Y. and Li, X.F. A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 329:2291–2303, 2010.
- Ilanko, S., Monterrubio, L. E. and Mochida, Y. *The Rayleigh-Ritz Method for Structural Analysis*. Wiley & Sons, 1-32, 2014.
- Karami, G., Malekzadeh, P., and Shahpari, S. A dqem for vibration of shear deformable nonuniform beams with general boundary conditions. *Engineering Structures*, 25:1169–1178, 2003.
- Lu, C.F. and Chen, W.Q. Free vibration of orthotropic functionally graded beams with various end conditions. *Structural Eng. and Mech*, 20:465–476, 2005.
- Li X.F. A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams. *Journal of Sound and Vibration*, 318:1210–1229,

2008.

- Liu, G. R. and Wu, T. Y. Vibration analysis of beams using the Generalized Differential Quadrature Rule and Domain Decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 246(3):461-481, 2001.
- Martinez, X., Oller, S. and Barbero E. Caracterización de la delaminación en materiales compuestos mediante la teoría de mezclas serie/paralelo. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 27(3): 189–199, 2011.
- Niino, M., Hirai, T. and Watanabe R. The functionally gradient materials. *J Jap Soc Compos Mat.*, 13:257-264, 1987.
- Rossit, C.A. and Laura, P.A.A. Free vibrations of a cantilever beam with a spring–mass system attached to the free end. *Ocean Engineering*, 28:933-939, 2001.
- Rossit, C.A., Maíz, S. and González, V.Y. Comportamiento dinámico de vigas de sección variable con masas adosadas, *Mecánica Computacional Vol. XXVI*, 334-352, 2007.
- Sankar, B.V. An elasticity solution for functionally graded beams. *Composites Science and Technology*, 61:689–696, 2001.
- Shahba, A. and Rajasekaran, S. Free vibration and stability of tapered Euler-Bernoulli beams made of axially functionally graded materials. *Applied Mathematical modelling*, 36:3094–3111, 2012.
- Su, H., Banerjee, J.R. and Cheung, C.W. Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams. *Composite Structures*, 106:854–862, 2013.
- Wang S.S. (1983). Fracture mechanics for delamination problems in composite materials. *Journal of Composite Materials*, 17(3):210-223, 1983.
- Wu, L., Wang, Q. and Elishakoff, I. Semi-inverse method for axially functionally graded beams with an anti-symmetric vibration mode. *Journal of Sound and Vibration*, 284:1190–1202, 2005.
- Zhong, Z. and Yu, T. Analytical solution of a cantilever functionally graded beam. *Composites Science and Technology*, 67:481–488, 2007.
- Zong, Z. and Zhang, Y.Y. *Advanced differential quadrature methods*. CRC Press, 2009.