

## RECUPERACIÓN DE LA SUPERFICIE MEDIA DEFORMADA EN LA TEORÍA DE CÁSCARAS

Salvador D.R. Gigena<sup>a</sup> y Daniel J.A. Abud<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Avenida Vélez Sarsfield 1600, 5000 Córdoba, Argentina, [sgigena@efn.uncor.edu](mailto:sgigena@efn.uncor.edu)*

<sup>b</sup>*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Avenida Vélez Sarsfield 1600, 5000 Córdoba, Argentina, [daniel.abud@yahoo.com](mailto:daniel.abud@yahoo.com)*

**Keywords:** Teoría de Grupos, Teoría de Cáscaras, Superficie Media, Geometría Unimodular Afín.

**Abstract.** El principal objetivo en la Teoría de Cáscaras, ya sea ésta euclidiana o afín, es determinar la medida de la deformación de una cáscara una vez que la sollicitación ha sido aplicada a la misma. Y la mejor forma de analizar esto es mirar qué ocurre con las correspondientes superficies medias. Este problema se plantea aquí, en este trabajo, a los efectos de determinar la superficie media deformada a partir de datos conocidos que contiene la cáscara antes de deformarse de su estado original. Así se podrá cuantificar, en alguna medida, su deformación. De esa forma, se da inicio a un método general comparativo entre ambas geometrías, aclarando que, en ambos casos, se usa el respectivo Teorema Fundamental de Existencia para superficies. Para una mejor comprensión del tema deberán verse los artículos anteriores publicados por los mismos autores.

## 1 INTRODUCCIÓN

Este artículo muestra un camino hacia la medición de lo que una cáscara puede deformarse en términos de la Geometría Unimodular Afín. Esta medición no se hará en términos de los desplazamientos como es habitual en la comprobación de la deformación dentro del esquema de la Geometría Euclidiana. Se efectuará bajo la aplicación del Teorema Fundamental de Existencia para superficies, refiriéndonos a la Superficie Media de la Cáscara. Una vez obtenida la medición de la deformación de dicha superficie, se extrapola considerando el espesor de la cáscara, con lo cual se tiene la medida de la deformación de la cáscara toda. Al aplicar la sollicitación (cualquiera sea ésta) a la cáscara, en su estado original, no deformado, se genera un tensor de tensión tridimensional simétrico. Esa primera acción produce seguidamente una deformación cuya medida está contenida como información en su correspondiente tensor de deformación. La relación entre ambos quedó establecida en lo que llamamos “*las relaciones tensión-deformación*”, descritas en (Gigena et al, 2002, 2003, 2004, 2005, 2010, 2012).

En este trabajo trataremos con cáscaras asumiendo que son de un material perfectamente elástico, homogéneo e isótropo y que, en su estado deformado, están en equilibrio con las fuerzas actuantes. Este modelo prevé un algoritmo de cálculo que permita la comparación con toda la literatura previamente publicada en Geometría Euclidiana (John, 1965, 1971; Koiter, 1971; Love, 1944; Möllmann, 1981; Reddy, 2008; Wagner and Gruttmann, 1994; Kinkel et al, 1999), y con nuestros propios resultados en Geometría Afín (Gigena et al, 2002, 2003, 2004, 2005, 2010, 2012). Este es el camino inicial para que, *a posteriori*, se puedan hacer métodos numéricos aproximados utilizando este esquema de pensamiento planteado.

Se exponen varios ejemplos, de los cuales solo dos de ellos se profundizan a los efectos de mostrar con mayor precisión los alcances de la Geometría Unimodular Afín con respecto a la Geometría Euclidiana.

## 2 TEOREMA DE RECUPERACIÓN DE LA SUPERFICIE MEDIA DEFORMADA EN GEOMETRÍA UNIMODULAR AFÍN

Se puede representar la superficie media deformada  $M_0^*$  como una variedad real, de dimensión dos, diferenciable y orientada, junto con los siguientes objetos geométricos: una conexión afín libre de torsión  $\nabla^*$ , una estructura pseudoriemanniana no-degenerada:  $g^*$ , y un campo tensorial (1,1),  $S^*$ , todos ellos definidos en términos de los coeficientes estimados dados por la pseudométrica ya expuesta en trabajos anteriores.

Los objetos geométricos bidimensionales citados, y otros de la misma dimensión que serán usados para el desarrollo de nuestra exposición, pueden ser obtenidos a partir de la ecuación que establece la relación entre los coeficientes métricos tridimensionales de la cáscara no deformada, denotados  $G_{ik}$ , y los correspondientes a la cáscara deformada, denotados  $G_{ik}^*$ :

$$G_{ik}^* = G_{ik} + \frac{2}{\mu} t_{ik} - 2 \left( \frac{1-2\mu}{2\mu} \right) \left( \sum_j t_j^j \right) \delta_{ik} + F(t, \eta) (t^2 + \eta t) \quad (1)$$

A partir de la definición de “*cáscara afín*”, usaremos las condiciones de integrabilidad de la Geometría Afín con las ya conocidas condiciones de compatibilidad bidimensionales para cada caso de la superficie media de la cáscara. Esto representa uno de los primeros pasos en el desarrollo de esta teoría, que contiene, como ya se ha dicho, un mayor número de invariantes

que la previa, la euclidiana.

En definitiva, esos objetos geométricos satisfacen las siguientes condiciones de integrabilidad:

1.  $g^*$  es un campo tensorial Codazzi con respecto a  $\nabla^*$ , es decir, la derivada covariante de  $g^*$ , con respecto a la conexión  $\nabla^*$ , campo tensorial (0,3), de manera que  $\psi^* := \nabla^* g^* = g^*_{\alpha\beta\gamma} du^\alpha du^\beta du^\gamma$ , con las componentes  $g^*_{\alpha\beta\gamma}$  simétricas en todos sus índices.
2.  $\psi^* = \nabla^* g^*$  es apolar con respecto a  $g^*$ , es decir, el campo covector Tschebysceff se anula idénticamente, o, en coordenadas locales  $\tau^* := \sum g^{*\alpha\beta} g^*_{\alpha\beta\gamma} du^\gamma \equiv 0$ .
3.  $S^*$  campo tensorial Codazzi (1,1) con respecto a  $\nabla^*$ , mantiene la ecuación  $B^*_{\beta;\gamma} = B^*_{\gamma;\beta}$ .
4. Se preserve la ecuación de Gauss, relacionando la información dada, es decir,

$$\tilde{R}^{*\alpha}_{\beta\gamma\eta} = \frac{1}{2} (B^{*\alpha}_{\eta} g^*_{\beta\gamma} - B^{*\alpha}_{\gamma} g^*_{\beta\eta} + B^{*\alpha}_{\beta\gamma} \delta^{\alpha}_{\eta} - B^{*\alpha}_{\beta\eta} \delta^{\alpha}_{\gamma}) - \sum (A^{*\sigma}_{\beta\eta} A^{*\alpha}_{\sigma\gamma} - A^{*\sigma}_{\beta\gamma} A^{*\alpha}_{\sigma\eta}) \quad (2)$$

donde  $\tilde{R}^{*\alpha}_{\beta\gamma\eta}$  representa a las componentes del tensor de curvatura asociado a la conexión de Levi-Civita y  $A^{*\alpha}_{\beta\gamma}$  son las componentes del Tensor Diferencia, e igual a  $\frac{1}{2} g^{*\alpha\rho} g^*_{\rho\beta\gamma}$ .

Finalmente, y consecuentemente, a continuación se comprende que existe una inmersión local Unimodular Afín  $X^* : (M^*, \nabla^*, g^*, S^*) \rightarrow \mathbb{R}^3$  para la cual  $\nabla^*$  es la conexión Normal Afín,  $g^*$  es la Primera Forma Fundamental Unimodular Afín  $I^*_{ua}$ , y  $S^*$  es el Operador Afín de Forma de Weingarten (Gigena, 1996). El modelo se basa, primeramente, en una relación entre la segunda forma fundamental euclidiana y la primera forma fundamental de la Geometría Unimodular Afín:  $I_{ua} \leftrightarrow II_{eu}$ . Se considera un sistema constituido por el espacio ambiente y los dos básicos invariantes en ambas geometrías, y define una inmersión en un conveniente subconjunto abierto en el plano, lo que algunos autores refieren como un *parámetro espacial*, definimos

$$\left( \mathbb{R}^3, \underbrace{\cdot}_{euclidiano}, \underbrace{[\cdot, \cdot]}_{afín} \right); (X_0) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad U \subset \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

y de la ecuación de Gauss euclidiana,  $(X_0)_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} N_{eu} + \sum_{\lambda=1}^2 \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} (X_0)_{\lambda}$ , de la igualdad, se expresa:

$$h_{\alpha\beta} = \left[ (X_0)_1, (X_0)_2, L_{\alpha\beta} N_{eu} + \sum_{\lambda=1}^2 \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} (X_0)_{\lambda} \right] \quad (4)$$

usando las propiedades de la función determinante,  $h_{\alpha\beta} = [(X_0)_1, (X_0)_2, N_{eu}] L_{\alpha\beta}$  y

$$0 \neq \det(h_{\alpha\beta}) = [(X_0)_1, (X_0)_2, N_{eu}]^2 \det(L_{\alpha\beta}). \quad (5)$$

De allí que las superficies inmersas aptas para tratamiento de una significativa teoría en Geometría Afín son aquellas que, en su versión euclidiana, tienen idéntico no nulo coeficiente de curvatura gaussiano  $K$ , en el sentido definido en (Millman and Parker, 1977). Para tratar, similarmente, otros tipos de superficies, en el contexto de aplicaciones a la digitalización afín de imágenes, se necesita usar Teoría Afín de Curvas Planas, como se han desarrollado, por ejemplo, en (Calabi et al, 1996, 1998), con la correspondiente reducción de codimensión.

Comentario, de que lo que señalamos más arriba, es una muy importante diferencia entre las teorías de cáscaras euclidiana y afín.

Otra muy importante diferencia es la que señalamos a continuación:

La “*distancia*” euclidiana, es invariante bajo el grupo  $ASO(3, \mathbb{R})$ , pero, **no** es un invariante Unimodular Afín, es decir bajo el grupo  $ASL(3, \mathbb{R})$ , por lo tanto, **no** se pueden computar los *desplazamientos* en el ambiente  $\mathbb{R}^3$ .

Este importante hecho se puede verificar a través del siguiente ejemplo comparativo de Ambas Teorías:

### 3 PRIMEROS EJEMPLOS: LA ESFERA VERSUS EL ELIPSOIDE. OTROS EJEMPLOS ILUSTRATIVOS DE COMPARACIÓN.

Se hace difícil cambiar, radicalmente, un esquema de pensamiento ya consolidado, un cambio total de paradigma, especialmente con los años que lleva la Geometría Euclidiana funcionando. Se incluye aquí el ejemplo del casquete esférico superior y su equivalente, para la Geometría Unimodular Afín, el casquete elipsoidal superior, obtenido aplicando al anterior una Transformación Unimodular Afín del espacio, a través de una matriz  $3 \times 3$  con determinante igual a UNO. Por ejemplo, la matriz diagonal de elementos  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{8}{3}$ . Se toma para facilidad de comprensión y a los fines de comparar mejor una esfera y un elipsoide. Que, en Geometría Euclidiana son muy diferentes, mientras que, en Geometría Unimodular Afín son exactamente iguales. *Esta última Geometría no las distingue en absoluto.* Esfera proviene del término griego  $\sigma\phi\alpha\iota\pi\alpha$ , *sphaîra*, que significa pelota (elemento que se usa para jugar). Coloquialmente hablando, se emplea la palabra *bola*, para describir al cuerpo delimitado por una esfera. Además, se usa en Matemática (topológicamente) la palabra *bola* cuando se refiere a un entorno del Dominio de funciones de varias variables. En cambio, un *elipsoide* es una superficie curva cerrada cuyas tres secciones ortogonales principales son elípticas, es decir, son originadas por planos que contienen dos ejes cartesianos. En Matemática, es una *cuádrica* análoga a la elipse, pero en tres dimensiones. Si partimos del supuesto que, ambos sólidos tienen un volumen  $V$  igual a UNO, entonces se puede comparar uno con otro de la siguiente manera:

**Esfera:**

$$X(u_1, u_2) = \left( u_1, u_2, +\sqrt{1 - (u_1)^2 - (u_2)^2} \right) = (x_1, x_2, x_3) \quad (6)$$

tal que,  $(u_1)^2 + (u_2)^2 \leq 1$ ; si se hace una *Transformación Unimodular Afín*, se pasa de las coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  a las coordenadas  $(y_1, y_2, y_3)$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{8}{3}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = Y \quad (7)$$

si se define:  $v_1 = \frac{3}{4} u_1$  y  $v_2 = \frac{1}{2} u_2$  entonces,  $Y(v_1, v_2) = \left( v_1, v_2, + \frac{8}{3} \sqrt{1 - \frac{16}{9}(v_1)^2 - 4(v_2)^2} \right)$  si se cumple que,  $(u_1)^2 + (u_2)^2 = \frac{16}{9}(v_1)^2 + 4(v_2)^2 \leq 1$ ; o, lo que es lo mismo:  $\frac{(v_1)^2}{(\frac{3}{4})^2} + \frac{(v_2)^2}{(\frac{1}{2})^2} \leq 1$ .

Considerando que el Volumen de una esfera de radio  $r$  es  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$  y el de un elipsoide, cuyos semiejes son  $a$ ,  $b$  y  $c$ , es  $V = \frac{4}{3} \pi abc$ .

**Elipsoide:**

$$\frac{(y_1)^2}{(\frac{3}{4})^2} + \frac{(y_2)^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{(y_3)^2}{(\frac{8}{3})^2} = \frac{(v_1)^2}{(\frac{3}{4})^2} + \frac{(v_2)^2}{(\frac{1}{2})^2} + \left( 1 - \frac{(v_1)^2}{(\frac{3}{4})^2} - \frac{(v_2)^2}{(\frac{1}{2})^2} \right) = 1 \quad (8)$$

Estamos habituados a ver en Geometría Euclidiana estos dos objetos geométricos: una ESFERA y un ELIPSOIDE. A simple vista, se puede observar que son TOTALMENTE DIFERENTES, a pesar de que, ambos tienen el mismo volumen  $V$ .

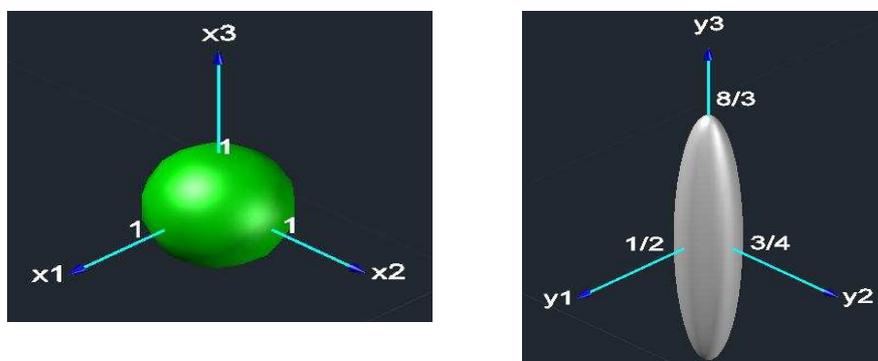


Figura 1: Esfera y Elipsoide

### PARA LA GEOMETRÍA UNIMODULAR AFÍN SON EXACTAMENTE IGUALES!

Obsérvese que, la distancia entre el *centro* de la esfera y el *polo norte* en el casquete esférico es igual a uno. Mientras que, en el casquete elipsoidales igual a ocho tercios; y en los dos ejes siguientes es igual a un medio y a tres cuartos.

Por este motivo, *no se pueden elaborar como parte de la teoría el estudio de los desplazamientos euclidianos entre puntos de la cascara no deformada y la cascara deformada.*

Por el contrario, se hace necesario recurrir al Teorema de Existencia y Unicidad de las superficies medias deformadas para analizar los cambios ocurridos en la deformación. Por otra parte también cabe observar:

Sin embargo, sí se puede calcular la “*distancia afin*” o “*función soporte afin*” desde cualquier punto de la superficie a cualquier punto del espacio, usando la *Normal Unimodular Afin* para esos fines.

Además, con la Primera Forma Fundamental Unimodular Afin definida en la superficie podemos calcular longitudes de arcos entre dos puntos de la superficie que se conecten entre sí. Con ello, entonces, podemos calcular la **DISTANCIA AFIN** ente dichos puntos de la superficie. Más aun también, por ende, podemos hablar de *áreas afines* de figuras contenidas en la superficie. A su vez en la cascara podremos calcular **VOLUMEN AFIN**, conceptos estos que serán diferentes de los usados en la Geometría Euclidiana, como se puede ver fácilmente en el ejemplo expuesto de la esfera y el elipsoide.

El estudio de las cáscaras, a juzgar por la extensísima literatura existente en el mundo, estaba prácticamente agotado. Ya se había dicho, *experimentadamente*, todo sobre ellas. Supuestamente, “*no había más nada que decir ni estudiar en lo que a formulación se refiere*”. Muchos autores han utilizado la Teoría Clásica como formulación de partida y han obtenido excelentes resultados favoreciendo así la consolidación de esta teoría. Ha servido como hipótesis de partida de diferentes problemas en el campo de las soluciones a las ecuaciones que gobiernan el sistema.

Negando las hipótesis que conforman a la Teoría Clásica, han surgido otras teorías. Pero, la Teoría Clásica aproxima el problema a la realidad bastante eficientemente, comparando con las aproximaciones que efectúan otras teorías. Siempre, se ha pensado en cómo ir mejorando los métodos vigentes para el cálculo y dimensionamiento de las mismas, profundizando el análisis con el uso del Método de Elementos Finitos y otras técnicas numéricas de aproximación. Pero, con la finalidad de lograr: ¿qué cosa? Minimizar lo más posible el error en el cálculo de las soluciones; aproximar lo más que se pueda a soluciones analíticas exactas imposibles de viabilizar en la práctica. Todas ellas soluciones ingenieriles excelentes.

En el estado actual del arte, a ningún autor se le había ocurrido hasta ahora, reformular la teoría en sí desde su génesis y en toda su formulación. Tal vez, algunos cambios si se han hecho a lo largo de la historia, y estos han sido útiles, como por ejemplo, los propuestos por Reissner, donde se sigue aceptando que las tensiones normales son despreciables frente a otras componentes de tensión, pero no se obliga a las fibras rectas a permanecer normales a la superficie media ya deformada (hipótesis de Love-Kirchhoff).

La propuesta de cambiar la Geometría Euclidiana por la Geometría Unimodular Afin hace que uno piense en una nueva Teoría de Cáscaras completamente diferente desde el inicio. Es decir, *replantear* toda la teoría de cáscaras basándose en otra geometría, no-lineal, no-euclidiana, diferente a la empleada hasta ahora. En tal sentido, corresponde recordar que el cálculo o notación tensorial ya ha sido usado ampliamente en el tratamiento moderno del tema. Sin embargo, en todos los casos mencionados se han usado exclusivamente elementos de la Teoría Clásica (Euclidiana) de Superficies. Esta propuesta ha sido cambiar por la Geometría Diferencial Unimodular Afin, considerando su mayor riqueza, por ejemplo, en términos de invariantes geométricos y así, conseguir una mejor aproximación del problema. Es una manera diferente de expresar el problema exacto de las cáscaras, que está gobernado por las *condiciones de compatibilidad*, las *ecuaciones de equilibrio*, las *relaciones entre las tensiones y las deformaciones*, que pueden ser expresadas en términos de los desplazamientos (o de las deformaciones), y por las *condiciones de borde en las caras y bordes* de la cáscara.

Es obvio que el desarrollo de la Teoría de Cáscaras se debe a un extenso aparato

matemático, donde muchas páginas de la literatura están cubiertas con ecuaciones.

Precisamente, por esta razón, es necesario enfatizar que el rol de la geometría diferencial en esta teoría es, exactamente, el mismo que en otras ramas de la Ingeniería y la Ciencia. La estrategia básica en Mecánica consiste en aplicar la matemática, no a la estructura (o a lo que sea) en sí mismo, sino a un modelo conceptual de la estructura.

Esta línea de pensamiento la logró un solo autor: **Fritz John**. (John, 1965, 1971) Su línea de investigación no fue elegida por la comunidad científica ingenieril, ya que las críticas recibidas por Koiter hacia John, alejaron a los investigadores de este modelo. Y fue su esquema metodológico con sus directivas, a través de sus dos artículos principales, las que dieron curso a la presente investigación. Agregándole en este trabajo el cambio de Geometría, donde por primera vez se aborda el problema del dimensionamiento de cáscaras desde una geometría que no es euclidiana.

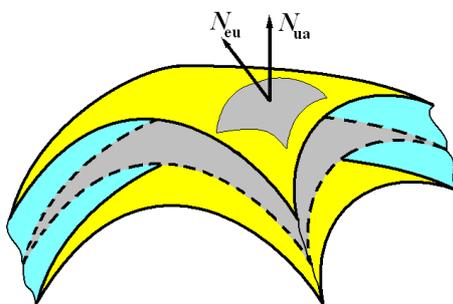


Figura 2: Normal Euclidiana y Normal Unimodular Afín

Todos los cálculos con Geometría Euclidiana no forman parte del aporte de este trabajo. En realidad, este modelo es más amplio en su formulación, para luego ir realizando aproximaciones desde las más gruesas a las más finas. Cabe aclarar que, si bien Koiter criticó la obra de John, aceptó también que su esquema era muy completo y consistente. El inconveniente es que, normalmente, los Ingenieros tienen una cierta premura por llegar a la solución de los problemas, y no pueden destinar demasiado tiempo a “*filosofar*” (o reflexionar) con algún otro planteo de formulación.

A seguir, describiremos ejemplos de algunas superficies medias de probables cáscaras elegidas, de lo más utilizado en construcciones de Ingeniería, como ilustrativas del desarrollo de la Teoría de Cáscaras Afines en este trabajo. Cualquiera de estas superficies podría formar parte de una estructura de tipo cáscara o bóveda con un cierto espesor, siendo ésta la expresión de la superficie media de la misma. Además, se incluye una clasificación de superficies según la Geometría Unimodular Afín. Primeramente, se observan todas las cuádricas que están caracterizadas por ser esferas afines con **Segunda Forma Fundamental**, o **Forma Cúbica**, idénticamente nula,  $C = \Pi_{uu} \equiv 0$ :

**Paraboloide elíptico.** En forma explícita,  $z = x^2 + y^2$ , o,  $X_0(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ .

**Paraboloide hiperbólico.** Explícita,  $z = x^2 - y^2$ , o,  $X_0(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ .

Las dos superficies anteriores son **esferas afines “impropias”**, con normal afín autoparalela, o sea, con centro en el infinito. La primera con primera forma fundamental afín positivo-definida debido a que es localmente fuertemente convexa; la segunda no-degenerada.

**Elipsoide.** En forma explícita  $z = +\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$  o, **casquete superior** de todo el

elipsoide que, paramétricamente, representamos por  $X_0(u, v) = \left( u, v, +\sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}} \right)$ .

Esta última, ejemplo de *esfera afín propia* (centro finito) de tipo elíptico (de ella deriva la terminología), centrada en el origen de coordenadas, o sea con centro “dentro” de la concavidad. Al igual que la 1ª), la Primera Forma Fundamental es positivo-definida.

**Hiperboloide (de una hoja).**  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ , *esfera afín propia de tipo hiperbólico*, primera forma no-degenerada, da lugar a dos superficies según como uno las posiciona:  $x = +\sqrt{1 + y^2 + z^2}$ ;  $z = +\sqrt{x^2 - y^2 - 1}$ . Para este trabajo, sólo se desarrolla una de las dos superficies para no hacer tan extenso el escrito: la segunda, que, paramétricamente, se representa por  $X_0(u, v) = \left( u, v, +\sqrt{u^2 - v^2 - 1} \right)$ .

**Hiperboloide (de dos hojas, de las cuales tomamos una).** En forma explícita:  $z = +\sqrt{1 + x^2 + y^2}$  o, como hoja superior del hiperboloide que, paramétricamente representamos por  $X_0(u, v) = \left( u, v, +\sqrt{1 + u^2 + v^2} \right)$ . Esta última, ejemplo de *esfera afín propia (centro finito) de tipo hiperbólico* (también de ella deriva la terminología), centrada en el origen de coordenadas, o sea con centro “fuera” de la concavidad, Primera Forma Fundamental positivo-definida. Además, está contenida en el cono convexo  $\{(x, y, z) : z \geq +\sqrt{x^2 + y^2}\}$  y es asintótica a su borde. Esta puede representar la superficie media de una cáscara que podría ser el techo de un clásico galpón.

Esta última propiedad la relaciona con el siguiente ejemplo *que no es una cuádrica y, por lo tanto, con Segunda Forma Fundamental, o Cúbica, no nula*:

**Cúbica tetraedral, Esfera Afín (de tipo hiperbólico).** En forma explícita  $z = \frac{1}{xy}$ ; o, paramétricamente,  $X_0(u, v) = \left( u, v, \frac{1}{uv} \right)$ . Esta última es una *esfera afín propia de tipo hiperbólico*, también centrada en el origen. Está contenida en el cono convexo  $\{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$  y es asintótica a su borde. Las dos últimas son los casos “*extremos en cierto sentido*” de la famosa conjetura de Calabi, ya para dimensiones mayores o iguales a dos, a cuya solución contribuyeron los siguientes autores: el propio Calabi, Schneider, Gigena, Sasaki, Yau, Cheng, Li.

**Superficie de Cayley.** En forma explícita,  $z = xy + \frac{y^3}{3}$ , o,  $X_0(u, v) = \left( u, v, uv + \frac{v^3}{3} \right)$

Es una *esfera afín de tipo parabólico*. Es, además, la única superficie afín con segunda forma fundamental, o forma cúbica, paralela, o sea con su derivada covariante normal afín  $\nabla C = \nabla \Pi_{ua} \equiv 0$ , que no es una cuádrica, o sea, con forma cúbica no idénticamente nula,  $C = \Pi_{ua} \neq 0$ . Propiedad expuesta en trabajos de los siguientes autores: Nomizu, Sasaki, Pinkall, Gigena. También, es la única superficie afín con *tensor diferencia paralelo*,  $\nabla K \equiv 0$ , donde  $K \doteq \nabla - \tilde{\nabla}$ , que **no** es una cuádrica. Propiedad expuesta en trabajos de los siguientes autores: Dillen, Vrancken, Gigena y Joaquín.

Para todas estas superficies de ejemplo se han calculado objetos geométricos y comparado

con los correspondientes de la Geometría Euclidiana. Al ser estas variedades (superficies), elementos bidimensionales, los índices serán escritos con letra griega minúscula y serán reservadas para denotar una variación entre 1 y 2:  $1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \dots \leq 2$ , i.e.: se refiere a un elemento bidimensional como puede ser la superficie media  $M_0$  original y sin deformación, o a la superficie media deformada  $M_0^*$ . Se exponen a seguir los objetos geométricos.

**Paraboloide elíptico**

Derivadas parciales:  $X_{01} = X_{0u}(u, v) = (1, 0, 2u)$ ;  $X_{02} = X_{0v}(u, v) = (0, 1, 2v)$ ;  
 $X_{011} = X_{0uu}(u, v) = (0, 0, 2)$ ;  $X_{022} = X_{0vv}(u, v) = (0, 0, 2)$ ;  $X_{012} = X_{0uv}(u, v) = (0, 0, 0)$

Coefficientes  $h_{\alpha\beta} = [X_{01}, X_{02}, X_{0\alpha\beta}]$ ;  $h_{11} = 2$  ;  $h_{22} = 2$ ;  $h_{12} = 0$ , entonces, por cálculo directo se obtiene  $H = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$ , con lo que se verifica  $H = \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \neq 0$ ,

luego  $\Rightarrow \boxed{(H)^{\frac{1}{4}} = |(4)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}}$ , de lo anterior se obtienen ahora, los **coeficientes del tensor métrico**:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{h_{\alpha\beta}}{|H|^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow g_{11} = \frac{h_{11}}{|H|^{\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}; g_{22} = \frac{h_{22}}{|H|^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{2}; g_{12} = \frac{h_{12}}{|H|^{\frac{1}{4}}} = 0 \quad \boxed{(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

la **matriz inversa**:

$$\boxed{(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}} \tag{9}$$

los **símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita** asociada a esta métrica resultan, por lo tanto, a partir de la bien conocida fórmula,  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} g^{\lambda\gamma} (\partial_{\alpha} g_{\lambda\beta} + \partial_{\beta} g_{\alpha\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\alpha\beta})$ .

Desarrollando esta expresión, y de manera expositiva, se observa que, desde el principio del cálculo:  $g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = 0$ , para  $\alpha \neq \beta$ , que es lo que se manifiesta en las dos matrices anteriores, con lo cual se podría obviar la escritura de varios términos en las ecuaciones siguientes. Pero, además, todas las componentes de esas matrices son constantes, con lo cual, además, se pueden obviar también todos los términos donde aparecen derivadas. Indiscutiblemente, la conclusión es correcta, o sea, todas las componentes de la conexión son nulas en este caso. Sacando los términos nulos y los que pudieran simplificarse, queda:

$$\boxed{\tilde{\Gamma}_{11}^1 = \tilde{\Gamma}_{12}^1 = \tilde{\Gamma}_{21}^1 = \tilde{\Gamma}_{22}^1 = \tilde{\Gamma}_{11}^2 = \tilde{\Gamma}_{12}^2 = \tilde{\Gamma}_{21}^2 = \tilde{\Gamma}_{22}^2 = 0} \tag{10}$$

la **Normal Unimodular Afín**:  $N_{ua} = \frac{1}{2} \Delta(X_0)$ , donde  $\Delta$  es el **Operador Laplaciano con respecto a la pseudo-métrica**  $I_{ua}$ , i.e.:  $\Delta X_0 = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} \left( \sqrt{|g|} \sum_{\beta=1}^2 g^{\alpha\beta} \frac{\partial X_0}{\partial u^{\beta}} \right)$  con

$g = \det(g_{\alpha\beta})$  que en este caso,  $g = 2$ , entonces  $\sqrt{|g|} = \sqrt{2}$ , es decir, si se introducen los

siguientes cálculos:  $g^{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $g^{12} = g^{21} = 0$ ;  $g^{22} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; se tendrá,  $\Delta X_0 = (0, 0, 2\sqrt{2})$ , o sea,

$N_{uu} = (0, 0, \sqrt{2})$ . La Normal Euclidiana se calcula con la siguiente y conocida expresión:

$N_{eu} = \frac{X_{01} \times X_{02}}{\|X_{01} \times X_{02}\|}$ ; con lo cual si reemplazo,  $X_{01} = (1, 0, 2u)$ ;  $X_{02} = (0, 1, 2v)$ , obtengo,

$X_{01} \times X_{02} = -2uE_1 - 2vE_2 + E_3$ ; o sea,  $\|X_{01} \times X_{02}\| = \sqrt{(2u)^2 + (2v)^2 + 1} = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$ ; con lo

que queda:  $N_{eu} = \frac{-2uE_1 - 2vE_2 + E_3}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$ , es decir,

$$N_{eu} = \left( -\frac{2u}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, -\frac{2v}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \right) \quad (11)$$

### Paraboloide hiperbólico

Derivadas parciales:  $X_{01} = X_{0u}(u, v) = (1, 0, 2u)$ ;  $X_{02} = X_{0v}(u, v) = (0, 1, -2v)$ ;

$X_{011} = X_{0uu}(u, v) = (0, 0, 2)$ ;  $X_{022} = X_{0vv}(u, v) = (0, 0, -2)$ ;  $X_{012} = X_{0uv}(u, v) = (0, 0, 0)$ .

Coefficientes  $h_{11} = 2$ ;  $h_{22} = -2$ ;  $h_{12} = 0$ , entonces, primeramente, verificamos que

$H = \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \neq 0$  puesto que  $H = -4$  entonces,  $(H)^{1/4} = \sqrt{2}$ . Ahora, los *coeficientes del*

*tensor métrico*:  $g_{11} = \sqrt{2}$ ;  $g_{22} = -\sqrt{2}$ ;  $g_{12} = 0$ ;  $(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ , la *matriz inversa*:

$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ . Los *símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita*

$\tilde{\Gamma}_{11}^1 = \tilde{\Gamma}_{12}^1 = \tilde{\Gamma}_{21}^1 = \tilde{\Gamma}_{22}^1 = \tilde{\Gamma}_{11}^2 = \tilde{\Gamma}_{12}^2 = \tilde{\Gamma}_{21}^2 = \tilde{\Gamma}_{22}^2 = 0$  la *Normal Unimodular Afín* que en

este caso,  $g = -2$ , entonces  $\sqrt{|g|} = \sqrt{2}$ , es decir, si se introducen los siguientes cálculos:

$g^{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $g^{12} = g^{21} = 0$ ;  $g^{22} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , se tendrá,  $\Delta X_0 = (0, 0, 2\sqrt{2})$ , o sea,  $N_{uu} = (0, 0, \sqrt{2})$  la

Normal Euclidiana se calcula con la siguiente expresión queda:

$$N_{eu} = \left( -\frac{2u}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \frac{2v}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \right) \quad (12)$$

### Elipsoide

Derivadas parciales:

$X_{01} = X_{0u}(u, v) = \left( 1, 0, -\frac{u/a^2}{\sqrt{1 - u^2/a^2 - v^2/b^2}} \right)$ ;  $X_{02} = X_{0v}(u, v) = \left( 0, 1, -\frac{v/b^2}{\sqrt{1 - u^2/a^2 - v^2/b^2}} \right)$

$$X_{011} = X_{0uu}(u, v) = \left( 0, 0, \frac{(ab)^{-2}(v^2 - b^2)}{\sqrt{(1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)^3}} \right); \quad X_{022} = X_{0vv}(u, v) = \left( 0, 0, \frac{(ab)^{-2}(u^2 - a^2)}{\sqrt{(1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)^3}} \right)$$

$$X_{012} = X_{0uv}(u, v) = \left( 0, 0, -\frac{(ab)^{-2}uv}{\sqrt{(1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)^3}} \right). \quad \text{Coeficientes} \quad h_{11} = \frac{(ab)^{-2}(v^2 - b^2)}{\sqrt{(1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)^3}};$$

$$h_{22} = \frac{(ab)^{-2}(u^2 - a^2)}{\sqrt{(1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)^3}}; \quad h_{12} = -\frac{(ab)^{-2}uv}{\sqrt{(1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)^3}}; \quad \text{entonces, } H = \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \neq 0 \text{ puesto}$$

$$\text{que: } H = \frac{(ab)^{-2}}{(1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)^2}; \quad \text{entonces, } (H)^{1/4} = \frac{1}{\sqrt{(ab)(1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)}}.$$

Ahora, los **coeficientes del tensor métrico**:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{h_{\alpha\beta}}{|H|^{1/4}} \Rightarrow g_{11} = \frac{(ab)^{-3/2}(v^2 - b^2)}{(1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)}; \quad g_{22} = \frac{(ab)^{-3/2}(u^2 - a^2)}{(1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)}; \quad g_{12} = \frac{(ab)^{-3/2}uv}{(1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)}$$

$$(g_{\alpha\beta}) = \frac{(ab)^{-3/2}}{(1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)} \begin{pmatrix} v^2 - b^2 & -uv \\ -uv & u^2 - a^2 \end{pmatrix}, \text{ la matriz inversa: } (g^{\alpha\beta}) = (ab)^{-1/2} \begin{pmatrix} u^2 - a^2 & uv \\ uv & v^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

los **símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita** asociada a esta métrica

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{11}^1 &= (ab)^{-5} u \left( \frac{u^2 v^2}{a^2} - \frac{u^2 b^2}{a^2} + b^2 - 2v^2 \right) (1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)^{-2} \\ \tilde{\Gamma}_{12}^1 &= \tilde{\Gamma}_{21}^1 = (ab)^{-5} u \left( \frac{u^2 v^2}{a^2} - \frac{u^2 b^2}{a^2} + b^2 - 2v^2 \right) (1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)^{-2} \\ \tilde{\Gamma}_{22}^1 &= -(ab)^{-5} u (u^2 - a^2) (1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)^{-2} \\ \tilde{\Gamma}_{11}^2 &= (ab)^{-5} uv \left( -u + \frac{u^3}{a^2} + \frac{u^2 v}{b^2} - \frac{a^2 v}{b^2} \right) (1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)^{-2} \\ \tilde{\Gamma}_{12}^2 &= \tilde{\Gamma}_{21}^2 = (ab)^{-5} \frac{u}{a^2} \left( u^2 v^2 + (v^2 - b^2)^2 \right) (1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)^{-2} \\ \tilde{\Gamma}_{22}^2 &= (ab)^{-5} \left( a^2 - 2u^2 + \frac{u^3}{a^2} + \frac{u^2 v^2}{b^2} - \frac{a^2 v^2}{b^2} \right) (1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)^{-2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

la **Normal Unimodular Afín** que en este caso,  $g = \frac{1}{(ab)(1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)}$ , entonces

$$\sqrt{|g|} = \frac{1}{\sqrt{(ab)(1 - u^2/a^2 - v^2/b^2)}}, \text{ es decir, si se introducen los siguientes cálculos:}$$

$$(g^{\alpha\beta}) = (ab)^{-1/2} \begin{pmatrix} u^2 - a^2 & uv \\ uv & v^2 - b^2 \end{pmatrix} \quad g^{11} = (ab)^{-1/2}(u^2 - a^2); \quad g^{12} = g^{21} = (ab)^{-1/2}uv;$$

$$g^{22} = (ab)^{-1/2}(v^2 - b^2) \text{ se tendrá, } N_{ua} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \left[ u, v, \sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}} \right], \text{ la Normal Euclidiana se}$$

calcula con la siguiente expresión, queda:

$$N_{eu} = \left( \begin{array}{c} \frac{u}{a^3 b \sqrt{u^2 b^4 + v^2 a^4 + (a^2 b^2 - u^2 b^2 - v^2 a^2)^2}}, \\ -\frac{v}{ab^3 \sqrt{u^2 b^4 + v^2 a^4 + (a^2 b^2 - u^2 b^2 - v^2 a^2)^2}}, \\ \frac{1}{ab \sqrt{u^2 b^4 + v^2 a^4 + (a^2 b^2 - u^2 b^2 - v^2 a^2)^2}} \end{array} \right) \quad (14)$$

### Hiperboloide (de una hoja)

Derivadas parciales:

$$X_{01} = X_{0u}(u, v) = \left( 1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 - v^2 - 1}} \right); \quad X_{02} = X_{0v}(u, v) = \left( 0, 1, -\frac{v}{\sqrt{u^2 - v^2 - 1}} \right);$$

$$X_{011} = X_{0uu}(u, v) = \left( 0, 0, -\frac{v^2 + 1}{(\sqrt{u^2 - v^2 - 1})^3} \right); \quad X_{022} = X_{0vv}(u, v) = \left( 0, 0, -\frac{u^2 - 1}{(\sqrt{u^2 - v^2 - 1})^3} \right);$$

$$X_{012} = X_{0uv}(u, v) = \left( 0, 0, \frac{uv}{(\sqrt{u^2 - v^2 - 1})^3} \right). \quad \text{Coeficientes} \quad h_{11} = -\frac{v^2 + 1}{(\sqrt{u^2 - v^2 - 1})^3};$$

$$h_{22} = -\frac{u^2 - 1}{(\sqrt{u^2 - v^2 - 1})^3}; \quad h_{12} = \frac{uv}{(\sqrt{u^2 - v^2 - 1})^3}. \quad \text{Primeramente, se verifica que}$$

$$H = \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow H = (u^2 - v^2 - 1)^4 \text{ entonces, } \boxed{(H)^{1/4} = u^2 - v^2 - 1}, \text{ ahora, los coef}$$

$$\text{tensor métrico: } g_{\alpha\beta} = \frac{h_{\alpha\beta}}{|H|^{1/4}} \Rightarrow g_{11} = -\frac{v^2 + 1}{(\sqrt{u^2 - v^2 - 1})^{5/2}}; \quad g_{12} = \frac{uv}{(\sqrt{u^2 - v^2 - 1})^{5/2}}$$

$$\boxed{(g_{\alpha\beta}) = (u^2 - v^2 - 1)^{-5/2} \begin{pmatrix} -(v^2 + 1) & uv \\ uv & -(u^2 - 1) \end{pmatrix}} \quad \text{la matriz inversa:}$$

$$\boxed{(g^{\alpha\beta}) = -(u^2 - v^2 - 1)^{3/2} \begin{pmatrix} (u^2 - 1) & uv \\ uv & (v^2 + 1) \end{pmatrix}}, \text{ la Normal Unimodular Afín que en este caso,}$$

$g = (u^2 - v^2 - 1)^{-4}$ , entonces  $\sqrt{|g|} = (u^2 - v^2 - 1)^{-2}$ , es decir, si se introducen los siguientes cálculos:

$$g^{11} = -(u^2 - v^2 - 1)^{3/2} (u^2 - 1); \quad g^{12} = g^{21} = -(u^2 - v^2 - 1)^{3/2} uv; \quad g^{22} = -(u^2 - v^2 - 1)^{3/2} (v^2 + 1) \text{ es,}$$

$$\Delta X_0 = \left( -\frac{2u}{\sqrt{u^2 - v^2 - 1}}, -\frac{2v}{\sqrt{u^2 - v^2 - 1}}, -2 \right), \text{ o sea, } \boxed{N_{ua} = -\frac{1}{\sqrt{u^2 - v^2 - 1}} (u, v, \sqrt{u^2 - v^2 - 1})} \text{ la}$$

Normal Euclidiana queda:

$$N_{eu} = \left( -\frac{u}{\sqrt{2u^2-1}}, \frac{v}{\sqrt{2u^2-1}}, \frac{1}{\sqrt{2u^2-1}} \right) \quad (15)$$

### Hiperboloide (de dos hojas)

Derivadas parciales:

$$X_{01} = X_{0u}(u, v) = \left( 1, 0, \frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \right); \quad X_{02} = X_{0v}(u, v) = \left( 0, 1, \frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \right);$$

$$X_{011} = X_{0uu}(u, v) = \left( 0, 0, \frac{1+v^2}{(\sqrt{1+u^2+v^2})^3} \right); \quad X_{022} = X_{0vv}(u, v) = \left( 0, 0, \frac{1+u^2}{(\sqrt{1+u^2+v^2})^3} \right)$$

$$X_{012} = X_{0uv}(u, v) = \left( 0, 0, -\frac{uv}{(\sqrt{1+u^2+v^2})^3} \right). \quad \text{Coeficientes} \quad h_{11} = \frac{1+v^2}{(\sqrt{1+u^2+v^2})^3};$$

$$h_{22} = \frac{1+u^2}{(\sqrt{1+u^2+v^2})^3}; \quad h_{12} = -\frac{uv}{(\sqrt{1+u^2+v^2})^3}, \quad \text{primeramente, se verifica que,}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \text{ entonces, } (H)^{1/4} = (1+u^2+v^2)^{-1/8}, \text{ ahora, los coeficientes del tensor}$$

$$\text{métrico: } g_{\alpha\beta} = \frac{h_{\alpha\beta}}{|H|^{1/4}} \Rightarrow g_{11} = (1+v^2)(1+u^2+v^2)^{-1/8}; \quad g_{22} = (1+u^2)(1+u^2+v^2)^{-1/8};$$

$$g_{12} = (-uv)(1+u^2+v^2)^{-1/8} \quad (g_{\alpha\beta}) = (1+u^2+v^2)^{-1/8} \begin{pmatrix} 1+v^2 & -uv \\ -uv & 1+u^2 \end{pmatrix}, \text{ la matriz inversa:}$$

$$(g^{\alpha\beta}) = (1+u^2+v^2)^{3/8} \begin{pmatrix} 1+u^2 & uv \\ uv & 1+v^2 \end{pmatrix}, \text{ la Normal Unimodular Afín } N_{ua} = \frac{1}{2} \Delta(X_0), \text{ que en}$$

este caso,  $g = (1+u^2+v^2)^{-7/4}$ , entonces  $\sqrt{|g|} = (1+u^2+v^2)^{-7/8}$ , es decir, si se introducen los siguientes cálculos:  $g^{11} = (1+u^2+v^2)^{3/8} (1+u^2)$ ;  $g^{12} = g^{21} = (1+u^2+v^2)^{3/8} uv$ ;

$$g^{22} = (1+u^2+v^2)^{3/8} (1+v^2) \text{ se tendrá, } N_{ua} = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^{3/4}} \left( u, v, (1+u^2+v^2)^{3/2} \right); \text{ la Normal}$$

$$\text{Euclidiana } N_{eu} = \left( -\frac{u}{\sqrt{2u^2+2v^2+1}}, -\frac{v}{\sqrt{2u^2+2v^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{2u^2+2v^2+1}} \right).$$

### Cúbica tetraedral

$$\text{Derivadas parciales: } X_{01} = X_{0u}(u, v) = \left( 1, 0, -\frac{1}{u^2v} \right); \quad X_{02} = X_{0v}(u, v) = \left( 0, 1, -\frac{1}{uv^2} \right);$$

$$X_{011} = X_{0uu}(u, v) = \left( 0, 0, \frac{2}{u^3v} \right); \quad X_{022} = X_{0vv}(u, v) = \left( 0, 0, \frac{2}{uv^3} \right); \quad X_{012} = X_{0uv}(u, v) = \left( 0, 0, \frac{1}{u^2v^2} \right)$$

Coefficientes  $h_{11} = \frac{2}{u^3v}$ ;  $h_{22} = \frac{2}{uv^3}$ ;  $h_{12} = \frac{1}{u^2v^2}$ , primeramente, se verifica que

$$H = \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad H = \begin{vmatrix} \frac{2}{u^3v} & \frac{1}{u^2v^2} \\ \frac{1}{u^2v^2} & \frac{2}{uv^3} \end{vmatrix} = \frac{3}{u^4v^4} \quad \text{entonces,} \quad \boxed{(H)^{\frac{1}{4}} = \left| \frac{3}{u^4v^4} \right|^{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{uv}}$$

ahora, los **coeficientes del tensor métrico**:  $g_{\alpha\beta} = \frac{h_{\alpha\beta}}{|H|^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow g_{11} = \frac{h_{11}}{|H|^{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{2}{u^3v}}{\frac{\sqrt[4]{3}}{uv}} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} u^{-2}$ ;

$$g_{22} = \frac{h_{22}}{|H|^{\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} v^{-2}; \quad g_{12} = \frac{h_{12}}{|H|^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} (uv)^{-1} \quad \boxed{(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt[4]{3}} u^{-2} & \frac{1}{\sqrt[4]{3}} (uv)^{-1} \\ \frac{1}{\sqrt[4]{3}} (uv)^{-1} & \frac{2}{\sqrt[4]{3}} v^{-2} \end{pmatrix}}$$

o también,  $\boxed{(g_{\alpha\beta}) = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \begin{pmatrix} u^{-2} & (2uv)^{-1} \\ (2uv)^{-1} & v^{-2} \end{pmatrix}}$ , **la matriz inversa**:  $\boxed{(g^{\alpha\beta}) = \frac{\sqrt[4]{3}}{3} \begin{pmatrix} 2u^2 & -uv \\ -uv & 2v^2 \end{pmatrix}}$

los **símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita** asociada a esta métrica resultan,

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1 = \frac{4}{3} \left( -\frac{1}{u} + \frac{v}{u^2} \right); \quad \tilde{\Gamma}_{12}^1 = \tilde{\Gamma}_{21}^1 = \tilde{\Gamma}_{22}^1 = \tilde{\Gamma}_{11}^2 = 0; \quad \tilde{\Gamma}_{12}^2 = \tilde{\Gamma}_{21}^2 = \frac{2}{3} \left( \frac{v}{u^2} \right); \quad \tilde{\Gamma}_{22}^2 = -\frac{1}{v}$$

la **Normal Unimodular Afín**  $N_{ua} = \frac{1}{2} \Delta(X_0)$ , que en este caso,  $g = \frac{\sqrt{3}}{u^2v^2}$ , entonces

$\sqrt{|g|} = \frac{\sqrt[4]{3}}{uv}$ , es decir, si se introducen los siguientes cálculos:  $g^{11} = \frac{\sqrt[4]{3}}{3} 2u^2$ ;

$g^{12} = g^{21} = -\frac{\sqrt[4]{3}}{3} uv$ ;  $g^{22} = \frac{\sqrt[4]{3}}{3} 2v^2$ , tendremos,  $\boxed{N_{ua} = \frac{\sqrt[4]{3}}{3} \left( u, v, \frac{1}{uv} \right)}$  y la **Normal Euclidiana**

$$\boxed{N_{eu} = \left( -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+u^4v^4}}, -\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+u^4v^4}}, \frac{u^2v^2}{\sqrt{u^2+v^2+u^4v^4}} \right)}$$

### Superficie de Cayley

Derivadas parciales:

$$X_{01} = X_{0u}(u, v) = (1, 0, v); \quad X_{02} = X_{0v}(u, v) = (0, 1, u + v^2); \quad X_{011} = X_{0uu}(u, v) = (0, 0, 0);$$

$$X_{022} = X_{0vv}(u, v) = (0, 0, 2v); \quad X_{012} = X_{0uv}(u, v) = (0, 0, 1). \quad \text{Coeficientes } h_{11} = 0; h_{22} = 2v;$$

$h_{12} = 1$  entonces, primeramente verificamos que  $H = \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow |H| = 1$ , entonces,

$\boxed{(H)^{\frac{1}{4}} = |(-1)|^{\frac{1}{4}} = 1}$ , ahora, los **coeficientes del tensor métrico**:

$$g_{11} = \frac{h_{11}}{|H|^{\frac{1}{4}}} = 0; \quad g_{22} = \frac{h_{22}}{|H|^{\frac{1}{4}}} = 2v; \quad g_{12} = \frac{h_{12}}{|H|^{\frac{1}{4}}} = 1 \quad \boxed{(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2v \end{pmatrix}}, \quad \text{la matriz}$$

**inversa**:  $\boxed{(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -2v & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$ , los **símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita**

asociada a esta métrica resultan,  $\tilde{\Gamma}_{11}^1 = \tilde{\Gamma}_{12}^1 = \tilde{\Gamma}_{21}^1 = \tilde{\Gamma}_{11}^2 = \tilde{\Gamma}_{12}^2 = \tilde{\Gamma}_{21}^2 = \tilde{\Gamma}_{22}^2 = 0$ ;  $\tilde{\Gamma}_{22}^1 = -2v$ , **la Normal Unimodular Afín**, que en este caso,  $g = -1$ , entonces,  $\sqrt{|g|} = 1$ , es decir, si introducimos los siguientes cálculos:  $g^{11} = -2v$ ;  $g^{12} = g^{21} = 1$ ;  $g^{22} = 0$ ; tendremos,  $\Delta X_0 = (0, 0, 2)$  o sea,  $N_{ua} = (0, 0, 1)$ , **la Normal Euclidiana**, queda:

$$N_{eu} = \left( -\frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2(1+2u+v^2)}}, -\frac{u+v^2}{\sqrt{1+u^2+v^2(1+2u+v^2)}}, \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2(1+2u+v^2)}} \right) \quad (16)$$

Profundizando aún más el cálculo, se pueden mostrar otros resultados obtenidos, de forma tal que la teoría expuesta queda mejor ilustrada. Se han calculado hasta ahora los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita de algunas de las superficies seleccionadas. Primeramente, se calculan los símbolos de Christoffel de la conexión normal inducida. Si se considera  $\{X_{0\alpha}, N_{ua} : \alpha = 1, 2\}$  como una base de  $\mathbb{R}^3$ , entonces se puede expresar la siguiente combinación lineal:

$$\partial_{\alpha\beta}(X_0) = \Gamma_{\alpha\beta}^1 X_{01} + \Gamma_{\alpha\beta}^2 X_{02} + k_{\alpha\beta} N_{ua} \quad (17)$$

Ya se conocen:  $X_{01}; X_{02}; N_{ua}$ , entonces se pueden calcular los  $\Gamma_{\alpha\beta}^1; \Gamma_{\alpha\beta}^2$ . En términos generales es válido el siguiente desarrollo, como las superficies están expresadas en la forma de Monge:  $X_0 = (u, v, f(u, v))$ , derivando:  $\partial_{\alpha\beta}(X_0) = (0, 0, \partial_{\alpha\beta}[f(u, v)])$ . Se ha visto que:  $X_{01} = (1, 0, \partial_1 f)$  y  $X_{02} = (0, 1, \partial_2 f)$ , es decir que quedan sistemas de ecuaciones de tres incógnitas:  $(0, 0, \partial_{\alpha\beta}[f(u, v)]) = \Gamma_{\alpha\beta}^1 (0, 0, \partial_1 f) + \Gamma_{\alpha\beta}^2 (0, 0, \partial_2 f) + k_{\alpha\beta} (N_{ua1}, N_{ua2}, N_{ua3})$ , así,

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \Gamma_{\alpha\beta}^1 + k_{\alpha\beta} N_{ua1} \\ 0 = \Gamma_{\alpha\beta}^2 + k_{\alpha\beta} N_{ua2} \\ \partial_{\alpha\beta}[f(u, v)] = \Gamma_{\alpha\beta}^1 \partial_1 f + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \partial_2 f + k_{\alpha\beta} N_{ua3} \end{array} \right. \quad (18)$$

de lo cual se obtiene como resultado:

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma_{\alpha\beta}^1 = \frac{N_{ua1} \partial_{\alpha\beta}[f(u, v)]}{\partial_1 f N_{ua1} + \partial_2 f N_{ua2} - N_{ua3}}; \quad \Gamma_{\alpha\beta}^2 = \frac{N_{ua2} \partial_{\alpha\beta}[f(u, v)]}{\partial_1 f N_{ua1} + \partial_2 f N_{ua2} - N_{ua3}} \\ k_{\alpha\beta} = -\frac{\partial_{\alpha\beta}[f(u, v)]}{\partial_1 f N_{ua1} + \partial_2 f N_{ua2} - N_{ua3}} \end{array} \right\} \quad (19)$$

En este caso, no es necesario calcular los  $k_{\alpha\beta}$ , ya que resultan coeficientes de los  $g_{\alpha\beta}$ , ya calculados. Se muestran ahora, los símbolos de Christoffel de la conexión normal inducida de algunas de las superficies: Paraboloide Elíptico, Hiperbólico y la Superficie de Cayley, los valores son:  $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$ . Mientras que, para las otras

superficies seleccionadas, estos símbolos no son nulos: por ejemplo, para la **Cúbica Tetraedral**, los resultados son: Las componentes de la Primera Forma Fundamental

Unimodular Afín:  $g_{11} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}u^2}$  ;  $g_{22} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}uv^3}$  ;  $g_{12} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}uv}$ . Los **símbolos de**

**Christoffel de la conexión normal inducida**:  $\Gamma_{11}^1 = -\frac{2}{3u}$  ;  $\Gamma_{11}^2 = -\frac{2v}{3u^2}$  ;  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{3v}$  ;

$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\frac{1}{3u}$  ;  $\Gamma_{22}^1 = -\frac{2u}{3v^2}$  ;  $\Gamma_{22}^2 = -\frac{2}{3v}$ . Considerando ahora, las derivadas ordinarias de

los coeficientes del tensor métrico:  $\partial_1 g_{11} = -\frac{4(\sqrt[4]{3})^3}{3u^3}$  ;  $\partial_2 g_{11} = \partial_1 g_{22} = 0$  ;

$\partial_1 g_{12} = \partial_1 g_{21} = -\frac{1(\sqrt[4]{3})^3}{3u^2v}$  ;  $\partial_2 g_{12} = \partial_2 g_{21} = -\frac{1(\sqrt[4]{3})^3}{3uv^2}$  ;  $\partial_2 g_{22} = -\frac{4(\sqrt[4]{3})^3}{3v^3}$ , la derivada

covariante de los coeficientes de la Primera Forma Fundamental Unimodular Afín (con respecto a la conexión normal inducida):  $g_{\alpha\beta;\gamma} = \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \sum_\mu g_{\alpha\mu} \Gamma_{\beta\gamma}^\mu - \sum_\mu g_{\beta\mu} \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu$ . Porque

además, se sabe  $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$  (derivada covariante con respecto a la conexión de Levi-Civita):

rotando los índices  $\alpha, \beta, \gamma$ , que, para la superficie **cúbica tetraedral** es:  $g_{111} = g_{222} = 0$  ;

$g_{112} = g_{211} = g_{121} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}u^2v}$  ;  $g_{122} = g_{221} = g_{212} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}uv^2}$ . Ahora,

$\nabla \Pi_{ua} = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\alpha\beta\gamma;\delta} (du^\alpha du^\beta du^\gamma) \otimes du^\delta$  si:  $g_{\alpha\beta\gamma;\delta} = \partial_\delta g_{\alpha\beta\gamma} - \sum_\mu g_{\alpha\beta\mu} \Gamma_{\gamma\delta}^\mu - \sum_\mu g_{\beta\gamma\mu} \Gamma_{\alpha\delta}^\mu - \sum_\mu g_{\alpha\gamma\mu} \Gamma_{\beta\delta}^\mu$

En la elaboración de esta teoría, se ha trabajado con varios “*tensores diferencia*”. El **tensor diferencia entre ambas conexiones** será, por definición:  $A_{\beta\gamma}^\alpha := \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha - \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$  ; pero, también se lo

puede expresar de la siguiente manera:  $A_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} \sum_\mu g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta\gamma}$ , donde los  $g_{\alpha\beta\gamma}$ . Siendo  $g_{\alpha\beta\gamma;\delta}$  la

derivada covariante con respecto a la conexión normal inducida de los  $g_{\alpha\beta\gamma}$ . Para aquellas

superficies con  $\Pi_{ua} \neq 0$  se puede calcular la derivada covariante de la Segunda Forma Fundamental Unimodular Afín, y la derivada covariante del tensor diferencia:

$$A_{\beta\gamma;\delta}^\alpha = \frac{1}{2} \sum_\mu \left( (g^{\alpha\mu})_{;\delta} g_{\mu\beta\gamma} + g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta\gamma;\delta} \right) \quad (20)$$

Se tienen todos los insumos para esa fórmula, sólo me falta  $(g^{\alpha\mu})_{;\delta}$ , que se calcula de la siguiente manera: Sabiendo que,  $g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta_\beta^\alpha$ , siendo,  $\delta_\beta^\alpha$  el delta de Kroenecker. Derivando covariantemente,

$$(g^{\alpha\mu})_{;\delta} g_{\mu\beta} + g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta;\delta} = 0 \quad (21)$$

es decir que,

$$(g^{\alpha\mu})_{;\delta} g_{\mu\beta} = -g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta;\delta} \tag{22}$$

multiplicando en ambos miembros por  $g^{\beta\gamma}$ :  $(g^{\alpha\mu})_{;\delta} \underbrace{g_{\mu\beta} g^{\beta\gamma}}_{\delta_\mu^\gamma} = -g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta;\delta} g^{\beta\gamma}$ , con lo cual finalmente, cuando  $\mu = \gamma$ :

$$(g^{\alpha\mu})_{;\delta} = -g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta;\delta} g^{\beta\gamma} \tag{23}$$

o, lo mismo:  $\sum_\mu (g^{\alpha\mu})_{;\delta} = -\sum_{\mu,\beta} g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta;\delta} g^{\beta\gamma}$ . Para obtener los coeficientes de la Tercera Forma Fundamental Unimodular Afín, los coeficientes mixtos:  $\partial_\alpha N_{ua} = -\sum_\beta B_\alpha^\beta (\partial_\beta X_0)$ , al desarrollar:  $\partial_1 N_{ua} = -B_1^1 (\partial_1 X_0) - B_1^2 (\partial_2 X_0)$ ;  $\partial_2 N_{ua} = -B_2^1 (\partial_1 X_0) - B_2^2 (\partial_2 X_0)$ . Los coeficientes de la **Tercera Forma Fundamental Afín**:  $B_{\alpha\beta} = \sum_\gamma g_{\alpha\gamma} B_\beta^\gamma$ . Para la “**cúbica tetraedral**”,  $B_1^1 = -\frac{\sqrt[4]{3}}{3}$ ;  $B_1^2 = \frac{1}{3uv}$ ;  $B_2^1 = \frac{1}{3uv}$ ;  $B_2^2 = \frac{\sqrt[4]{3}}{3}$ . Para la superficie, que se ha dado en denominar “**cúbica tetraedral**”, el tensor diferencia:  $A_{11}^1 = -\frac{3}{2u}$ ;  $A_{11}^2 = -\frac{3}{2u}$ ;

$A_{12}^1 = -\frac{1}{6v}$ ;  $A_{21}^1 = -\frac{1}{3v}$ ;  $A_{11}^2 = -\frac{3}{2u}$ ;  $A_{12}^2 = -\frac{1}{3u}$ ;  $A_{21}^2 = -\frac{1}{6u}$ ;  $A_{22}^2 = -\frac{3}{2v}$ , dada la Normal Unimodular Afín:  $N_{ua} = \frac{\sqrt[4]{3}}{3} \left( u, v, \frac{1}{uv} \right)$ , sus derivadas con respecto a cada componente:

$\partial_1 N_{ua} = \frac{\sqrt[4]{3}}{3} \left( 1, 0, -\frac{1}{u^2 v} \right)$ ;  $\partial_2 N_{ua} = \frac{\sqrt[4]{3}}{3} \left( 0, 1, -\frac{1}{uv^2} \right)$ , entonces, los coeficientes valen:

$B_1^1 = -\frac{\sqrt[4]{3}}{3}$ ;  $B_1^2 = \frac{1}{3uv}$ ;  $B_2^1 = \frac{1}{3uv}$ ;  $B_2^2 = \frac{\sqrt[4]{3}}{3}$ , recordando  $g_{11} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}u^2}$  ;  $g_{22} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}v^2}$  ;  $g_{12} = g_{21} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}uv}$ , quedan  $B_{11} = -\frac{2}{\sqrt[4]{3}u^2} \frac{\sqrt[4]{3}}{3} = -\frac{2}{3u^2}$ ;  $B_{12} = B_{21} = \frac{1}{3uv}$ ;

$B_{22} = -\frac{2}{\sqrt[4]{3}v^2} \frac{\sqrt[4]{3}}{3} = -\frac{2}{3v^2}$ . A continuación, se presentan unos gráficos donde se pueden ver ambas normales para ilustrar mejor la teoría. La no coincidencia de las normales **euclidiana** y **unimodular afín** es uno de los aspectos más importantes de la teoría, como se puede ver en estas gráficas de la Figura 3. Todo este cálculo, puede ser verificado (de hecho así se hizo ya), a través de este algoritmo de ecuaciones, ya que las superficies están expresadas en forma de Monge:  $F := |\det(\partial_{\alpha\beta} f)|$ . Finalmente, se puede decir que, la elección de la superficie no interviene en el cálculo de la teoría, podría ser ésta cualquiera. La extrapolación a una métrica volumétrica es directa, con lo cual, se puede dimensionar cualquier tipo de cáscara cuya superficie media esté conformada por una superficie de las que han sido seleccionadas en este capítulo, o cualquiera otra.

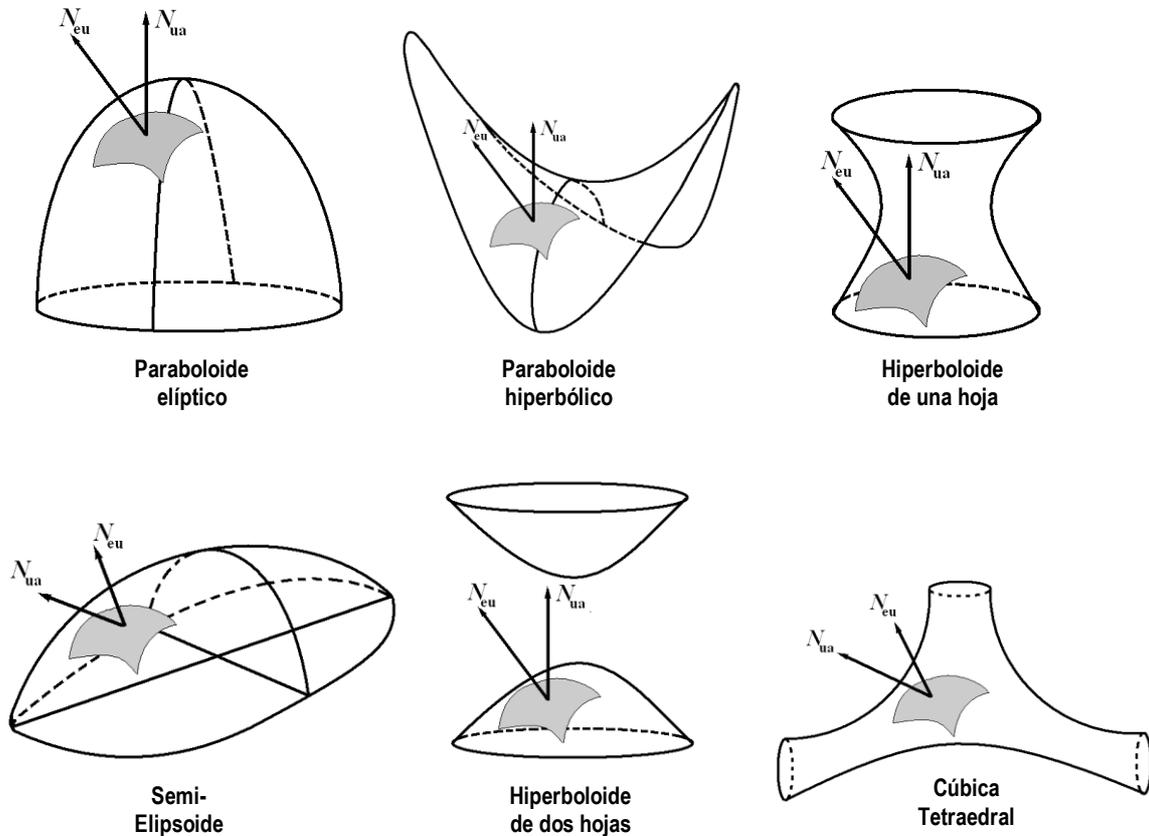


Figura 3: superficies escogidas para ilustrar la teoría y comparar

Es importante aclarar, especialmente, que: **el hecho que haya más superficies que sean equivalentes bajo el Grupo Unimodular Afín implica una economía de recursos de elaboración y computación.**

Por otra parte, es también muy importante destacar que se puede lograr una, mucho mayor, riqueza de Arquitectura de las estructuras. Si bien no se considera en este trabajo el aspecto artístico. No se ha visto en el mundo (al menos construida hasta ahora) una cúpula o bóveda (cáscara) que tenga como modelo de superficie media una *cúbica tetraedral*. Es decir, también entrando en el campo artístico, estamos abriendo la oportunidad para generar una mayor riqueza desde el punto de vista arquitectónico.

Entre las cantidades a utilizar para una aproximación de una descripción bidimensional de la cáscara, algunos autores se refieren al sistema tensional y otros a la geometría en si (sistema de deformaciones), con ecuaciones constitutivas que relacionen ambos sistemas.

Las condiciones de integrabilidad establecidas son una consecuencia directa de las correspondientes condiciones de compatibilidad, ya expuestas en trabajos anteriores. En este caso, donde la dimensión es dos se puede reducir la demostración del citado teorema a un procedimiento de dos pasos, donde se considera primero la expresión que involucra a la ecuación de Gauss Afín, conjuntamente con la expresión de las derivadas locales del Campo Vectorial Normal Afín:

$$\left. \begin{aligned} (X_0)_{\alpha\beta}^* &= g_{\alpha\beta}^* N_{ua}^* + \Gamma_{\alpha\beta}^{*1} (X_0)_1^* + \Gamma_{\alpha\beta}^{*2} (X_0)_2^* \\ (N_{ua}^*)_{\alpha} &= -\sum_{\beta} B_{\alpha}^{*\beta} (X_0)_{\beta}^* \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Este es un sistema de cinco Ecuaciones Diferenciales Parciales, donde se considera que intervienen los campos vectoriales  $(X_0)_{11}^*$ ,  $(X_0)_{12}^*$ ,  $(X_0)_{22}^*$ ,  $(N_{ua}^*)_1$ ,  $(N_{ua}^*)_2$ . Todos en la situación de equilibrio cuando la cáscara ya está deformada, que son nuestras incógnitas.

Correspondientemente, se tiene un sistema de quince Ecuaciones Diferenciales Parciales escalares que expresan cada una de estas últimas las coordenadas del Espacio Ambiente.

También, se puede ver que el sistema es integrable y que, además, admite, primeramente, una recuperación de los campos vectoriales  $(X_0)_1^*$ ,  $(X_0)_2^*$  y  $N_{ua}^*$ , provenientes precisamente de las condiciones de integrabilidad, ya expuestas y establecidas. Entonces, con este primer paso del procedimiento se obtienen tres campos vectoriales en términos de expresiones matemáticas bidimensionales obtenidas a partir de las componentes tridimensionales de la pseudométrica de la cáscara deformada,  $G_{ij}^*$ . Teniendo también presente que se usarán expresiones y valores aproximados y, asimismo, considerando la reducción de esos mismos valores a la superficie media ( $w=0$ ). En un segundo paso del procedimiento, se usan las expresiones  $(X_0)_1^*$  y  $(X_0)_2^*$ , así se recupera el campo vectorial representado por la superficie media deformada  $(X_0)^*$  aquí las condiciones de integrabilidad son obviamente satisfechas ya que:  $(X_0)_{12}^* = (X_0)_{21}^*$ . Este mecanismo (o *algoritmo*) es el que se sigue a los efectos de lograr *medir* desde la superficie media sin deformar (original) a la superficie media deformada.

#### 4 ESQUEMA DE CÁLCULO

Nuestro objetivo es integrar el sistema de ecuaciones (24). Para lo cual, primeramente necesitamos calcular, en forma aproximada, todos los coeficientes que aparecen en el sistema. Y esta tarea la haremos, a partir de la ecuación (1). En la que, además, tomaremos la “*aproximación*” sugerida omitiendo el último término, a fin de facilitar los cálculos. Esto es:

$$G_{ik}^* \approx G_{ik} + \frac{2}{\mu} t_{ik} - 2 \left( \frac{1-2\mu}{2\mu} \right) \left( \sum_j t_j^j \right) \delta_{ik} \quad (25)$$

En esta última expresión es más fácil calcular, la matriz inversa. Se puede observar que,

$$\left. \begin{aligned} G_{\alpha\beta} &:= g_{\alpha\beta} - 2u B_{\alpha\beta} + u^2 \sum_{\lambda} B_{\alpha}^{\lambda} B_{\beta\lambda} \\ G_{3\alpha} &= G_{\alpha 3} = G(X_{\alpha}, N_{ua}) := 0 \\ G_{33} &= G(N_{ua}, N_{ua}) := 1 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

(recordar que los índices griegos van del 1 al 2)

Se pueden calcular fácilmente los coeficientes de la superficie no deformada, como:

$$\left. \begin{aligned} G_{\alpha\beta}(u, v, 0) &= g_{\alpha\beta}(u, v) \\ \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial u}(u, v, 0) &= -2B_{\alpha\beta}(u, v) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Lo que nos importa ahora, es que, de forma similar, podemos calcular los primeros coeficientes en las ecuaciones que nos interesa integrar, las (24). Siempre, de manera aproximada, usando la aproximación dada por (26). Y ahora, haciendo un tratamiento bidimensional, usamos las igualdades (27). De las que obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} g^*_{\alpha\beta}(u, v) &= G^*_{\alpha\beta}(u, v, 0) \\ B^*_{\alpha\beta}(u, v) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial G^*_{\alpha\beta}}{\partial u}(u, v, 0) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Y, a partir de estas dos, por contracción de índices, se obtienen los coeficientes buscados  $B^{*\beta}_{\alpha}$ .

Para calcular los dos tipos de coeficientes que faltan en las (24), usamos primeramente las relaciones obtenidas en (Gigena, Abud, Binia, 2012) artículo publicado en MECOM 2012, i.e.:

$$\begin{aligned} G^*(X^*_{\alpha\beta}, G^{*2s} X^*_s) &= G^{*23} g^*_{\alpha\beta} G^*(N^*_{ua}, X^*_3) + \\ &+ \Gamma^*_{\alpha\beta} \underbrace{(G^{*21} G^*_{11} + G^{*22} G^*_{21} + G^{*23} G^*_{31})}_{\delta^2=0} + \\ &+ \Gamma^*_{\alpha\beta} \underbrace{(G^{*21} G^*_{12} + G^{*22} G^*_{22} + G^{*23} G^*_{32})}_{\delta^2=1} \end{aligned} \quad (29)$$

De la cual, obtenemos directamente:

$$\begin{aligned} \Gamma^*_{\alpha\beta} &= G^*(X^*_{\alpha\beta}, G^{*2s} X^*_s) - G^{*23} g^*_{\alpha\beta} G^*(N^*_{ua}, X^*_3) \\ &= G^{*2s} G^*(X^*_{\alpha\beta}, X^*_s) - G^{*23} g^*_{\alpha\beta} G^*(N^*_{ua}, X^*_3) \end{aligned} \quad (30)$$

Y, en esta última ecuación, última línea, observamos que al factor  $G^*(X^*_{\alpha\beta}, X^*_s)$  del primer término, lo podemos calcular usando la ecuación:

$$\frac{1}{2} (\partial_{\beta} G^*_{\alpha s} + \partial_{\alpha} G^*_{\beta s} - \partial_s G^*_{\alpha\beta}) = G^*(X^*_{\alpha\beta}, X^*_s) \quad (31)$$

Mientras que, en el segundo término tenemos que, podemos usar la siguiente ecuación:

$$G^*(N_{ua}^*, X_3^*) = \frac{[X_1^*, X_2^*, X_3^*]}{[X_1^*, X_2^*, N_{ua}^*]} = \sqrt{\frac{\det[G_{ij}^*]}{\det[G_{\alpha\beta}^*]}} = (G^{*33})^{-\frac{1}{2}} \quad (32)$$

esto es:

$$G^*(N_{ua}^*, X_3^*) = (G^{*33})^{-\frac{1}{2}} \quad (33)$$

Entonces, en la (30) todo queda expresado en términos que podemos calcular usando la aproximación (26) *ut supra*. En forma análoga, se calcula el coeficiente restante  $\Gamma_{\alpha\beta}^{*1}$ , a partir de la ecuación:

$$\begin{aligned} G^*(X_{\alpha\beta}^*, G^{*1s} X_s^*) &= G^{*13} g_{\alpha\beta}^* G^*(N_{ua}^*, X_3^*) + \\ &+ \Gamma_{\alpha\beta}^{*1} \underbrace{(G^{*11} G_{11}^* + G^{*12} G_{21}^* + G^{*13} G_{31}^*)}_{\delta_1^1=1} + \\ &+ \Gamma_{\alpha\beta}^{*2} \underbrace{(G^{*11} G_{12}^* + G^{*12} G_{22}^* + G^{*13} G_{32}^*)}_{\delta_2^1=0} \end{aligned} \quad (34)$$

Este mecanismo difiere de la forma habitual que tenemos de medir en Ingeniería, donde inmediatamente, buscamos elementos lineales de tal manera que, nos manejemos con distancias, que, en general, serán desplazamientos. En esta nueva propuesta, la medición se hará con el esquema que se acaba de describir. Como se había propuesto ya en (Gigena, Abud, Binia, 2013) artículo publicado en la Revista Geometry (Hindawi Publications).

## 5 AVANCES EN LOS EJEMPLOS

Se considerarán, en este trabajo, los casos que podrían llegar a ser más frecuentes de aplicación de la Ingeniería, a modo de ilustración de este mecanismo, pero con las consiguientes idealizaciones para lograr un resultado comparable con los resultados ya obtenidos por otros autores al aproximar. Solo se expondrán algunos ejemplos (dos) por razones de brevedad del mismo. Además, se tomará una relación de Poisson correspondiente a un material tipo como podría ser un hierro, cerámico, arena u otro tipo, pero que podamos considerarlo, estimativamente, en el orden de  $\mu = \frac{1}{4} = 0,25$ . Suponemos una cáscara en estado inicial no deformado cuya superficie media tiene una similitud matemática con: Paraboloides elíptico y la Cúbica tetraedral.

Se irá trabajando paralelamente con ambas superficies, aclarando en cada caso la utilización de una u otra. Se utilizarán resultados ya obtenidos de investigaciones anteriores de estos mismos autores. Los resultados de la superficie no deformada u original, antes de ser aplicadas las sollicitaciones que deforman a la misma y que, en consecuencia, generan un estado tensional en la cáscara, se consideran como conocidos o datos del planteo del problema. Entonces, suponiendo coeficientes métricos deformados en la cáscara,

$$G_{ik}^* = \begin{bmatrix} G_{11}^* & G_{12}^* & G_{13}^* \\ G_{12}^* & G_{22}^* & G_{22}^* \\ G_{13}^* & G_{23}^* & G_{33}^* \end{bmatrix} \quad (35)$$

A partir de la anterior ecuación, se puede calcular la correspondiente matriz de la pseudo-métrica en la superficie deformada,  $g_{\alpha\beta}^* = \begin{bmatrix} g_{11}^* & g_{12}^* \\ g_{12}^* & g_{22}^* \end{bmatrix}$ . En efecto, las componentes usando la ecuación (28). Esto es:  $g_{\alpha\beta}^*(u, v) = G_{\alpha\beta}^*(u, v, 0)$ . La misma ecuación nos permite expresar, asimismo, que  $B_{\alpha\beta}^*(u, v) = -\frac{1}{2} \frac{\partial G_{\alpha\beta}^*}{\partial w}(u, v, 0)$ . Y, usando las dos anteriores, por contracción de índices obtenemos:  $B_{\alpha}^{*\beta} = \sum_{\gamma} B_{\alpha\gamma}^* g^{*\beta\gamma}$ . Por otra parte, usando las ecuaciones (30), (31), (32), (33) y (34) podemos calcular los coeficientes restantes de las ecuaciones diferenciales expresadas en el sistema (24). Esto es:  $\Gamma_{\alpha\beta}^{*1}$  y  $\Gamma_{\alpha\beta}^{*2}$ . De manera tal que, volviendo a los ejemplos expuestos aquí:

Supongamos que, para el Paraboloido elíptico, por la sollicitación de una (o varias) fuerzas aplicada a la cáscara en estado no deformado, los coeficientes métricos de la cáscara deformada quedan expresados por la matriz:

$$G_{ik}^* = \begin{bmatrix} \sqrt{2} + u^2 - \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2} u^2)w & (1 + \sqrt{2} uv)w & G_{13}^* \\ (1 + \sqrt{2} uv)w & \sqrt{2} + v^2 - \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2} v^2)w & G_{22}^* \\ G_{13}^* & G_{23}^* & G_{33}^* \end{bmatrix} \quad (36)$$

En consecuencia, los coeficientes métricos de la superficie deformada quedan expresados por la matriz:

$$(g_{\alpha\beta}^*) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + u^2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} + v^2 \end{pmatrix} \quad (37)$$

entonces, la *matriz inversa de la anterior*, nos muestra los coeficientes métricos contravariantes:

$$(g^{*\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{u^2 + \sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2 + \sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (38)$$

ahora, los símbolos de Christoffel serán algunos nulos:  $\Gamma_{12}^{*1} = \Gamma_{21}^{*1} = \Gamma_{22}^{*1} = \Gamma_{11}^{*2} = \Gamma_{12}^{*2} = \Gamma_{21}^{*2} = 0$

y otros no nulos:  $\Gamma_{11}^{*1} = \frac{\sqrt{2}u}{2+\sqrt{2}u^2}$ ;  $\Gamma_{22}^{*2} = \frac{\sqrt{2}v}{2+\sqrt{2}v^2}$ . Los coeficientes covariantes de la Tercera

Forma Fundamental Unimodular Afín de la superficie deformada quedan expresados, por:  $B_{11}^* = -1 + \sqrt{2}u^2$ ;  $B_{12}^* = B_{21}^* = 1 + \sqrt{2}uv$ ;  $B_{22}^* = -1 + \sqrt{2}v^2$ . Por otro lado, la Cúbica Tetraedral, Esfera Afín (de tipo hiperbólico), los coeficientes métricos de la superficie deformada:

$$(g_{\alpha\beta}^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt[4]{3}u^2} + \frac{1}{u^2} & \frac{1}{uv} \\ \frac{1}{uv} & \frac{1}{\sqrt[4]{3}v^2} + \frac{1}{v^2} \end{pmatrix} \quad (39)$$

la **matriz inversa**, deformada nos muestra los coeficientes métricos contravariantes:

$$(g^{*\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt[4]{3}+3}{2\sqrt[4]{3}+3+\sqrt{3}}u^2 & -\frac{3uv}{2\sqrt[4]{3}+3} \\ -\frac{3uv}{2\sqrt[4]{3}+3} & \frac{\sqrt[4]{3}+3}{2\sqrt[4]{3}+3+\sqrt{3}}v^2 \end{pmatrix} \quad (40)$$

En este caso, los símbolos de Christoffel serán algunos nulos:  $\Gamma_{12}^{*1} = \Gamma_{21}^{*1} = \Gamma_{22}^{*1} = \Gamma_{11}^{*2} = 0$  y otros

no nulos:  $\Gamma_{11}^{*1} = \frac{9v^2}{2\sqrt[4]{3}+3}$ ;  $\Gamma_{12}^{*2} = \Gamma_{21}^{*2} = \left(\frac{\sqrt[4]{3}+3}{2\sqrt[4]{3}+3+\sqrt{3}}\right)\frac{1}{u}$ ;  $\Gamma_{22}^{*2} = \frac{9u^2}{2\sqrt[4]{3}+3}$ . Los coeficientes:

$B_{11}^* = -\frac{\sqrt[4]{3}}{3} - \frac{1}{u}$ ;  $B_{12}^* = B_{21}^* = \frac{1}{3uv} + \frac{1}{uv}$ ;  $B_{22}^* = -\frac{\sqrt[4]{3}}{3} - \frac{1}{v}$ . Ahora, con los datos de las superficies ofrecidas como ejemplos en las ecuaciones a resolver, de manera extensiva quedan:

$$\left. \begin{aligned} (X_0)_{11}^* &= g_{11}^* N_{ua}^* + \Gamma_{11}^{*1} (X_0)_1^* + \Gamma_{11}^{*2} (X_0)_2^* \\ (X_0)_{11}^* &= g_{11}^* N_{ua}^* + \Gamma_{11}^{*1} (X_0)_1^* + \Gamma_{11}^{*2} (X_0)_2^* \\ (X_0)_{12}^* &= (X_0)_{21}^* = g_{12}^* N_{ua}^* + \Gamma_{12}^{*1} (X_0)_1^* + \Gamma_{12}^{*2} (X_0)_2^* \\ (X_0)_{22}^* &= g_{22}^* N_{ua}^* + \Gamma_{22}^{*1} (X_0)_1^* + \Gamma_{22}^{*2} (X_0)_2^* \quad ( \quad ) \\ (N_{ua}^*)_1 &= -B_1^{*1} (X_0)_1^* - B_1^{*2} (X_0)_2^* \\ (N_{ua}^*)_2 &= -B_2^{*1} (X_0)_1^* - B_2^{*2} (X_0)_2^* \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Finalmente, integrando estas ecuaciones obtendremos la posición de la superficie deformada expresada por  $(X_0)^*$  y la posición de la Normal Unimodular Afín:  $N_{ua}^*$ . Con esta información se puede decir que hemos logrado definir la superficie deformada, con respecto a la superficie no deformada (cuyos datos ya nos eran conocidos). (Gigena, Abud, Binia, 2013)

Es decir, en este trabajo se ha mostrado la operatoria de cómo hacerlo, sin mostrar los resultados en sí. Haciendo énfasis en la metodología del procedimiento a desarrollar. La

expectativa de este grupo de investigación es que, una vez pulido este mecanismo, se pueda crear un programa (algoritmo) de cálculo que sirva para cualquier tipo de cáscara planteada.

## 6 CONCLUSIONES

Lo que se ha mostrado aquí en este trabajo es que, aunque la deformación tiene el mismo aspecto en una u otra geometría, nuestro diferente punto de vista provee una teoría para una mirada que requiere “*mente amplia*” en el trabajo con estructuras de tipo cáscaras. Esta es, justamente, la filosofía expuesta por F. John en sus artículos usando Geometría Euclidiana y trasladada a la Geometría Unimodular Afín por estos autores.

Por otro lado, las ecuaciones aproximadas de cáscaras son ofrecidas teniendo en mente que, su solución, para condiciones de borde apropiadas, dejarán armado un esquema de aproximación para la solución del problema tridimensional. Que se podrá comprobar, experimentalmente, a futuro con suficientes fondos como para instalar un Laboratorio adecuado a tal fin. Hoy no lo encontramos en ningún lugar del mundo.

Este aporte plantea un mecanismo consolidado y fundamentado, matemáticamente, para el desarrollo de una alternativa válida para el cálculo de estructuras tipo cáscaras. (Gigena, Abud, Binia, 2013). Y se continúa probando con simulaciones diversas propuestas.

Por último, cabe destacar (sin ánimo de hacer comparaciones banales) que las “*ondas gravitacionales*” que predijo A. Einstein tardaron 100 años en lograr medirse efectivamente. Se lo criticó en aquel entonces porque se creía que eran meras “*elucubraciones teóricas*”.

## REFERENCIAS

- Arciniega, R.A., and Reddy, J.N. *Tensor-based finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of Shell structures*. Journal Computational Methods Applied Mechanics Engineering 196: 1048-1073, 2007.
- Blaschke, W., *Vorlesungen über Differentialgeometrie II*, Springer-Verlag, 1923.
- Calabi, E., Olver, P., Shakiban, C., Tannenbaum, A., and Haker, S., *Differential and Numerically Invariant Signature Curves Applied to Object Recognition*, International Journal of Computer Vision 26 (2): 107-135, 1998.
- Calabi, E., Olver, P., and Tannenbaum, A., *Affine Geometry, Curve Flows and Invariant Numerical Approximations*, Advances in Mathematics 124: 154-196, 1996.
- Gigena, S. Abud, D., Binia, M. *Geometrical and PDE Methods in the Treatment of the Theory of Shells: Comparing Euclidean and Affine Approaches*. Publicado en Revista GEOMETRY de la Editorial Hindawi Publishing Corporation. 15 pages, 2013.
- Gigena, S. Abud, D. Binia, M., *Theory of Affine Shells: Towards Advanced Numerical Approximations*, Revista Mecánica Computacional. Vol. XXIX, ISSN N° 1666-6070, pp. 1031-1044, año 2012.
- Gigena, S., and Abud, D., *Theory of Affine Shells: Second Order Estimates of The Strain and Stress Tensors Treated by P.D.E. Methods*, Proceedings of the X Congress “Dr. Antonio Monteiro”: 1-17, 2010.
- Gigena, S., Abud, D., and Binia, M., *Theory of Affine Shells: Higher Order Estimates*. Mecánica Computacional, Vol. XXIX: 969-988, 2010.
- Gigena, S., Abud, D., and Binia, M., *Teoría de Cáscaras Afines: Estimativas de la Tensión y la Deformación*, Mecánica Computacional, Vol. XXIV: 2745-2758, 2005.
- Gigena, S., Abud, D., and Binia, M., *Teoría de Cáscaras Afines: Desigualdades Básicas*, Mecánica Computacional, Vol. XXIII: 639-652, 2004.
- Gigena S., Binia, M., and Abud, D., *Ecuaciones de equilibrio en Cáscaras Afines*, Mecánica

- Computacional, Vol. XXII: 1953-1963, 2003.
- Gigena, S., Binia, M., and Abud, D., *Condiciones de Compatibilidad para Cáscaras Afines*, Mecánica Computacional Vol. XXI: 1862-1881, 2002.
- Gigena, S., *Hypersurface Geometry & Related Invariants in a Real Vector Space*, Ingreso, Córdoba, Argentina, 1996.
- Gigena, S., *Ordinary Differential Equations in Affine Geometry*, Le Matematiche, Vol. LI, Fasc.I, 119-151, 1996.
- Gigena, S., *Constant Affine Mean Curvature Hypersurfaces of Decomposable Type*, Proc. of Symp. in Pure Math, American Math Society, 54 : (3), 289-316, 1993.
- John, F., *Estimates for the Derivatives of the Stresses in a Thin Shell & Interior Shell Equations*, Comm Pure Appl Math N° 18: 235-267, 1965.
- John, F., *Refined Interior Equations for Thin Elastic Shells*, Comm. Pure Appl. Math N° 24: 583-615, 1971.
- Kinkel, S., Gruttmann, F., and Wagner, W. *A Continuum Based 3D – Shell Element for laminated Structures*, Institut für Baustatik Universität Karlsruhe, Computers & Structures, 43-62, 1999.
- Koiter, W. T., *On the mathematical foundation of shell theory*, Proc. Int. Congr. On Mathematics, Nice, Vol. 3, Paris, 123-130, 1971.
- Love, A.E.H., *A Treatise on The Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed, Dover, 1944.
- Millman, R. and Parker, G., *Elements of Differential Geometry*, Prentice-Hall, N.Jersey, 1977.
- Möllmann, H., *Introduction to the Theory of Thin Shells*, J. Wiley Sons, 1981.
- Nomizu, K., and Sasaki, T., *Affine Differential Geometry*, Cambridge U. Press, 1994.
- Reddy, J. N., *An introduction to Continuum Mechanics*, Cambridge University Press, 2008.
- Wagner, W., and Gruttmann, F., *A Simple Finite Rotation Formulation For Composite Shell Elements* Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Engineering Computations: 145-176, 1994.