

IMPLEMENTACIÓN DE UN MODELO DE DAÑO CON ABLANDAMIENTO EN UN SOFTWARE COMERCIAL

Gerardo A. González del Solar, Pablo E. Martín y Noemí G. Maldonado

Centro Regional de Desarrollos Tecnológicos para la Construcción, Sismología y la Ingeniería Sísmica (CeReDeTeC), Universidad Tecnológica Nacional, Rodríguez 273, 5500 Mendoza, Argentina, ceredetec@frm.utn.edu.ar; gerardo.gdelsolar@frm.utn.edu.ar, <http://www.frm.utn.edu.ar/ceredetec>

Keywords: Daño Continuo, Isótropo, Ablandamiento, Carga Axial.

Resumen. La degradación en los materiales puede ser interpretada como una reducción en su rigidez. La evolución del daño puede seguir diferentes leyes de variación de acuerdo a la naturaleza física del fenómeno. La mecánica del daño continuo es una herramienta que describe el deterioro progresivo de las propiedades mecánicas de los materiales. Existen numerosos modelos matemáticos para describir el fenómeno, entre ellos el modelo más simple es el de daño escalar debido a que la degradación de la rigidez se describe a través de una sola variable escalar. El propósito de este trabajo es la implementación de un modelo de daño escalar con ablandamiento lineal a través de una subrutina de usuario en un software comercial. A su vez, se incorpora un segundo modelo de daño con ablandamiento exponencial. Para ello, se propuso un algoritmo de tipo implícito basado en el Método de Backward Euler para la resolución de las ecuaciones de equilibrio no lineal. Los modelos obtenidos fueron validados teóricamente para un material ideal por medio de la contrastación de los resultados numéricos y las ecuaciones teóricas que gobiernan el sistema. Adicionalmente, se modeló un material real y se compararon los resultados de la simulación con resultados experimentales.

1 INTRODUCCIÓN

El fenómeno de daño consiste en un proceso de debilitamiento progresivo e irreversible que incluye las etapas de nucleación (también llamada iniciación) y crecimiento de microporos y microfisuras. La evolución de este proceso depende de la microestructura del material, del tipo de carga actuante y la temperatura (Lemaitre, 1996). Este fenómeno tiene un impacto directo sobre las propiedades mecánicas del material, conduciendo a la disminución de sus capacidades resistentes hasta la ruptura. Kachanov (1986) y Lemaitre (1996) presentan una clasificación de mecanismos de daño de acuerdo a la naturaleza física del material.

La mecánica de daño continuo es el estudio, a través de variables mecánicas, de los mecanismos involucrados en el deterioro de los materiales cuando están sujetos a cargas. En la microescala, esto se debe a la acumulación de microtensiones en las vecindades de defectos o interfaces y a la ruptura de los enlaces. A nivel de la mesoescala del volumen de elemento representativo el fenómeno se debe al crecimiento e interconexión de microfisuras y microporos que, en conjunto, inician una fisura. En la macroescala, el daño se produce por el crecimiento de dicha fisura.

Para simular este fenómeno se han propuesto diferentes enfoques. Los modelos de Agrietamiento Distribuido (Smearred Crack Models) y Mecánica de Daño Continuo distribuyen los efectos del daño sobre un volumen determinado, es decir utiliza variables continuas relacionadas con la densidad de estos defectos para describir el deterioro del material antes de la iniciación de las macrofisuras. Por otro lado, los modelos de Grieta Discreta y Localización de Deformaciones y la Mecánica de Fractura, concentran el proceso de iniciación y crecimiento de microfisuras en una discontinuidad (Juarez, 2010).

Los primeros dos niveles pueden ser estudiados por medio de variables de daño de la Mecánica de Medios Continuos definidas a nivel de mesoescala. El tercer nivel se estudia utilizando la Mecánica de Fractura con variables definidas a nivel de la macroescala.

La Mecánica de Daño Continuo, Kachanov (1986), ha sido empleada por varios autores (Mazars et al., 1989, Oliver et al., 1990), para simular algunos de los micromecanismos mencionados anteriormente. Esto ha sido realizado introduciendo una variable interna d que controla la degradación de las propiedades elásticas del material.

Los modelos de daño escalar son los modelos isótropos más simples debido a que en éstos la degradación de la rigidez se describe a través de una sola variable escalar que afecta por igual a todas las componentes del tensor de rigidez elástico (Luccioni, 2003).

La importancia de la forma de la curva de ablandamiento durante la degradación de las propiedades del material ha inspirado a estudiar la respuesta de diferentes leyes de evolución del daño a tensión. Polanco-Loria et al (1995) presentaron diferentes leyes de daño basadas en la cantidad de energía disipada durante una prueba de carga axial de tracción, y aplicadas a un modelo de daño escalar.

El presente trabajo tiene como objetivo la implementación de un modelo de daño escalar con ablandamiento lineal y exponencial a través de una subrutina de usuario en el software ABAQUS (2011). Para la resolución de las ecuaciones de equilibrio no lineal en cada punto de integración se propuso un algoritmo de tipo implícito basado en el Método de Backward Euler. Los resultados obtenidos de la implementación tienen una buena aproximación a los valores teóricos y experimentales empleados para la validación.

2 MODELO DE DAÑO CONTINUO

El proceso de degradación de las propiedades del material es el resultado de la iniciación, crecimiento e interconexión de las microfisuras y microporos. Simo y Ju (1987) proponen un

modelo en el campo de la Mecánica del Continuo a partir de la existencia de los espacios físico o real, en el cual se verifica el comportamiento degradado del material, y el espacio efectivo. A su vez, estos espacios se relacionan entre sí por medio de una variable interna que puede ser una cantidad escalar o tensorial.

En el daño isotrópico el comportamiento mecánico de las microfisuras o microporos es independiente de su orientación. De esta manera, el daño puede definirse a través de una variable escalar d . En consecuencia, la relación entre los espacios queda definida por:

$$\sigma = (1 - d)\bar{\sigma} \quad (1)$$

Donde d es la variable de daño definida en el intervalo entre 0 y 1, σ el tensor de tensiones en el espacio real, $\bar{\sigma}$ el tensor de tensiones efectivo medido en el espacio "no dañado".

La variable interna d (Kachanov, 1958) vale 0 para un material en estado virgen y 1 para el límite de ruptura local. Esta variable debe ser interpretada físicamente como el cociente entre área de la superficie dañada y el área de superficie total (nominal) en un punto material local. El factor $(1 - d)$ es un factor de reducción que produce la transformación desde el espacio equivalente no dañado al espacio dañado real.

3 BASES TERMODINÁMICAS

El método del estado local postula que el estado termodinámico de un medio material en un punto e instante determinado está completamente definido por un cierto número de variables en ese instante. La precisión de la descripción del fenómeno físico depende de la naturaleza y número de variables de estado elegidas para ello. El proceso será termodinámicamente admisible si satisface la desigualdad de Clausius-Duhem en cualquier instante de la evolución. Además, para fenómenos disipativos, el estado actual depende también de la historia de las variables internas (Luccioni, 2003).

El fenómeno de daño requiere la introducción de una variable interna que represente la evolución del estado interno de la materia (densidad de dislocaciones, microestructura cristalina, configuración de microfisuras, etc.).

Luccioni et al (1996) desarrolla un modelo elasto-plástico basado en la hipótesis de elasticidad desacoplada. Para pequeñas deformaciones y problemas térmicamente estables, la parte elástica de la densidad de energía libre de Helmholtz por unidad de volumen, Ψ , para un proceso escalar puede definirse como una función lineal de la energía libre elástica del material virgen, $\bar{\Psi}(\varepsilon_{ij}^e)$, afectada por el factor de reducción $(1 - d)$:

$$\Psi(\varepsilon_{ij}^e, d) = (1 - d)\bar{\Psi}(\varepsilon_{ij}^e) \quad (2)$$

Donde ε_{ij}^e es el tensor de deformaciones elásticas y d es la variable interna de daño. A su vez, $\bar{\Psi}(\varepsilon_{ij}^e)$ es una función convexa definida en el espacio de las deformaciones. En particular para el caso planteado, la energía libre del material virgen se obtiene como una función cuadrática en ε_{ij} , de la siguiente forma:

$$\bar{\Psi}(\varepsilon_{ij}^e) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^e C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^e = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^e \bar{\sigma}_{ij} \quad (3)$$

Donde C_{ijkl}^0 es el tensor constitutivo secante inicial del material virgen, y $\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^e$ es el tensor de tensiones efectivas.

Para procesos termo-mecánicos isotérmicos, puede desacoplarse el problema térmico del problema mecánico. Por tanto, considerando únicamente el problema mecánico, la inecuación de Clausius-Duhem puede ser reducida a:

$$\mathcal{E}_m = -\dot{\Psi} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^e \geq 0 \quad (4)$$

De donde:

$$\dot{\Psi}(\varepsilon_{ij}^e, d) = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4) y agrupando adecuadamente, la desigualdad de Clausius- Duhem se expresa como:

$$\mathcal{E}_m = \left(\sigma_{ij} - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^e - \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (6)$$

Aplicando el procedimiento de Coleman-Noll (Gurtin et al, 2010) se garantiza una disipación no negativa, $\mathcal{E}_m \geq 0$, de manera que la ecuación constitutiva, la variable "y" asociada a la variable de daño, denominada fuerza termodinámica y la disipación mecánica resultan:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = (1 - d) \frac{\partial \bar{\Psi}(\varepsilon_{ij}^e)}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = (1 - d) C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^e \quad (7)$$

$$y = -\frac{\partial \Psi}{\partial d} = \bar{\Psi}(\varepsilon_{ij}^e) \quad (8)$$

$$\mathcal{E}_m = y \dot{d} = \bar{\Psi} \dot{d} \geq 0 \quad (9)$$

La tensión secante expresada en (7) muestra que, para el caso de daño escalar, todas las componentes del tensor de tensiones se degradan por igual, lo cual significa que si el tensor constitutivo secante inicial C_{ijkl}^0 es isótropo permanece así una vez producido el daño, esto es que el coeficiente de Poisson se mantiene constante durante el proceso.

Adicionalmente, el tensor de tensiones en el espacio real, σ_{ij} , puede ser interpretado como una descomposición aditiva del tensor de tensiones efectivo medido en el espacio "no dañado" (tensiones elásticas), $\bar{\sigma}_{ij}$, y el tensor de tensiones efectivo afectado por la variable de daño (tensiones inelásticas), σ_{kl}^d (Oller, 2001), esto es:

$$\sigma_{ij} = (1 - d) C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^e = (1 - d) \bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{kl}^d \quad (10)$$

De la ecuación (8) se observa que la fuerza termodinámica asociada a la variable de daño, y, es la energía libre del material no dañado $\bar{\Psi}$. De manera que la regla de evolución del daño debe ser escrita en términos de la energía libre no dañada.

De la inecuación (9) se destaca que la disipación de energía en el modelo propuesto está exclusivamente asociada a la evolución de la variable interna de daño. De esta manera, es requerimiento conocer la evolución de la variable escalar de daño en cada momento del proceso mecánico y para ello es necesario definir la evolución de esta variable (Oller, 2001),.

La Figura 1 presenta la disipación de energía de fractura para el modelo en estudio sometido a un ensayo de tracción uniaxial.

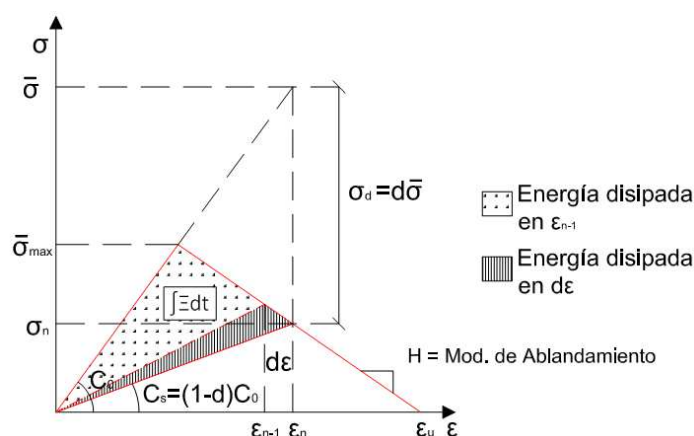


Figura 1: Disipación de energía en un ensayo de carga uniaxial de tracción con ablandamiento.

4 CRITERIO UMBRAL DE DAÑO

El umbral de daño define una superficie límite que distingue entre un estado de comportamiento elástico y otro en el que se verifica el proceso de degradación de las propiedades del material. Este criterio depende del tipo de material y puede ser definido tanto en el espacio de tensiones como en el espacio de deformaciones.

$$g(\tau, \kappa) = \tau(\sigma) - r(\kappa) \leq 0 \tag{11}$$

Donde $\tau(\sigma)$ es la tensión equivalente definida en el espacio dañado, $r(\kappa)$ el umbral de daño equivalente y κ es la variable de ablandamiento.

La tensión equivalente puede calcularse utilizando cualquier función de fluencia conocida (Tresca, Mohr-Coulomb, etc.). Para el modelo adoptado se emplea el criterio de Von Mises expresado en términos del segundo invariante de la parte desviadora del tensor de tensiones efectivas (J_2).

$$\tau(\sigma) = (1 - d) \bar{\sigma}_{VM} \tag{12}$$

$$\bar{\sigma}_{VM} = \sqrt{3 J_2} \tag{13}$$

Por otro lado, $r(\kappa)$ se trata de una función escalar no negativa que toma un valor nulo ante un estado indeformado. El valor inicial del umbral de daño, r_0 , es una propiedad del material así como su ley de evolución.

5 REGLA DE EVOLUCIÓN DEL DAÑO

Como se mencionó anteriormente, en los problemas de la mecánica en los que intervienen variables internas, es necesario definir la ley de evolución de las mismas. Para el caso isotrópico, se establece que las leyes de evolución de la variable interna d y de evolución de la función umbral de daño están definidas por:

$$\dot{d}(\kappa) = \dot{\lambda} \frac{\partial g(\tau, \kappa)}{\partial \tau} \quad y \quad \dot{r} = \dot{\lambda} \tag{14}$$

Donde λ es un escalar no negativo denominado parámetro de consistencia de daño que define las condiciones de carga, descarga y recarga a través de las condiciones de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad g(\tau, \kappa) \leq 0 \quad \dot{\lambda} g(\tau, \kappa) = 0 \tag{15}$$

Estas condiciones corresponden a problemas que poseen restricciones unilaterales. Si el

valor de la función potencial $g(\tau, \kappa) < 0$ para que se cumpla la tercera condición, necesariamente la evolución del factor de consistencia, $\dot{\lambda}$, deberá ser nulo. De esto se desprende que la variación temporal del daño y del umbral de daño debe ser nulo, $\dot{\kappa} = \dot{r} = 0$ y por lo tanto el material no sufre degradación y se comporta de manera elástica. Si por el contrario, $\dot{\lambda} > 0$, se está en presencia de una evolución del daño y del umbral de daño, $\dot{\kappa} = \dot{r} = \dot{\lambda}$ y, por la tercer condición, $g(\tau, \kappa)$ deberá ser nulo lo que significa que estamos en el umbral de daño.

Se determina la magnitud del parámetro λ a partir de la condición de consistencia de daño:

$$g(\tau, \kappa) = 0 \rightarrow \dot{g}(\tau, \kappa) = 0 \rightarrow \dot{\tau}(\sigma) = \dot{r}(\kappa) \quad (16)$$

Debido a que la evolución temporal de λ es mayor que cero, y haciendo una analogía entre el primer término de la ecuación (16) y la ecuación (14), se define el parámetro de consistencia de daño como:

$$\dot{\lambda} \sim \dot{\tau}(\sigma) = \dot{r}(\kappa) \quad (17)$$

De manera que r queda determinado por:

$$r = \max\{r_0, \max(\tau(\sigma))\} \quad \forall 0 \leq s \leq t \quad (18)$$

5.1 Particularización del criterio de daño a los casos de ablandamiento lineal y exponencial.

La función escalar que define la evolución de la variable interna de daño para el caso de ablandamiento lineal es:

$$d(\kappa_n) = k_{lineal} \times \left(1 - \frac{r(\kappa_0)}{C^0 \kappa_n + r(\kappa_0)}\right) \quad (19)$$

$$k_{lineal} = 1 + \frac{r(\kappa_0)}{C^0 \kappa_u} = \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{r(\kappa_0)^2}{gf C^0}\right)^{-1} \quad (20)$$

Por otro lado, la ley de evolución que define la variable interna de daño para el caso de ablandamiento exponencial es:

$$d(\kappa_n) = 1 - \frac{r(\kappa_0)}{C^0 \kappa_n + r(\kappa_0)} \times \exp\left[k_{exp} \left(1 - \frac{C^0 \kappa_n + r(\kappa_0)}{r(\kappa_0)}\right)\right] \quad (21)$$

$$k_{exp} = 2 \frac{r(\kappa_0)}{C^0 \kappa_u} = \left(\frac{gf C^0}{r(\kappa_0)^2} - \frac{1}{2}\right)^{-1} \quad (22)$$

Donde tanto k_{lineal} como k_{exp} son parámetros que dependen de las propiedades elásticas del material (Módulo de elasticidad inicial, C^0 , y energía disipada por unidad de volumen, gf), del valor inicial del umbral de daño, $r(\kappa_0)$, y de la variable de ablandamiento en su estado último, κ_u .

La Figura 2 presenta las leyes de evolución de la variable de daño en función a la variable de ablandamiento para los casos mencionados.

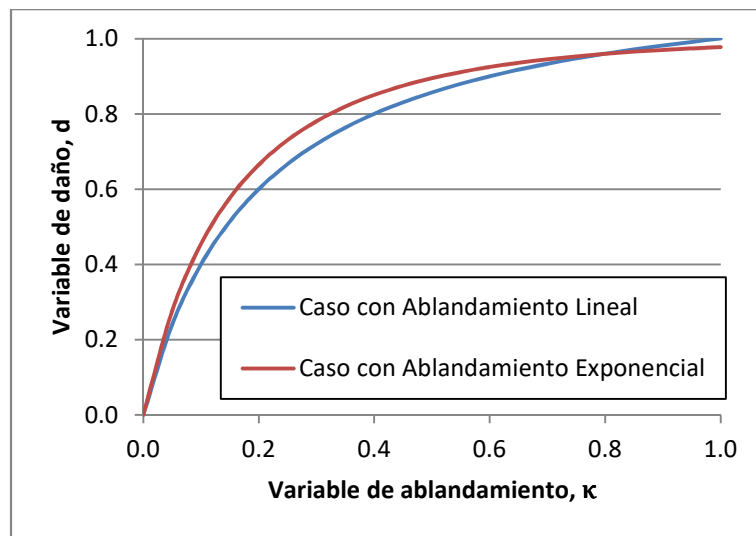


Figura 2: Evolución de la variable de daño.

Por otro lado, la función umbral de daño define su ley evolutiva en función del parámetro de ablandamiento, κ . Las leyes de ablandamiento lineal y exponencial que gobiernan el sistema responden a la siguiente expresión, respectivamente:

$$r(\kappa_n) = r(\kappa_0) + H^d \kappa_n \quad (23)$$

$$r(\kappa_n) = r(\kappa_0) \times \exp \left[H^d \left(1 - \frac{r(\kappa_n)}{r(\kappa_0)} \right) \right] \quad (24)$$

Siendo $H^d = r'(\kappa)$, el módulo de ablandamiento, de signo negativo, que determina la contracción del dominio elástico. La Figura 3 presenta la evolución de la función umbral de daño.

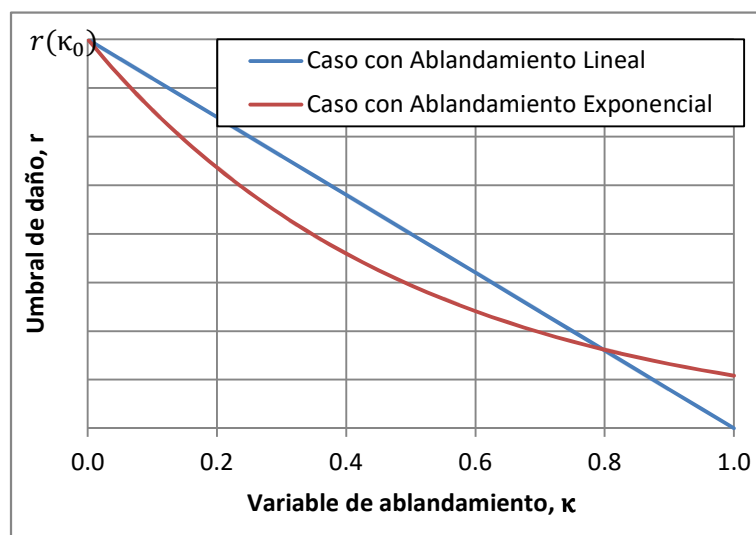


Figura 3: Ley evolutiva de la función umbral de daño para un ensayo de carga uniaxial de tracción.

6 ALGORITMO PARA IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

6.1 Introducción:

Se realizó la implementación del modelo constitutivo propuesto en la plataforma ABAQUS/Standard. Para ello, se desarrolló un algoritmo de cálculo basado en la subrutina UMAT (User-defined Mechanical Material Behavior) cuya programación se realizó en lenguaje FORTRAN.

La subrutina UMAT permite definir el comportamiento constitutivo mecánico de materiales que no están incorporados en la librería interna del Software. Para ello, se requiere de la declaración de la matriz jacobiana inicial y de la actualización tanto de la matriz de tensiones como de las variables de estado en cada incremento de tiempo. Además, la solución en el tiempo de las ecuaciones de equilibrio requiere que se establezca el tipo de procedimiento a seguir, es decir si el mismo será de tipo explícito o implícito.

Esta subrutina entrega el incremento de deformaciones en cada paso incremental de tiempo, el estado de tensiones del material y las variables de estado al comienzo del paso incremental.

6.2 Integración de las ecuaciones constitutivas

Para la resolución de las ecuaciones de equilibrio no lineal en cada punto de integración se propone un algoritmo de tipo implícito basado en el Método de Backward Euler. De esta manera, el daño en el incremento de tiempo posterior es dependiente de la velocidad de evolución en el tiempo actual y del daño en el incremento anterior.

La función de daño en el tiempo n puede ser expresada por medio de:

$$f_n(\tau, \kappa) = \tau(\bar{\sigma}_n, d_n) - r(\bar{\sigma}_n) = 0 \quad (25)$$

De la ecuación anterior se puede observar que las variables a actualizar son la tensión efectiva, $\bar{\sigma}_n$, y la variable interna de daño, d_n .

Donde la variable de daño y la tensión vienen definidas por:

$$d_n = d_{n-1} + \Delta d_n \quad (26)$$

$$\sigma_n = (1 - d_{n-1} - \Delta d_n)\bar{\sigma}_n \quad (27)$$

La evolución del daño que permite obtener el equilibrio en cada instante se obtiene considerando:

$$0 = f_n^{i+1}(\tau, \kappa) \cong f_n^i(\tau, \kappa) + \left[\frac{\partial f(\tau, \kappa)}{\partial \Delta d} \right]_n^i (\Delta d_n^{i+1} - \Delta d_n^i) \quad (28)$$

$$\Delta d_n^{i+1} = \Delta d_n^i - \left\{ \left[\frac{\partial f(\tau, \kappa)}{\partial \Delta d} \right]_n^i \right\}^{-1} f_n^i(\tau, \kappa) \quad (29)$$

Al tratarse de un modelo de daño escalar no será necesario definir un flujo de daño ya que el mismo será un escalar. Reemplazando la función que define el criterio de daño en la ecuación (29):

$$\Delta d_n^{i+1} = \Delta d_n^i - \left\{ \left[\frac{\partial f(\tau, \kappa)}{\partial \Delta d} \right]_n^i \right\}^{-1} \{ \tau(\bar{\sigma}_n, d_n) - r(\bar{\sigma}_n) \}_n^i \quad (30)$$

De esta manera, el tamaño del incremento de daño queda determinado a partir de la fuerza residual entre la tensión efectiva y el umbral de daño de la iteración anterior.

Una vez determinado el tamaño del incremento de daño se realiza la actualización de la tensión y se verifica que se cumpla con la función de daño expresada en (11) para el

incremento de carga actual.

Mediante la comparación entre dos iteraciones consecutivas puede determinarse si es posible alcanzar la convergencia en un número razonable de iteraciones. En caso de que la convergencia sea poco probable, el algoritmo ajusta el incremento de carga.

6.3 Algoritmo de cálculo

El comportamiento del material queda definido a partir de la integración de las ecuaciones constitutivas en cada punto de Gauss. El algoritmo propuesto para este fin es de tipo implícito y responde al siguiente esquema:

- 1) Obtención de los datos iniciales: Propiedades del material
 - C^0 , módulo de elasticidad del material virgen;
 - μ , coeficiente de Poisson;
 - σ_{max} , tensión umbral de inicio de daño;
 - H^d , módulo de ablandamiento o g_f , energía de disipación volumétrica.
- 2) Armado de la Matriz Jacobiana, J_0 , a partir de las propiedades elásticas del material virgen.
- 3) Obtención del incremento de deformaciones elásticas para el paso "n": $\Delta\varepsilon_n$
- 4) Cálculo del incremento de tensiones efectivas a partir del incremento de las deformaciones y actualización de las tensiones efectivas:

$$\Delta\bar{\sigma}_n = J_0 \cdot \Delta\varepsilon_n$$

$$\bar{\sigma}_n = \bar{\sigma}_{n-1} + \Delta\bar{\sigma}_n$$

- 5) Recuperación de las variables internas.

$$d_n = d_{n-1}$$

$$r(\bar{\sigma}_n) = r(\bar{\sigma}_{n-1})$$

- 6) Cálculo de la tensión equivalente de Von Mises y de la función de tensiones:

$$\bar{\sigma}_{neq} = \sqrt{3 J_2}$$

$$\tau(\bar{\sigma}_n, d_n) = (1 - d_n)\bar{\sigma}_{neq}$$

- 7) Verificación de la condición de daño:

$$f_n(\tau, \kappa) = \tau(\bar{\sigma}_n, d_n) - r(\bar{\sigma}_n) < 0$$

Si cumple con la condición presenta un comportamiento elástico. Va al paso 11.

- 8) Actualización del umbral de daño

$$\text{Caso de ablandamiento lineal:} \quad r(\bar{\sigma}_n) = \sigma_{max} - \frac{H^d}{C^0} (\bar{\sigma}_{neq} - \sigma_{max})$$

$$\text{Caso de ablandamiento Exponencial:} \quad r(\bar{\sigma}_n) = \sigma_{max} \times \exp \left[H^d \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_{neq}}{\sigma_{max}} \right) \right]$$

- 9) Evaluación del incremento de la variable de daño:

$$\Delta d_n^{i+1} = \Delta d_n^i - \left\{ \left[\frac{\partial f(\tau, \kappa)}{\partial \Delta d} \right]_n^i \right\}^{-1} \{ \tau(\bar{\sigma}_n, d_n) - r(\bar{\sigma}_n) \}_n^i$$

- 10) Actualización de la variable de daño:

$$d_n = d_{n-1} + \Delta d_n$$

- 11) Almacenamiento de las variables internas, d_n y $r(\bar{\sigma}_n)$.
- 12) Actualización de la Matriz Jacobiana:

$$J_n = (1 - d_n)J_0$$

- 13) Cálculo de la tensión:

$$\sigma_n = (1 - d_n)\bar{\sigma}_n$$

- 14) Fin del proceso de integración de la ecuación constitutiva.

7 VALIDACIÓN TEÓRICA

El algoritmo de cálculo propuesto fue implementado en el software comercial de elementos finitos **ABAQUS (2011)** por medio de una subrutina de usuario. Para su validación, se genera un modelo de elementos finitos cuyos resultados se contrastaron con los obtenidos por los cálculos teóricos.

Por claridad y sencillez se presenta la validación del caso de daño escalar con ablandamiento lineal siendo el procedimiento igualmente válido para el caso de daño escalar con ablandamiento exponencial.

7.1 Descripción del modelo

Para la validación del modelo de daño propuesto se generó un elemento de geometría sencilla tal como es un cubo. El elemento fue sometido a un ensayo de carga axial de tracción con desplazamiento controlado de manera de exponer la evolución del daño y la consecuente degradación de la resistencia. A su vez, para poner en evidencia la degradación del módulo de elasticidad, se realizó un paso de descarga y recarga.

Se proponen como variables de control para la validación del modelo la tensión efectiva, la tensión real y las variables internas, en tanto que la variable independiente es la deformación.

El elemento posee una geometría cúbica de 1 m de lado y se encuentra sometido a un desplazamiento uniforme en la dirección vertical. Con el fin de obtener un modelo bajo un estado de tensión axial puro se liberan los desplazamientos transversales. Se adopta un Módulo de elasticidad inicial, C^0 , de 2×10^{10} N/m². Al analizar el caso de ablandamiento lineal, el daño puede ser definido mediante el empleo del módulo de ablandamiento, H^d , aunque también válido el empleo de la energía disipada por unidad de volumen, gf . De esta manera, las características de daño quedan definidas a través del valor inicial de la tensión umbral de daño, σ_{max} , 4×10^6 N/m², y del Módulo de ablandamiento, H^d , de 4×10^9 N/m².

En cuanto al estado de carga, el modelo es sometido a un desplazamiento longitudinal total de magnitud de $12,0 \times 10^{-4}$ m, con un paso intermedio de descarga aplicado al alcanzar un desplazamiento de $4,0 \times 10^{-4}$ m.

La Figura 4 presenta el diagrama de Tensión-Deformación para carga axial de tracción, en el que se incluye tanto la tensión en el espacio real, σ , como la tensión efectiva, $\bar{\sigma}$, medida en el espacio “no dañado”. Por otro lado, las Figuras 5 y 6 muestran el proceso evolutivo de las variables internas, la variable de daño d y el umbral de daño r , respectivamente.

Al iniciar el desplazamiento impuesto, el material se comporta con un módulo de elasticidad definido por C^0 hasta alcanzar el punto A correspondiente al valor inicial del umbral de daño, σ_{max} , y cuya deformación es de $2,0 \times 10^{-4}$. Se continúa con el desplazamiento impuesto lo que significa una evolución de las variables internas de daño y una consecuente degradación del tensor de elasticidad hasta alcanzar el punto B en el que se define un proceso de descarga. Este punto corresponde a una deformación longitudinal de $4,0 \times 10^{-4}$, una tensión efectiva de $8,0 \times 10^6$ N/m² y una tensión real de $3,2 \times 10^6$ N/m². A partir de B se inicia un

proceso de descarga total. Al tratarse de un modelo elástico, al cesar la carga que genera la deformación, el elemento regresa a su geometría original representado a través del origen de coordenadas del diagrama $\sigma - \varepsilon$, y del punto B' en los restantes. En una etapa posterior se reinicia el proceso de desplazamiento longitudinal lo que genera un incremento en la tensión (proceso de recarga). El proceso de descarga y recarga es definido a través de un módulo de elasticidad degradado definido por la variable de daño d según $(1 - d)C^0$. Cabe destacar, y como puede observarse en las Figuras 5 y 6, durante el proceso de descarga y recarga cesa la evolución de las variables internas de daño, siendo $d = 0,6$ y $r = 3,2 \times 10^6$ N/m². El proceso de recarga finaliza al alcanzar nuevamente el punto B. Al incrementarse el desplazamiento a partir de B, las variables internas continúan su proceso evolutivo hasta alcanzar el daño total en $\varepsilon = 12 \times 10^{-4}$.

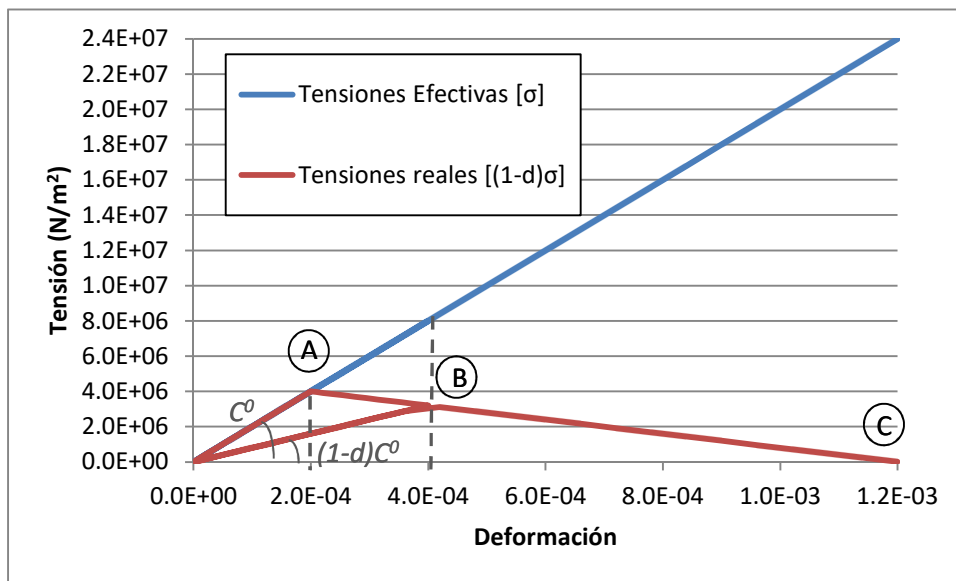


Figura 4: Diagrama Tensión vs Deformación para una carga de tracción uniaxial.

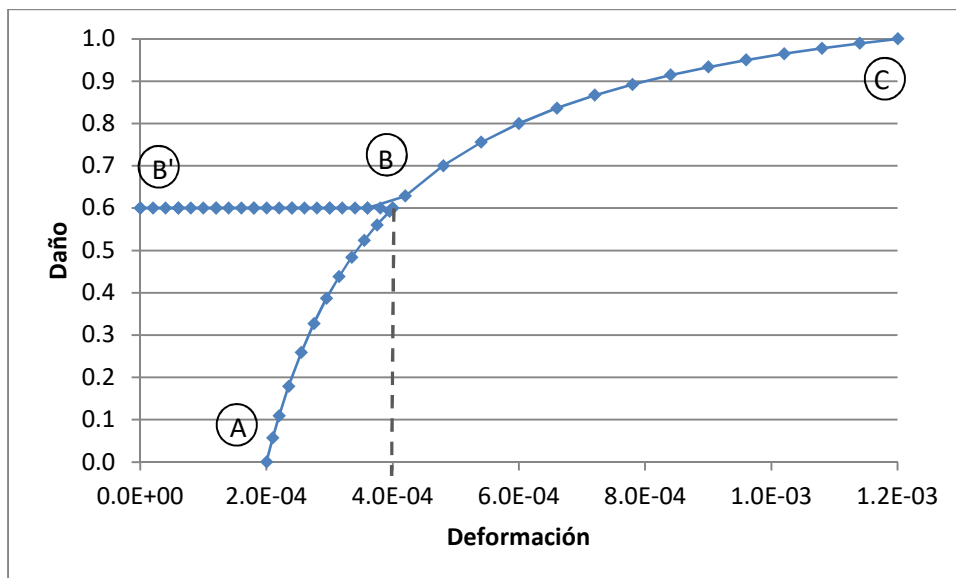


Figura 5: Diagrama Daño vs Deformación para una carga de tracción uniaxial.

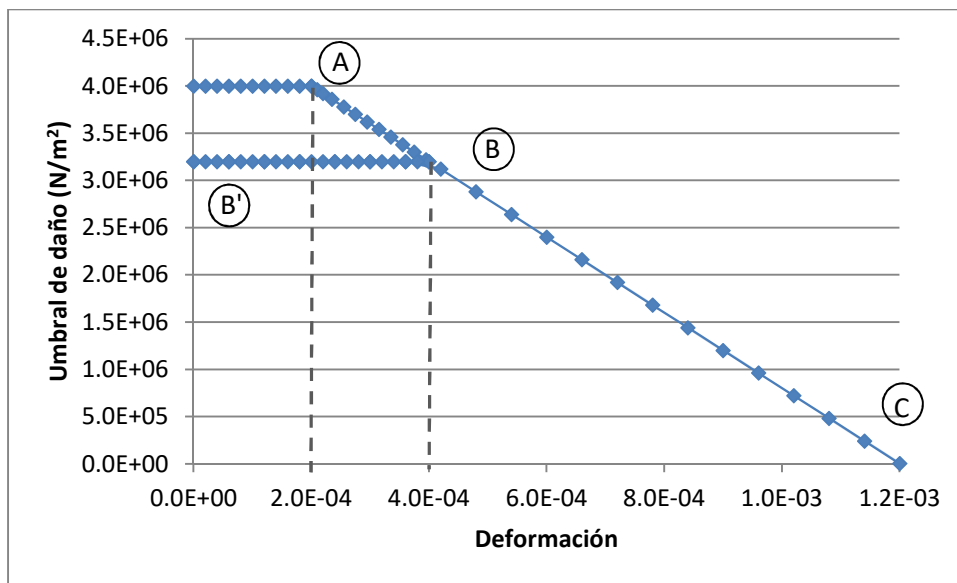


Figura 6: Diagrama Umbral de daño vs Deformación para una carga de tracción uniaxial.

7.2 Contrastación teórica

Las ecuaciones que gobiernan las variables de control en función de la deformación son:

$$\bar{\sigma}(\varepsilon_n) = C^0 \varepsilon_n \quad (31)$$

$$\sigma(\varepsilon_n) = (1 - d)C^0 \varepsilon_n \quad (32)$$

$$d(\varepsilon_n) = k \times \left(1 - \frac{\varepsilon_E}{\varepsilon_n}\right) \quad (33)$$

$$r(\varepsilon_n) = \sigma_{max} - H(\varepsilon_n - \varepsilon_E) \quad (34)$$

Donde k es un parámetro definido por: $k = 1 + \frac{\varepsilon_E}{\varepsilon_u - \varepsilon_E}$; ε_E es la deformación elástica correspondiente a la tensión umbral de daño: $\varepsilon_E = \sigma_{max}/C_0$ y ε_u corresponde a la deformación última y se calcula como: $\varepsilon_u = \varepsilon_E + \sigma_{max}/H$

Al contrastar los resultados obtenidos por el modelo propuesto con los obtenidos por medio de las ecuaciones analíticas que gobiernan las variables en consideración queda validado el modelo para el caso en consideración.

7.3 Comentarios

La validación teórica permite comparar la respuesta estructural y la evolución de las variables internas entre el modelo implementado en ABAQUS y las ecuaciones teóricas gobernantes del movimiento. Las Figuras 4, 5 y 6 muestran la evolución de la tensión efectiva, de la variable de daño y del umbral de daño, respectivamente. En ellas se observa que se presenta un ciclo de carga-descarga-recarga cuyo comportamiento respeta las consideraciones teóricas desarrolladas en el marco teórico.

Si bien el caso presentado para la validación teórica es un caso de un material ideal, el mismo puede ser ajustado para materiales reales con efecto de ablandamiento lineal, tal como se presentará en la validación experimental. El modelo propuesto puede ser asimilado al caso de los materiales friccionales tales como los hormigones y la mampostería, sometidos a esfuerzos axiales de tracción. Los mismos presentan un comportamiento elástico hasta una tensión máxima a tracción a partir de la cual la degradación de sus propiedades mecánicas

evoluciona de manera exponencial. Este proceso de degradación implica la evolución de la fisuración. Si bien, la resistencia a tracción en los materiales friccionales reviste menor importancia en comparación a su respuesta estructural a compresión, su influencia en la formación de fisuras es determinante. La aparición y propagación de las fisuras es indeseable ya que, no solamente reduce la capacidad estructural del material, sino que también disminuye su vida útil.

El caso validado es correspondiente a un modelo de daño escalar con ablandamiento lineal, sin embargo el procedimiento es extensible al caso de ablandamiento exponencial.

8 VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

Para la validación experimental del modelo propuesto se realiza la contrastación de los resultados numéricos alcanzados en ABAQUS con resultados experimentales y un modelo matemático obtenido de la literatura.

Paredes et al (2016) propuso un modelo de daño constitutivo basado en la Mecánica de Daño Continuo que permite simular la apertura, cierre y reapertura de las fisuras en el hormigón, usando una única superficie de discontinuidad. Para ello definió dos variables internas de daño, una para daño por tracción y otra para daño por compresión, una única superficie de discontinuidad que controla el umbral de daño y un parámetro que representa la razón entre la tensión por tracción y la tensión por compresión en el material dañado. El autor validó su modelo a través de la comparación de los resultados numéricos obtenidos para diferentes estados de carga con los resultados experimentales recabados de la literatura. Los resultados numéricos de Paredes para un estado de carga axial de tracción monótonica creciente fueron comparados con los datos experimentales publicados por Gopalaratnam et al. (1985).

Basándose en los ensayos experimentales de Gopalaratnam et al. (1985), Paredes et al (2016) desarrolla un modelo de geometría igual a $50 \times 19 \times 83$ mm y cuyas propiedades se presentan en la **Tabla 1**.

Propiedad	Valor
Módulo de Elasticidad, C^0 , [N/m ²]	$33,469 \times 10^9$
Tensión Máxima, σ_{max} , [N/m ²]	$3662,1 \times 10^3$
Deformación a la tensión máx., ε_E	120×10^{-6}
Energía de fractura por unidad de área, G_f , [Nm/m ²]	56,4
Energía de fractura por unidad de volumen, g_f , [N/m ²]	679,5

Tabla 1: Propiedades mecánicas (Paredes et al, 2016)

Para la validación experimental del algoritmo propuesto, se adopta un modelo de propiedades dimensionales y mecánicas iguales a los definidos anteriormente.

La energía de fractura, g_f , es la máxima energía capaz de disipar el material en la unidad de volumen y puede interpretarse como el área total bajo la curva tensión-deformación. De esta manera, g_f , está asociado con la energía almacenada durante la fase elástica sin daño y durante la fase elástica con degradación, en un punto cualquiera del sólido. El modelo constitutivo propuesto requiere como dato inicial el módulo de ablandamiento H , el cual puede calculado a partir de la energía g_f disponible en un punto material. De esta manera:

$$H = \frac{\sigma_{max}^2 C^0}{2 g_f C^0 - \sigma_{max}^2} = 1,40 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 \quad (35)$$

Las Figuras 7, 8 y 9 presentan los resultados obtenidos por el modelo numérico propuesto

y realiza una comparación con los resultados experimentales citados y los resultados numéricos alcanzados por Paredes et al, (2016).

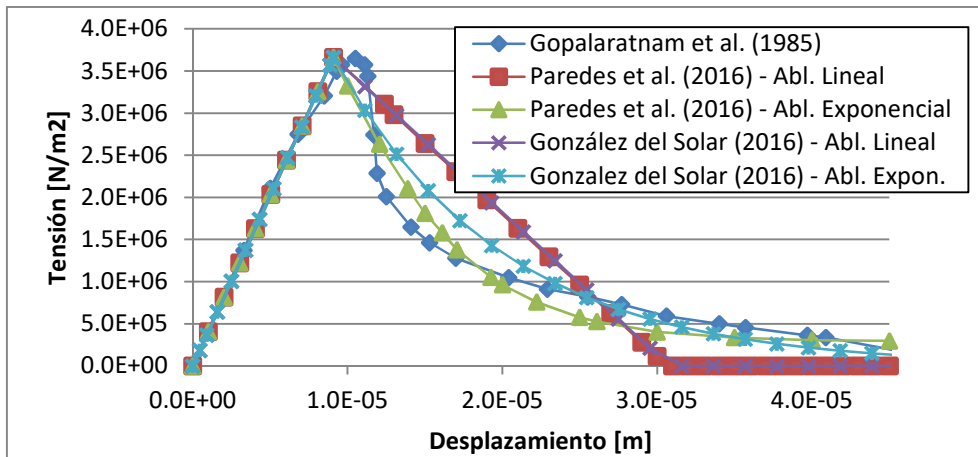


Figura 7: Diagrama Tensión-Desplazamiento.

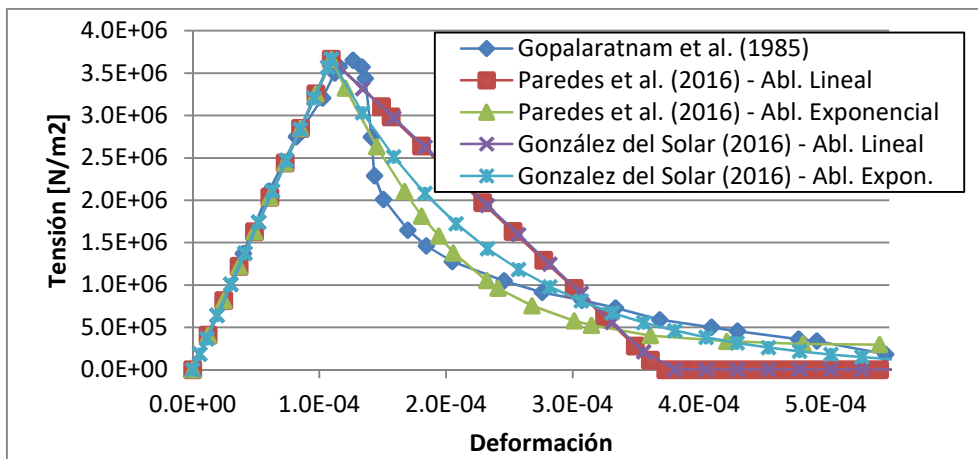


Figura 8: Diagrama Tensión-Deformación.

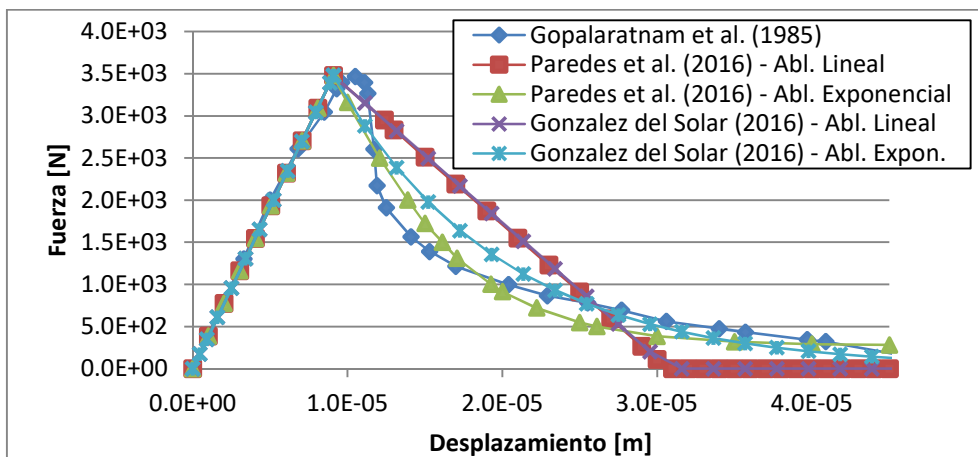


Figura 9: Diagrama Fuerza-Desplazamiento.

Del análisis de las áreas bajo la curva de las figuras anteriores, se determinan las energías de fractura y trabajo resumidas en la **Tabla 2**:

	Energía disipada por unidad de área, G_f , [Nm/m ²]	Energía disipada por unidad de volumen, g_f , [N/m ²]	Trabajo efectuado durante la deformación, W_f , [Nm]
Gopalaratnam et al. (1985) (*)	56,4	679,5	53,58x10 ⁻²
Paredes et al. (2016) – Abl. Lineal (*)	56,4	679,7	53,59 x10 ⁻²
Paredes et al. (2016) –Abl. Exponencial (*)	43,6	525,9	41,46 x10 ⁻²
González del Solar et al. (2016) – Abl. Lineal	56,5	680,4	53,65 x10 ⁻²
González del Solar et al. (2016) – Abl. Exponencial	55,2	664,7	52,41 x10 ⁻²

(*) Valores extraídos de Paredes et al (2016).

Tabla 2: Propiedades mecánicas.

8.1 Influencia del mallado

Con el fin de verificar la influencia del mallado en el cálculo numérico, se propone el análisis del caso de estudio con tres diferentes densidades de malla. El caso a) desarrollado con una malla simple de un solo elemento hexaédrico lineal de 8 nodos (C3D8). El caso b) posee una malla de 252 elementos hexaédrico lineal de 8 nodos (C3D8) y un total de 416 nodos. Finalmente, el caso c) consta de un total de 680 elementos C3D8 y 990 nodos. La Figura 10 presenta la distribución de malla para los tres casos de estudio.

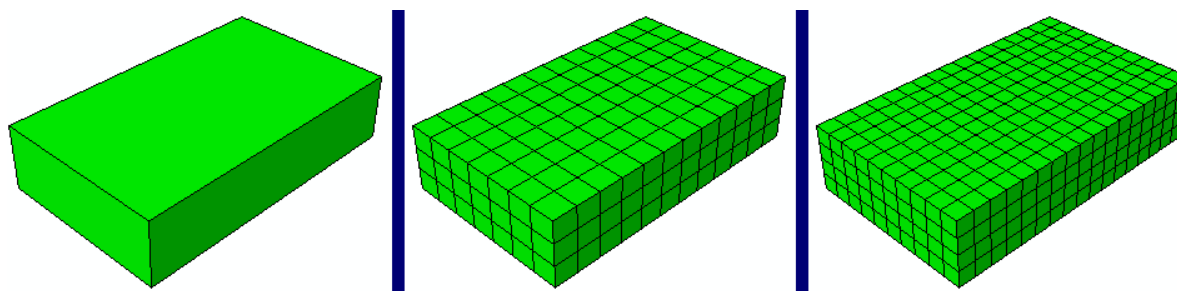


Figura 10: Distribución de elementos para el mallado. Izq. Caso A (1 elemento); Medio Caso B (252 elementos) y Der. Caso C (680 elementos).

Los tres casos fueron sometidos a un estado de tensión axial creciente verificando el desplazamiento en la cara superior. Las Figuras 11 y 12 presentan los resultados obtenidos.

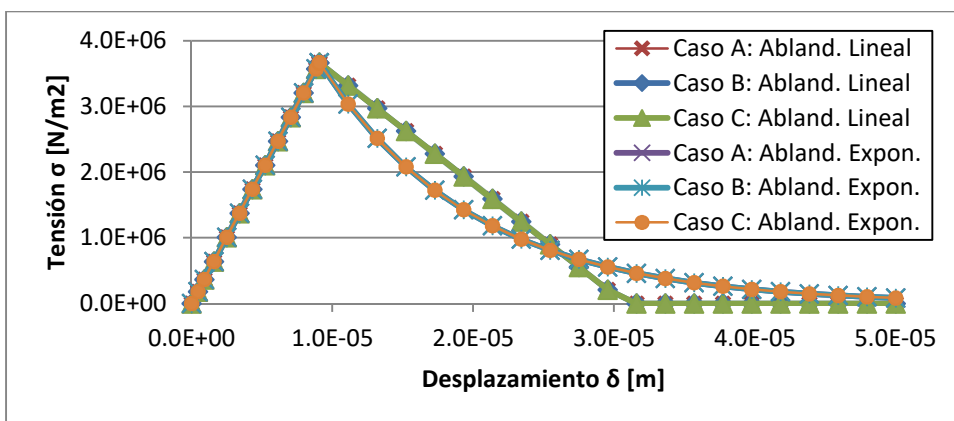


Figura 11: Diagrama Tensión Desplazamiento para los tres casos de estudio.

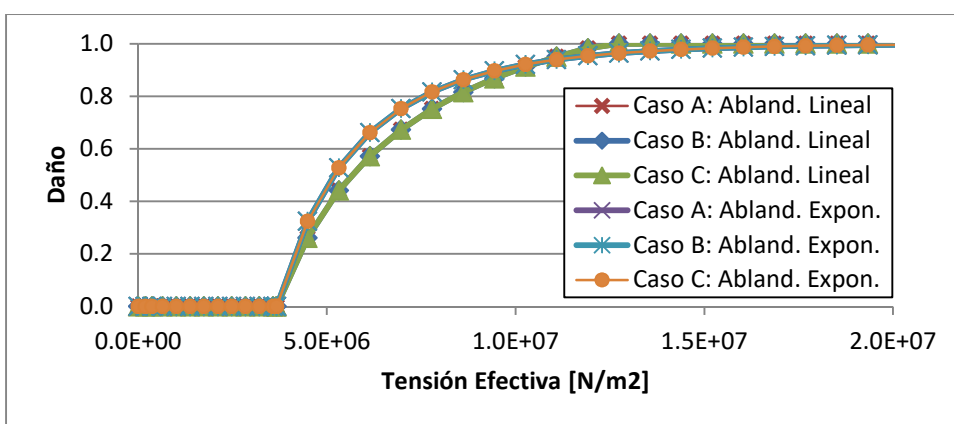


Figura 12: Diagrama Daño – Tensión efectiva para los tres casos de estudio.

8.2 Comentarios

La validación experimental contrasta los resultados numéricos obtenidos en el modelo propuesto con los resultados alcanzados en ensayos uniaxiales a tracción sobre probetas de hormigón. Las Figuras 7, 8 y 9 expresan una adecuada similitud entre el comportamiento de los modelos con ablandamiento propuestos y los resultados obtenidos de bibliografía.

Los modelos exponenciales presentan una mejor aproximación al comportamiento mecánico observado en los ensayos experimentales. Sin embargo, estos modelos tienen un costo computacional más elevado con respecto al ablandamiento lineal.

Por otro lado, un análisis comparativo de la energía disipada, g_f , permite determinar la dispersión de cada modelo. La Tabla 3 resume la dispersión obtenida de los diferentes modelos con respecto al valor experimental de referencia. Los modelos de ablandamiento lineal presentan una menor dispersión de la energía disipada. A su vez, el modelo con ablandamiento exponencial propuesto por **Paredes et al (2016)** muestra una dispersión diez veces mayor al presentado por los autores.

	Energía disipada por unidad de volumen, g_f , [N/m ²]	Dispersión respecto del valor experimental [%]
Gopalaratnam et al. (1985) (*)	679,5	0,00
Paredes et al. (2016) – Abl. Lineal (*)	679,7	0,03
Paredes et al. (2016) –Abl. Exponencial (*)	525,9	-22,60
González del Solar et al. (2016) – Abl. Lineal	680,4	0,13
González del Solar et al. (2016) – Abl. Exponencial	664,7	-2,18

(*) Valores extraídos de Paredes et al (2016).

Tabla 3: Análisis de dispersión entre modelos de la energía disipada, gf.

Las Figuras 12 y 13 muestran independencia entre los resultados y la densidad de la malla para el caso considerado. Esta observación es importante al considerar el mayor costo computacional que tiene un sistema de malla densa.

9 CONCLUSIÓN

En este trabajo se implementó un modelo elástico isótropo con daño escalar con ablandamiento lineal por daño en un software comercial mediante subrutina de usuario. Adicionalmente se incorporó un segundo modelo con ablandamiento de tipo exponencial. Los mismos fueron validados a partir de la contrastación de los resultados con las leyes de evolución teórica y mediante comparación con resultados experimentales en hormigón a tracción uniaxial.

Por medio de la subrutina UMAT se implementaron en el software ABAQUS las ecuaciones constitutivas que gobiernan el problema. Para ello, se desarrolló un algoritmo de cálculo de tipo implícito basado en el método de Backward Euler. La subrutina desarrollada parte de un incremento de desplazamientos y determina la evolución de la variable de daño y del umbral de daño. A su vez se actualiza la matriz Jacobiana, con lo que puede predecirse el comportamiento ante un ciclo de descarga-recarga, así como las tensiones. La programación del código se realizó en lenguaje FORTRAN.

La contrastación de los modelos predictivos propuesto en un material ideal con las ecuaciones teóricas que gobiernan el movimiento, dan cuenta de la validación teórica del sistema. Para el caso de un material real tal como el hormigón, asumido como isótropo y homogéneo, la validación experimental muestra un mejor comportamiento mecánico del modelo de daño con ablandamiento exponencial. Al mismo tiempo, el modelo exponencial muestra una mayor dispersión de la energía disipada que los modelos lineales. Al comparar la Tabla 3 para el caso del modelo exponencial se observa una mejor aproximación energética del modelo propuesto por los autores.

El modelo propuesto sujeto a la acción de una carga de tracción axial presenta independencia del tamaño de los elementos del mallado. De esta manera, se puede afirmar que la implementación realizada puede ser una alternativa computacionalmente económica.

Los resultados obtenidos durante la implementación del modelo, desafían a los autores a pensar en modelos más complejos que abarquen el comportamiento real de la mampostería. Es así como queda para trabajos futuros la implementación de un modelo constitutivo que responda adecuadamente al caso particular de mampostería maciza de grandes espesores. La

consideración de variables internas que permitan modelar un comportamiento a tracción independiente del comportamiento a compresión así como modelos de daño direccionado.

10 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado en el marco de la beca doctoral del primer autor otorgada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) dentro del Proyecto 25J097 ECUTIME2076TC de la Universidad Tecnológica Nacional.

REFERENCIAS

- Lemaitre, J., *A Course on Damage Mechanics*. Springer Verlag, 1996.
- Kachanov, L.M., *Introduction to continuum damage mechanics*. Kluwer Academic Publishers, 1986.
- Juarez, G. y Ayala, A.G., Aproximación del proceso de falla en sólidos con elementos finitos mixtos usando modelos de daños continuos, *Rev. Int. Mét. Num. Cál. Disc. Ing.*, 26:225-232, 2010.
- Mazars, J. y Pijaudier-Cabot, G., Continuum damage theory: application to concrete, *Journal of Eng. Mechanics*, ASCE, 115 (2), 55-64, 1989,
- Oliver, J., Cervera, M., Oller, S., Lubliner, J., Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis of Concrete, *Second Int. Conf. on Comp. Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, 1990.
- Luccioni, B., Oller, S., Danesi, R., Coupled plastic-damaged model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996.
- Luccioni, B., *Mecánica de daño continuo*. CIMNE, 2003.
- Gurtin, M.E., Fried, E., Anand, L., *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*. Cambridge University Press, 2010.
- Polanco-Loria, M., Sorensen, S.I., Damage evolution laws for concrete – A comparative study, *Proceedings Fracture Mechanics of Concrete Structures*, 1995.
- Abaqus. *Analysis User's Manual*, 6.11. Dassault Systèmes Simulia Corp, 2011
- Kachanov, L. M.. Time of the rupture process under creep conditions. *Isv. Akad. Nauk. SSR. Otd Tekh. Nauk*, 8, 26-31, 1958.
- Oller, S., *Mecánica de Fractura: Un enfoque global*. CIMNE, 2001.
- Paredes, J. A., Oller, S., Barbat, A. H. New Tension-Compression Damage Model for Complex Analysis of Concrete Structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 04016072, 2016.
- Gopalratnam, V. S., & Shah, S. P., Softening response of plain concrete in direct tension. *In Pr. J. Amm. Concr. Inst.*, Vol. 82, No. 3, pp. 310-323, 1985.
- Simo, J. C., & Ju, J. W., Stress and strain based continuum damage models, Part I and II. *Int. J. Solids Struct*, 23, 375-400, 1987.