

ESTUDIO DE DETECCIÓN DE FISURAS EN VIGAS CON UN APOYO INTERMEDIO

Javier L. Raffo y Marcos R. Carrizo

Grupo de Mecánica Computacional, Facultad Regional Delta, Universidad Tecnológica Nacional, San Martín 1171, 2804 Campana, Argentina, jraffo@frd.utn.edu.ar, <http://www.frd.utn.edu.ar/grupo-de-mecanica-computacional>

Palabras Clave: Detección de fisuras, vigas con fisuras, vibraciones, problema inverso, solución analítica, método estadístico.

Resumen. En este trabajo se analiza un método analítico-estadístico acoplado de detección de fisuras en vigas Euler y el efecto que causa el agregado de un apoyo simple intermedio para optimizar el algoritmo de detección ante perturbaciones sobre los valores de entrada correspondientes a los primeros valores del coeficiente de frecuencias. Se utiliza un modelo de fisura abierta representado con una rótula elástica el cual en función de las propiedades de la fisura varía su rigidez a la flexión. El método de detección de fisura propuesto consiste en resolver el problema inverso de vibraciones acoplado a un algoritmo estadístico. Esto significa que a partir de valores de frecuencias naturales obtenidas con el método analítico directo, se obtiene la posición de la fisura. El método propuesto tiene el objetivo de sistematizar el mecanismo de detección.

1 INTRODUCCIÓN

El desarrollo de métodos de detección de fisura es de un gran interés en ingeniería. En particular, lo es el estudio del problema inverso de determinación de la posición de fisuras en vigas, a partir de valores medidos de frecuencias naturales.

A continuación se realiza una breve descripción de los trabajos realizados al momento sin la intención de hacer una revisión completa de la bibliografía actual.

Varios autores presentaron trabajos con modelos analíticos de vigas con la presencia de una fisura, donde la fisura se modela con la presencia de un resorte rotacional unido a ambos lados de los tramos de una viga (Ostachowicz y Krawezuk, 1991; Dimarogonas, 1996; Chondros y otros, 1997; Fernández-Sáez y Navarro, 2002; Ruotolo y Surace, 2004; Binici, 2005; Hsu, 2005; Quintana et al., 2010).

En cuanto al desarrollo del método propuesto, se utilizan las técnicas del cálculo de variaciones desarrollado en una gran variedad de textos sobre los aspectos teóricos y las aplicaciones en la determinación de problemas de contorno (Gelfand y Fomin, 1963; Troutman, 1996; Giaquinta y Hildebrandt, 1996; Dym y Shames, 1973; Kantorovich y Krylov, 1964; Hildebrand, 1965; Weinstock, 1974; Elsgoltz, 1962; Grossi, 2010).

El tratamiento de las condiciones de contorno con restricciones elásticas en los extremos, que permite generar infinidad de condiciones de contorno incluyendo las condiciones clásicas, fue presentado por varios autores (Grant, 1975; Hibbeler, 1975; Maurizi et al., 1976; Goel 1976a, b; Grossi y Laura, 1982; Laura y Grossi, 1982; Rao y Mirza, 1989; Cortinez y Laura, 1985; Laura y Gutierrez, 1986; Grossi y Bhat, 1991; Grossi et al., 1993; Nallim y Grossi, 1999). También fue tratado en numerosos trabajos el problema de vibraciones libres de vigas con restricciones elásticas intermedias. De Rosa et al. (1995) concretaron un estudio sobre vibraciones libres de vigas de espesor variable con restricciones elásticas intermedias. Arenas y Grossi (1999) determinaron soluciones exactas y aproximadas para una viga uniforme con un extremo y un punto intermedio elásticamente restringidos. Grossi y Albarracín (2003) determinaron las frecuencias de vibración de una viga con restricciones contra rotación y contra traslación en los extremos y en un punto intermedio. Raffo y Grossi (2012) realizaron un estudio de sensibilidad sobre las primeras frecuencias naturales que consiste en la influencia de la posición y el valor de una restricción elástica intermedia en vigas con rótulas intermedias.

En cuanto a trabajos propuestos donde se resuelve el problema inverso de detección de fisuras en vigas a partir de valores de frecuencia natural, se encuentra que Risos y otros (1990) propusieron un método no destructivo de detección de fisuras a partir de valores medidos de amplitud y frecuencia en dos puntos de la viga con una fisura superficial y uniforme en toda su profundidad, para estimar con métodos analíticos la posición y profundidad de la fisura. Narkis (1994) propuso un método para identificar la ubicación de una fisura a partir de mediciones de frecuencias naturales en una viga simplemente apoyada, a partir de las dos primeras frecuencias naturales. Khaji (2009) propuso identificar fisuras analíticamente a partir de resultados previos obtenidos mediante análisis con el método de elementos finitos. Khiem y Lien (2001, 2002 y 2004) aplicaron este modelo al estudio de múltiples fisuras en vigas, para los casos de vibraciones libres, vibraciones forzadas y para detección de fisuras en vigas a partir de valores de frecuencias naturales. Lele y Maiti (2002) extendieron el método de detección de fisuras a vigas cortas, empleando el modelo para una viga con fisura abierta a un solo lado. Por otra parte, dos de los trabajos más recientes son de Raffo y Carrizo (2013, 2014) donde se desarrolla un método analítico de detección de fisuras utilizando herramientas estadísticas para optimizar y sistematizar el método propuesto.

Se observa que en ninguno de los trabajos de detección de fisura se realiza un análisis de sensibilidad para relacionar el error del coeficiente de frecuencias con el error en la detección de la posición de la fisura.

En este trabajo se analiza un método analítico-estadístico acoplado de detección de fisuras en vigas Euler combinado con el efecto del agregado de un apoyo simple intermedio y se realiza un estudio paramétrico para relacionar el error en los valores del coeficiente de frecuencias con los valores de la posición de fisura detectado.

2 PROBLEMA DE CONTORNO Y SOLUCIÓN EXACTA PROPUESTA

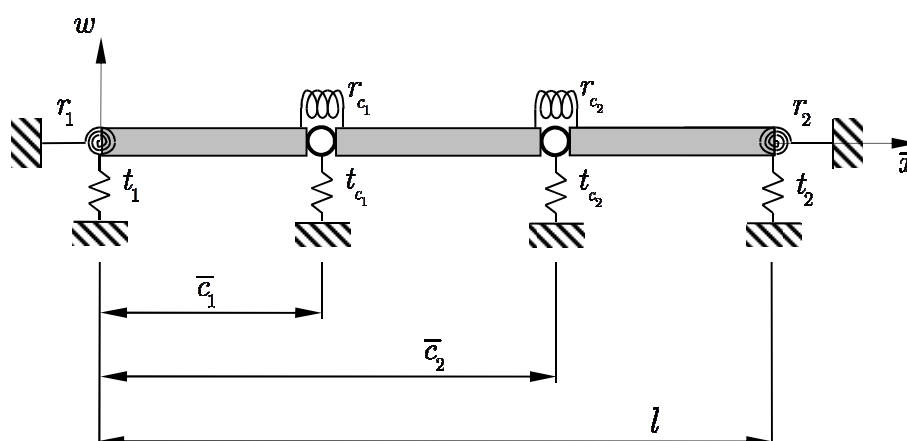


Figura 1: Viga de tres tramos analizada.

Sea una viga de longitud l , de dimensiones uniformes a lo largo de su eje, que tiene sus extremos restringidos elásticamente y tiene dos posiciones intermedias restringidas elásticamente con dos rótulas internas como se muestra en la [Figura 1](#). La viga está compuesta por tres tramos, que corresponden a los intervalos $[0, \bar{c}_1]$, $[\bar{c}_1, \bar{c}_2]$ y $[\bar{c}_2, l]$ respectivamente. Se asume que los extremos y las rótulas intermedias están restringidos elásticamente contra rotación y traslación. Las restricciones rotacionales están definidas por los parámetros $r_1, r_2, r_{c_i}, i = 1, 2$ y las restricciones traslacionales por $t_1, t_2, t_{c_i}, i = 1, 2$. Adoptando valores adecuados de r_1, r_2 y t_1, t_2 se pueden generar todas las combinaciones posibles de restricciones de apoyo clásicas (empotrado, simplemente apoyado, libre). Por otra parte, utilizando $t_{c_i}, r_{c_i}, i = 1, 2$, se pueden considerar efectos de restricciones elásticas intermedias en los puntos intermedios $\bar{x} = \bar{c}_i, i = 1, 2$.

Para analizar el desplazamiento transversal de la viga en estudio, suponemos que la posición vertical de la viga en cualquier instante de tiempo t está descrita por la función $w = w(\bar{x}, t)$, $\bar{x} \in [0, l]$.

La ecuación diferencial, las condiciones de contorno y de transición de la viga analizada se obtienen mediante el desarrollo del principio de Hamilton y el cálculo de variaciones, el cual está dado por ([Raffo y Carrizo, 2013; 2014](#)):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right) + (\rho A)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0, \quad (1)$$

$$\forall x \in (c_{i-1}, c_i), i = 1, 2, 3, t \geq 0.$$

$$R_1 \frac{\partial w}{\partial x}(0^+, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t), \quad (2)$$

$$T_1 w(0^+, t) = -\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(0^+, t), \quad (3)$$

$$w(c_i^-, t) = w(c_i^+, t), i = 1, 2, \quad (4)$$

$$R_{c_i} \left(\frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^-, t), i = 1, 2, \quad (5)$$

$$R_{c_i} \left(\frac{\partial w}{\partial x}(c_i^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c_i^-, t) \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c_i^+, t), i = 1, 2, \quad (6)$$

$$T_{c_i} w(c_i, t) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(c_i^-, t) - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(c_i^+, t), i = 1, 2, \quad (7)$$

$$R_2 \frac{\partial w}{\partial x}(1^-, t) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(1^-, t), \quad (8)$$

$$T_2 w(1^-, t) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(1^-, t), \quad (9)$$

donde $t \geq 0$, $x = \bar{x} / l$, $c_i = \bar{c}_i / l$, $T_i = \frac{t l^3}{EI}$, $R_i = \frac{r_i l}{EI}$, $T_{c_i} = \frac{t c_i^3}{EI}$, $R_{c_i} = \frac{r_{c_i} l}{EI}$, $i = 1, 2$.

Como el dominio del sistema con el cambio de variables considerado es $D = (0, 1)$ que es un intervalo abierto en \mathbb{R} , el borde está dado por dos puntos, $\partial D = \{0, 1\}$. Por lo tanto (2), (3), (8) y (9) corresponden a las condiciones de contorno. Por otro lado, c_1 y c_2 son puntos interiores y (4) a (7) son las condiciones en las transiciones.

En este caso, es posible simular una viga con un apoyo intermedio y una fisura ubicados en diferentes posiciones si se considera una restricción rotacional intermedia adoptando $t_{c_1} = \infty$, $r_{c_1} = \infty$, $0 < r_{c_2} < \infty$, y $t_{c_2} = 0$.

Utilizando el método de separación de variables, se asume como solución de las ecuaciones diferenciales (1) las funciones dadas por

$$w_i(\bar{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{i,n}(\bar{x}) \cos \omega t, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

donde $w_{i,n}$ son los n th modos de vibración natural. Las funciones $w_{i,n}$ están dadas por

$$w_{1,n}(x) = A_1 \cosh \lambda x + A_2 \sinh \lambda x + A_3 \cos \lambda x + A_4 \sin \lambda x, \quad \forall x \in [0, c_1], \quad (11)$$

$$w_{2,n}(x) = A_5 \cosh \lambda x + A_6 \sinh \lambda x + A_7 \cos \lambda x + A_8 \sin \lambda x, \quad \forall x \in [c_1, c_2], \quad (12)$$

$$w_{3,n}(x) = A_9 \cosh \lambda x + A_{10} \sinh \lambda x + A_{11} \cos \lambda x + A_{12} \sin \lambda x, \quad \forall x \in [c_2, 1], \quad (13)$$

donde $\lambda^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 l^4$.

Al reemplazar las Ecs. (11)-(13) en las Ecs.(2)-(9), y se condiciona que el determinante del sistema de los coeficientes A_i debe ser igual a cero, se obtiene la ecuación de frecuencias

$$G\left(T_1, R_1, T_2, R_2, \left(T_{c_i}, R_{c_i}, c_i\right)\Big|_{i=1,2}, \lambda\right) = 0. \quad (14)$$

3 MODELO DE FISURA

En adelante, en cuanto a las dos transiciones, el apoyo intermedio se lo considera ubicado en c_1 , con $T_{c_1} = \infty, R_{c_1} = \infty$ y cuando no exista apoyo intermedio es $T_{c_1} = 0$ y $R_{c_1} = \infty$.

Mientras que la fisura está ubicada en $c_2 = c$, con $T_{c_2} = 0$ y $R_{c_2} = R_c$.

Para la implementación del modelo de fisura, se considera el modelo que [Ostachowicz y Krawezuk \(1991\)](#) propusieron formulado con herramientas fractomecánicas, basado en el factor de intensidad de tensiones para fisuras superficiales simples y abiertas (ver [Figura 2](#)).

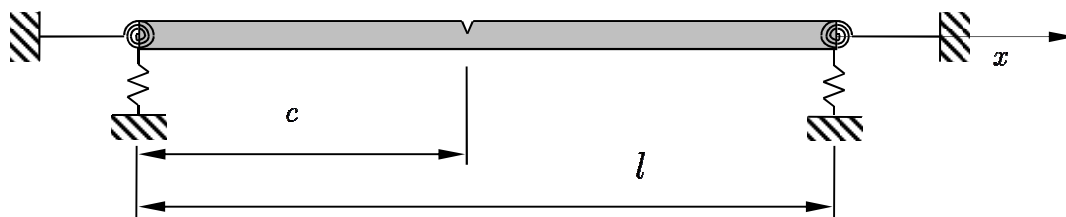


Figura 2: Viga con una fisura superficial a un solo lado.

Este modelo consiste en considerar a la sección de la viga donde se encuentra la fisura, como una rótula elástica donde la rigidez del resorte rotacional varía de la siguiente manera

$$R_c = \frac{l}{6\pi h \eta^2 f(\eta)}, \quad (15)$$

donde h es la altura de la sección rectangular, $\eta = a / h$ es la relación entre la profundidad de la fisura a y la altura de la viga (ver [Figura 3](#)) y $f(\eta)$ está dada por

$$f(\eta) = 0.6384 - 1.035\eta + 3.7201\eta^2 - 5.1773\eta^3 + 7.553\eta^4 - 7.332\eta^5 + 2.4909\eta^6. \quad (16)$$

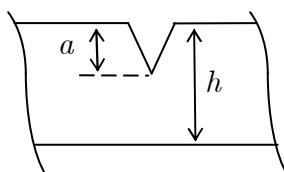


Figura 3: Esquema de una fisura superficial abierta de un lado de la viga.

4 PROBLEMA INVERSO

Se propone resolver el problema inverso de determinación de posición de la fisura a partir de conocer los primeros valores de los coeficientes de frecuencias λ de una viga con y sin un apoyo simple intermedio mediante la ecuación característica (14).

El procedimiento se describe en detalle en Raffo y Carrizo (2013, 2014) para cuando no hay apoyo intermedio agregado. Igualmente a continuación se realiza una explicación breve. El Método Analítico de Detección de Fisuras (MADF) consiste en introducir los valores de las restricciones elásticas de los extremos, el de las transiciones, salvo c y R_c que son los parámetros que representan la posición y rigidez rotacional causada por la profundidad de la fisura, y por último se ingresa el valor de una de las frecuencias naturales del sistema analizado en la ecuación de frecuencias (14). Por lo tanto, resulta,

$$H(c, R_c) = 0. \quad (17)$$

Luego, a partir de (17) se obtienen los valores de R_c para todos los valores de $c \in (0,1)$.

Si se repite el procedimiento para al menos los dos primeros valores de λ , todos los puntos donde coincidan sus valores de c y de R_c , indicarán que son solución de (17) y por lo tanto también lo serán de (14). Este procedimiento funciona excelente cuando los valores de λ ingresados en (14) son exactos y cuando la fisura no se encuentra ubicada en un punto de inflexión de la deformada de la forma modal analizada, pero si estos valores tienen algún error (por ejemplo, valores obtenidos en un ensayo) ya este método empieza a tener problemas relevantes. A fin de facilitar la determinación de c y de R_c , se complementa con el cálculo de la desviación estándar de los valores de (17) obtenidos para cada valor de λ utilizado. Esto es

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (R_c^i - \bar{R}_c)^2}{(n-1)}. \quad (18)$$

donde R_c^i denota el valor de R_c para el modo i , \bar{R}_c denota el valor medio de los R_c^i y n es la cantidad total de modos empleados.

En la Figura 4 se presenta el caso de una viga articulada en ambos extremos (viga A-A) con una fisura ubicada en $c = 0.25$, con $\eta = 0.99$. En la Figura 4a, se presenta el caso de la viga sin apoyo intermedio siendo la figura superior correspondiente a las soluciones de la

ecuación (17) para los primeros seis valores de λ , y en la figura inferior se presenta el valor de σ cuando $n = 6$ en la ecuación (18). En la Figura 4b se presentan los mismos valores que en la figura anterior pero cuando se agrega un apoyo intermedio en $c_1 = 0.1$.

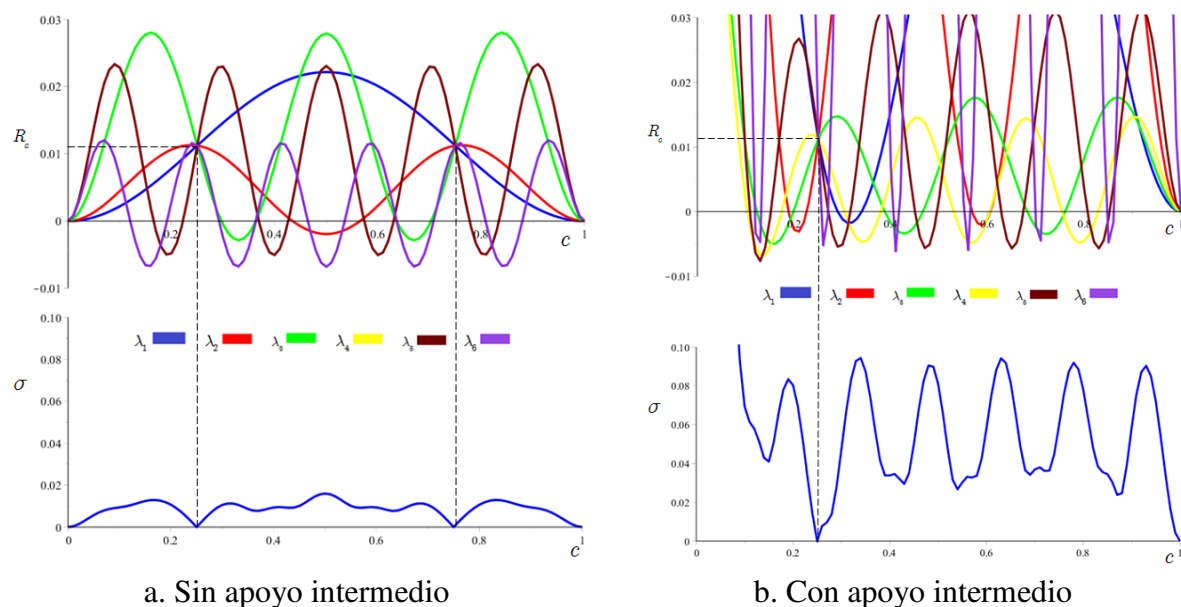


Figura 4: Descripción del procedimiento del Método Analítico de Detección de Fisuras (MADF) para una viga A-A con una fisura ubicada en $c = 0.25$, y $\eta = 0.99$; (a) Sin un apoyo simple intermedio; (b) con un apoyo simple intermedio ubicado en $c_1 = 0.1$.

Se puede observar de la Figura 4a dos posibles valores de posición de la fisura, esto es cuando σ toma el valor más bajo en el dominio y en el caso de la Figura 4b, existe un único valor de posición de la fisura indicado por el menor valor de σ para $c \in (0,1)$.

Por otra parte, en el mismo método se procede a descartar los modos que al realizar el procedimiento descrito presentan valores de R_c evidentemente mayores que la rigidez de la viga, esto es valores con un orden de magnitud de aproximadamente 8 veces mayor que los obtenidos con otros modos (Raffo y Carrizo, 2013 y 2014).

5 RESULTADOS

Los errores analizados en este trabajo se definen como

$$\varepsilon_\lambda = \left(\frac{\lambda - \hat{\lambda}}{\lambda} \right) 100\%, \quad (19)$$

$$\varepsilon_c = \left(\frac{c - \hat{c}}{c} \right) 100\%, \quad (20)$$

donde $\hat{\lambda}$ es el valor del coeficiente de frecuencias con error y \hat{c} es el valor calculado con el

MADF.

En la [Tabla 1](#) se presentan los primeros seis valores exactos de λ para diferentes vigas A-A con y sin apoyo intermedio según indica el valor de c_1 , con una fisura ubicada en $c = 0.25$ y 0.5 , para valores de $\eta = 0.5, 0.75$ y 0.99 , y los valores obtenidos del MADF de \hat{c} y ε_c . Se utilizó a los valores de λ sin error inducido y se observa que los MADF con y sin apoyo intermedio detectan la posición de la fisura sin error.

c_1	c	η	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	\hat{c}	ε_c
-	0.5	0.75	3.056	6.283	9.190	12.566	15.347	18.850	0.50	0.00
0.1	0.5	0.75	4.159	7.555	10.906	14.235	17.820	20.901	0.50	0.00
0.2	0.5	0.75	4.564	8.216	12.146	15.337	17.828	20.213	0.50	0.00
-	0.5	0.99	3.000	6.283	9.056	12.566	15.166	18.850	0.50	0.00
0.1	0.5	0.99	4.115	7.509	10.823	14.111	17.773	20.708	0.50	0.00
0.2	0.5	0.99	4.529	8.116	12.137	15.145	17.809	20.104	0.50	0.00
-	0.25	0.5	3.126	6.221	9.380	12.566	15.631	18.675	0.25	0.00
0.05	0.25	0.5	4.065	7.302	10.500	13.776	17.120	20.372	0.25	0.00
0.1	0.25	0.5	4.221	7.621	10.973	14.349	17.818	21.327	0.25	0.00
0.15	0.25	0.5	4.395	7.986	11.545	15.056	18.542	21.848	0.25	0.00
0.2	0.25	0.5	4.590	8.384	12.159	15.631	17.761	20.457	0.25	0.00
0.25	0.25	0.5	4.804	8.792	12.566	14.236	17.301	21.307	0.25	0.00
-	0.25	0.99	3.066	6.019	9.253	12.566	15.392	18.251	0.25	0.00
0.1	0.25	0.99	4.203	7.587	10.729	14.014	17.611	21.289	0.25	0.00

Tabla 1: Primeros seis valores de λ para vigas A-A con y sin apoyo intermedio según indica el valor de c_1 , con una fisura ubicada en $c = 0.25$ y 0.5 , para valores de $\eta = 0.5, 0.75$ y 0.99 , y los valores obtenidos con el MADF de \hat{c} y ε_c .

En las [Tablas 2 a 8](#) se presentan los valores de \hat{c} y ε_c , para una viga A-A con $c = 0.25$, $\eta = 0.99$ y $c_1 = 0.1$ para el MADF con apoyo.

En las [Tablas 2 a 7](#) se induce el error ε_λ a los valor de λ_1 a λ_6 respectivamente y en la [Tabla 8](#) se induce el error a los primeros seis valores de λ . Se puede observar que la presencia del apoyo intermedio mejora notablemente el valor de ε_c .

En la [Tabla 9](#) se presentan los primeros seis valores de λ para una viga empotrada en su extremo izquierdo y libre en su extremo derecho (E-L) con $c = 0.7$, $\eta = 0.8$ y una viga con restricciones elásticas en ambos extremos siendo $T_1 = 1$, $R_1 = 1$, $T_2 = 10$, $R_2 = 0.1$ (RE-RE) con $c = 0.6$ y $\eta = 0.6$.

En la [Tabla 10](#) se presentan los valores de \hat{c} y ε_c , para la viga E-L descrita en la [Tabla 9](#) con $c_1 = 0.5$ para el MADF con apoyo. En la misma se induce el error ε_λ a los valor de λ_1 . Se observa que la presencia del apoyo intermedio mejora la predicción de la posición de la fisura respecto al MADF sin apoyo intermedio.

ε_λ	MADF sin apoyo		MADF con apoyo	
	\hat{c}	ε_c	\hat{c}	ε_c
-5	0.370	48.000	0.250	0.000
-4	0.370	48.000	0.250	0.000
-3	0.250	0.000	0.250	0.000
-2	0.250	0.000	0.250	0.000
-1	0.250	0.000	0.250	0.000
+1	0.250	0.000	0.250	0.000
+2	0.250	0.000	0.250	0.000
+3	0.360	44.000	0.250	0.000
+4	0.230	8.000	0.250	0.000
+5	0.370	48.000	0.250	0.000

Tabla 2: Valores de \hat{c} y ε_c para una viga A-A con $c = 0.25$, $\eta = 0.99$ obtenidos con el MADF con y sin apoyo intermedio ubicado en $c_1 = 0.1$, para varios valores de ε_λ inducidos en λ_1 .

ε_λ	MADF sin apoyo		MADF con apoyo	
	\hat{c}	ε_c	\hat{c}	ε_c
-5	0.250	0.000	0.250	0.000
-4	0.250	0.000	0.250	0.000
-3	0.250	0.000	0.250	0.000
-2	0.250	0.000	0.250	0.000
-1	0.250	0.000	0.250	0.000
+1	0.250	0.000	0.250	0.000
+2	0.250	0.000	0.250	0.000
+3	0.450	80.000	0.250	0.000
+4	0.450	80.000	0.250	0.000
+5	0.470	88.000	0.250	0.000

Tabla 3: Valores de \hat{c} y ε_c para una viga A-A con $c = 0.25$, $\eta = 0.99$ obtenidos con el MADF con y sin apoyo intermedio ubicado en $c_1 = 0.1$, para varios valores de ε_λ inducidos en λ_2 .

ε_λ	MADF sin apoyo		MADF con apoyo	
	\hat{c}	ε_c	\hat{c}	ε_c
-5	0.240	4.000	0.250	0.000
-4	0.250	0.000	0.250	0.000
-3	0.240	4.000	0.250	0.000
-2	0.240	4.000	0.250	0.000
-1	0.240	4.000	0.250	0.000
+1	0.270	8.000	0.250	0.000
+2	0.250	0.000	0.250	0.000
+3	0.370	48.000	0.430	72.000
+4	0.370	48.000	0.250	0.000
+5	0.370	48.000	0.250	0.000

Tabla 4: Valores de \hat{c} y ε_c para una viga A-A con $c = 0.25$, $\eta = 0.99$ obtenidos con el MADF con y sin apoyo intermedio ubicado en $c_1 = 0.1$, para varios valores de ε_λ inducidos en λ_3 .

ε_λ	MADF sin apoyo		MADF con apoyo	
	\hat{c}	ε_c	\hat{c}	ε_c
-5	0.250	0.000	0.250	0.000
-4	0.250	0.000	0.250	0.000
-3	0.250	0.000	0.250	0.000
-2	0.250	0.000	0.250	0.000
-1	0.250	0.000	0.250	0.000
+1	0.250	0.000	0.250	0.000
+2	0.250	0.000	0.250	0.000
+3	0.250	0.000	0.540	116.00
+4	0.250	0.000	0.540	116.00
+5	0.250	0.000	0.250	0.000

Tabla 5: Valores de \hat{c} y ε_c para una viga A-A con $c = 0.25$, $\eta = 0.99$ obtenidos con el MADF con y sin apoyo intermedio ubicado en $c_1 = 0.1$, para varios valores de ε_λ inducidos en λ_4 .

ε_λ	MADF sin apoyo		MADF con apoyo	
	\hat{c}	ε_c	\hat{c}	ε_c
-5	0.250	0.000	0.250	0.000
-4	0.260	4.000	0.250	0.000
-3	0.260	4.000	0.250	0.000
-2	0.260	4.000	0.250	0.000
-1	0.260	4.000	0.250	0.000
+1	0.240	4.000	0.270	8.000
+2	0.250	0.000	0.280	12.000
+3	0.390	56.00	0.270	8.000
+4	0.390	56.00	0.270	8.000
+5	0.230	8.000	0.250	0.000

Tabla 6: Valores de \hat{c} y ε_c para una viga A-A con $c = 0.25$, $\eta = 0.99$ obtenidos con el MADF con y sin apoyo intermedio ubicado en $c_1 = 0.1$, para varios valores de ε_λ inducidos en λ_5 .

ε_λ	MADF sin apoyo		MADF con apoyo	
	\hat{c}	ε_c	\hat{c}	ε_c
-5	0.250	0.000	0.250	0.000
-4	0.250	0.000	0.250	0.000
-3	0.250	0.000	0.250	0.000
-2	0.250	0.000	0.250	0.000
-1	0.250	0.000	0.240	4.000
+1	0.260	4.000	0.260	4.000
+2	0.250	0.000	0.260	4.000
+3	0.350	40.000	0.260	4.000
+4	0.340	36.000	0.260	4.000
+5	0.350	40.000	0.250	0.000

Tabla 7: Valores de \hat{c} y ε_c para una viga A-A con $c = 0.25$, $\eta = 0.99$ obtenidos con el MADF con y sin apoyo intermedio ubicado en $c_1 = 0.1$, para varios valores de ε_λ inducidos en λ_6 .

ε_λ	MADF sin apoyo		MADF con apoyo	
	\hat{c}	ε_c	\hat{c}	ε_c
-5	0.250	0.000	0.200	20.000
-4	0.250	0.000	0.210	16.000
-3	0.250	0.000	0.220	12.000
-2	0.250	0.000	0.270	8.000
-1	0.270	8.000	0.240	4.000
+1	0.250	0.000	0.260	4.000
+2	0.380	52.000	0.150	40.000
+3	0.170	32.000	0.170	32.000
+4	0.470	88.000	0.160	36.000
+5	0.470	88.000	0.170	32.000

Tabla 8: Valores de \hat{c} y ε_c para una viga A-A con $c = 0.25$, $\eta = 0.99$ obtenidos con el MADF con y sin apoyo ubicado en $c_1 = 0.1$, para varios valores de ε_λ inducidos en los primeros seis valores de λ .

C. B.	c_1	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
E-L	-	1.872739	4.608432	7.593212	10.886190	14.101427	16.868768
	0.5	3.100411	7.559361	9.276836	14.101122	15.526534	20.072726
RE-RE	-	1.438407	2.635281	4.928072	7.938296	11.058944	14.017661
	0.4	2.633977	4.211034	7.161080	10.723361	12.588063	17.269499

Tabla 9: Primeros seis valores exactos de λ para una viga E-L con $c = 0.7$, $\eta = 0.8$ y una viga RE-RE representada por $T_1 = 1$, $R_1 = 1$, $T_2 = 10$, $R_2 = 0.1$, con $c = 0.6$, $\eta = 0.6$.

ε_λ	MADF sin apoyo		MADF con apoyo	
	\hat{c}	ε_c	\hat{c}	ε_c
-5	0.300	57.143	0.710	1.429
-4	0.300	57.143	0.710	1.429
-3	0.300	57.143	0.710	1.429
-2	0.300	57.143	0.710	1.429
-1	0.700	0.000	0.710	1.429
+1	0.700	0.000	0.700	0.000
+2	0.700	0.000	0.740	5.714
+3	0.700	0.000	0.740	5.714
+4	0.700	0.000	0.710	1.429
+5	0.700	0.000	0.710	1.429

Tabla 10: Valores de \hat{c} y ε_c para una viga E-L con $c = 0.7$, $\eta = 0.8$ obtenidos con el MADF con y sin apoyo intermedio ubicado en $c_1 = 0.5$, para varios valores de ε_λ inducidos en λ_1 .

Los resultados que figuran con la nomenclatura “Obs” (observado) indican que no se pudo determinar con precisión un mínimo de σ por tener esta función una tendencia asintótica de un extremo al otro del dominio o una tendencia a una forma parabólica de concavidad negativa, en ambos casos sin ningún mínimo notable como lo es en los casos presentados.

En la [Tabla 11](#) se presentan los valores de \hat{c} y ε_c , para la viga RE-RE descrita en la [Tabla 9](#) con $c_1 = 0.4$ para el MADF con apoyo. Se analiza cuando se induce el error ε_λ a los primeros seis valores de λ .

ε_λ	MADF sin apoyo		MADF con apoyo	
	\hat{c}	ε_c	\hat{c}	ε_c
-5	0.420	30.000	0.540	10.000
-4	0.420	30.000	0.540	10.000
-3	0.420	30.000	0.550	8.333
-2	0.420	30.000	0.550	8.333
-1	0.420	30.000	0.560	6.667
+1	0.600	0.000	0.600	0.000
+2	0.470	21.667	Obs	-
+3	0.250	58.333	0.490	18.333
+4	Obs	-	0.500	16.667
+5	Obs	-	0.520	13.333

Tabla 11: Valores de \hat{c} y ε_c para una viga con restricciones elásticas en ambos extremos con $c = 0.6$, $\eta = 0.6$ obtenidos con el MADF con y sin apoyo intermedio ubicado en $c_1 = 0.4$, para varios valores de ε_λ inducidos en los primeros seis valores de λ . Los valores observados (Obs.) indican que no se pudo determinar un mínimo de σ .

ε_λ	$\eta = 0.2$		$\eta = 0.4$		$\eta = 0.6$		$\eta = 0.8$	
	MADF	MADF	MADF	MADF	MADF	MADF	MADF	MADF
	sin	con	sin	con	sin	con	sin	con
	apoyo	apoyo	apoyo	apoyo	apoyo	apoyo	apoyo	apoyo
-5	0.000	0.000	57.143	0.000	57.143	0.000	57.143	1.429
-4	57.143	0.000	57.143	0.000	57.143	0.000	57.143	1.429
-3	57.143	0.000	57.143	0.000	57.143	0.000	57.143	1.429
-2	57.143	0.000	57.143	0.000	57.143	0.000	57.143	1.429
-1	57.143	0.000	57.143	0.000	57.143	0.000	0.000	1.429
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	5.714	0.000	5.714
2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	5.714
3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.429
4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.429
5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.429

Tabla 12: Valores de ε_c para una viga E-L con $c = 0.7$ y $\eta = 0.2, 0.4, 0.6$ y 0.8 obtenidos con el MADF con y sin apoyo intermedio ubicado en $c_1 = 0.5$, para varios valores de ε_λ inducidos en λ_1 .

Se observa de las Tablas 2 a 11 que el MADF con apoyo mejora los resultados de la detección de la posición de la fisura respecto al MADF sin apoyo.

En la Tabla 12 se presentan los valores de ε_c para una viga E-L con $c = 0.7$ y $\eta = 0.2, 0.4, 0.6$ y 0.8 , siendo $c_1 = 0.5$ cuando se analiza el MADF con apoyo. En la misma se induce el error ε_λ a los valor de λ_1 . Se observa que la presencia del apoyo intermedio mejora notablemente los valores del error en la detección de la posición de la fisura.

6 CONCLUSIONES

Se resolvió en forma analítica el problema de una viga con restricciones elásticas generales en los extremos, con dos transiciones intermedias con restricciones elásticas generales para representar una fisura y un apoyo simple en diferentes ubicaciones. Se implementó un modelo de fisura abierta representado con una rótula elástica, la cual en función de las propiedades de la fisura varía su rigidez a la flexión. Con este modelo, se implementó el Método Analítico de Detección de Fisura (MADF) con y sin un apoyo intermedio. El método consiste en obtener la posición de la fisura a partir de valores del coeficiente de frecuencias. Se comparó la precisión de detectar la posición de la fisura con y sin el agregado del apoyo simple intermedio.

Se observa que el MADF con apoyo intermedio presenta una notable mejora en la detección de la posición de la fisura respecto al MADF sin apoyo intermedio.

Se destaca además que el presente trabajo realiza un análisis de sensibilidad al inducir un error en los valores del coeficiente de frecuencias con el objetivo de realizar una comparación objetiva de los resultados de los dos métodos de detección analizados.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de investigación fue realizado dentro del proyecto UTN 3487.

REFERENCIAS

- Arenas, B. B. y Grossi, R. O., Vibration frequencies for a beam with a rotational restraint in an adjustable position, *Applied Acoustics*, 57:197-202, 1999.
- Binici, B., Vibration of beams with multiple open cracks subjected to axial force. *Journal of Sound and Vibration*, 287:277-295, 2005.
- Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D. y Yao, J., A consistent cracked bar vibration theory. *Journal of Sound and Vibration*, 200: 303-313, 1997.
- Cortinez, H. y Laura, P. A. A., Vibration and buckling of a non-uniform beam elastically restrained against rotation at one end and with concentrated mass at the other. *Journal of Sound and Vibration*, 99:144-148, 1985.
- De Rosa, M. A., Bellés, P. M. y Maurizi, M. J., Free vibrations of stepped beams with intermediate elastic supports. *Journal of Sound and Vibration*, 181:905-910, 1995.
- Dimarogonas A. D., Vibration of cracked structures: a state of the art review. *Engineering Fracture Mechanics*, 55: 831-857, 1996.
- Dym, C. y Shames, I., *Solid Mechanics: A Variational Approach*. Mc Graw Hill Book Company, New York, 1973.
- Elsigoltz, L., *Calculus of Variations*. Addison-Wesley, 1962.
- Fernández-Sáez, J. y Navarro, C., Fundamental frequency of cracked beams in bending vibrations: an analytical approach. *Journal of Sound and Vibration*, 256:17-31, 2002.
- Gelfand, I. y Fomin, S., *Calculus of Variations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
- Giaquinta, M. y Hildebrandt, S., *Calculus of Variations I*. Springer-Verlag, Berlín, 1996.
- Goel, P., Free vibrations of a beam-mass system with elastically restrained ends. *Journal of Sound and Vibration*, 47:9-14, 1976a.
- Goel, P., Transverse vibrations of tapered beams. *Journal of Sound and Vibration*, 47:1-7, 1976b.
- Grant, A., Vibration frequencies for a uniform beam with one end elastically supported and carrying a mass at the other end. *Journal of Applied Mechanics*, 42: 878-880, 1975.
- Grossi, R. O. y Albarracín, C., Eigenfrequencies of generally restrained beams. *Journal of Applied Mathematics*, 10:503-516, 2003.

- Grossi, R. O. y Bhat, R. B., A note on vibrating tapered beams. *Journal of Sound and Vibration*, 47:174-178, 1991.
- Grossi, R. O. y Laura, P. A. A., Further results on a vibrating beam with a mass and spring at the end subjected to an axial force. *Journal of Sound and Vibration*, 84:593-594, 1982.
- Grossi, R. O., Aranda, A. y Bhat, R. B., Vibration of tapered beams with one end spring hinged and the other end with tip mass. *Journal of Sound and Vibration*, 160:175-178, 1993.
- Grossi, R.O., *Cálculo de Variaciones. Teoría y Aplicaciones*. CIMNE, Barcelona, 2010.
- Hibbeler, C., Free vibrations of a beam supported with unsymmetrical spring-hinges. *Journal of Applied Mechanics*, 42:501-502, 1975.
- Hildebrand, F., *Methods of Applied Mathematics*. Prentice Hall, New Jersey, 1965.
- Hsu, M-H, Vibration analysis of edge-cracked beam on elastic foundation with axial loading using the differential quadrature method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:1-17, 2005.
- Kantorovich, L. y Krylov, V., *Approximate Methods of Higher Analysis*. Interscience Publishers, New York, 1964.
- Khaji, N., Shafiei, M., y Jalalpour, M., Closed-form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 51:667-681, 2009.
- Khiem N.T. y Lien T.V., A simplified method for natural frequency analysis of a multiple cracked beam. *Journal of Sound and Vibration*, 245: 737-751, 2001.
- Khiem N.T. y Lien T.V., The dynamic stiffness matrix method in forced vibration analysis of multiple-cracked beam. *Journal of Sound and Vibration*, 254: 541-555, 2002.
- Khiem N.T. y Lien T.V., Multi-crack detection for beam by the natural frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 273: 175-184, 2004.
- Laura, P. A. y Gutierrez, R. H., Vibration of a elastically restrained cantilever beam of varying cross section with tip mass of finite length. *Journal of Sound and Vibration*, 108:123-131, 1986.
- Laura, P.A.A., Grossi, R. O. y Alvarez, S., Transverse vibrations of a beam elastically restrained at one end and with a mass and spring at the other subjected to an axial force. *Nuclear Engineering and Design*, 74:299-302, 1982.
- Lele S.P. y Maiti S.K., Modelling of transverse vibration of short beams for crack detection and measurement of crack extension. *Journal of Sound and Vibration*, 257: 559-583, 2002.
- Maurizi, R., Rossi, R. y Reyes, J., Vibration frequencies for a uniform beam with one end spring hinged and subjected to a translational restraint at the other end. *Journal of Sound and Vibration*, 48:565-568, 1976.
- Nallim, L. y Grossi, R. O., A general algorithm for the study of the dynamical behaviour of beams. *Applied Acoustics*, 57:345-356, 1999.
- Narkis Y., Identification of crack location in vibrating simply supported beams. *Journal of Sound and Vibration*, 172: 549-558, 1994.
- Ostachowicz, W. M. y Krawczuk, M., Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, 150:191-201, 1991.
- Quintana M. V., Raffo, J. L. y Grossi, R. O., Eigenfrequencies of generally restrained Timoshenko beams with an internal hinge. *Mecánica Computacional*, 24:2499-2516, 2010.
- Raffo, J. L. y Carrizo, M. R., Método Analítico de Detección de Fisuras en Vigas Vibrantes. *IV Congreso Argentino Ingeniería Mecánica*, 2014.
- Raffo, J. L. y Carrizo, M. R., Vibraciones de vigas y pórticos ante la presencia de fisuras. Implementación del problema inverso. *Mecánica Computacional*, 32:1715-1735, 2013.
- Raffo, J. L. y Grossi, R. O., A study on mode shapes of beams with internal hinges and

- intermediate elastic restraints. *Mecánica Computacional*, 26:2593-2610, 2012.
- Rao, C. K. y Mirza, S., Note on vibrations of generally restrained beams. *Journal of Sound and Vibration*, 130:453-465, 1989.
- Rizos, P. F., Aspragathos, N. y Dimarogonas, A. D., Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes. *Journal of Sound and Vibration*, 138:381-388, 1990.
- Ruotolo, R. y Surace, C., Natural frequencies of a bar with multiple cracks. *Journal of Sound and Vibration*, 272:301-316, 2004.
- Troutman, J. L., *Variational Calculus and Optimal Control*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- Weinstock, R., *Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering*. Dover Publications, New York, 1974.