

## COMPORTAMIENTO DEL HORMIGÓN MODELADO MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS ENRIQUECIDOS - EFEM

Marcos E. Gerez Albornoz<sup>a</sup> y Sonia M. Vrech<sup>a</sup>

<sup>a</sup>CONICET - Universidad Nacional de Tucumán, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología. Av.  
Independencia 1800, 4000 San Miguel de Tucumán, Argentina, marcosgerez@gmail.com,  
svrech@herrera.unt.edu.ar

**Palabras Clave:** EFEM, Elementos Finitos Enriquecidos, Hormigón.

**Resumen.** En los últimos años se han desarrollado numerosos modelos numéricos para analizar elementos estructurales de hormigón, sin embargo es necesario profundizar el estudio del comportamiento del hormigón cuando éste se fisura. El objetivo de este trabajo es reproducir numéricamente la respuesta de elementos de hormigón simple, mediante técnicas de Elementos Finitos Enriquecidos EFEM, con la adopción de leyes cohesivas adecuadas para analizar la fisura. El presente modelo constitutivo se calibra a partir de los resultados de ensayos experimentales de probetas sometidas a tracción y flexión. La comparación de los resultados numéricos con los experimentales prueba la validez del modelo utilizado.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los elementos finitos para el modelado de discontinuidades han recibido mucha atención en los últimos años, especialmente para la predicción de la propagación de fallas en sólidos en la forma de fisuras o bandas de corte. El principal desafío ha sido la modelación de discontinuidades fuertes (o discontinuidades en el campo de desplazamiento) independientes de la malla utilizada, evitando así cualquier proceso de “re-mallado”. La consideración de técnicas de EFEM tiene la ventaja de permitir la condensación estática de los parámetros locales para el modelado de discontinuidades fuertes a nivel elemento. Sus bases pueden ser encontradas en una caracterización multi-escala de la solución para el problema de valores de borde clásico, en condiciones normales de regularidad que definen el problema a gran escala, incorporando los efectos disipativos locales de la discontinuidad. Estos elementos finitos resultan ser muy prometedores y en los últimos años numerosos investigadores a lo largo del mundo proponen modelos constitutivos basados en dichos elementos.

## 2. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS ENRIQUECIDOS - EFEM

Los elementos finitos enriquecidos para el modelado de la propagación de discontinuidades han recibido mucha atención en las últimas décadas, especialmente para la predicción de la falla de sólidos en forma de fisuras.

Sus bases pueden ser encontradas en la caracterización multi-escala de la solución para el problema de valores de borde mecánico clásico, en condiciones normales de regularidad que definen el problema a gran escala, incorporando los efectos disipativos locales de la discontinuidad local, ver [Armero \(1999\)](#); [Armero \(2001\)](#) para detalles. Este marco permite la formulación de elementos finitos con discontinuidades infinitesimales embebidas fuertes ([Armero y Garikipati, 1995](#)) y problemas continuos de deformaciones finitas ([Armero y Garikipati, 1996](#)) poro-plasticidad acoplada ([Callari y Armero, 2002](#)) y problemas de vigas/placas ([Ehrlich y Armero, 2005, 2006](#)). Tratamientos alternativos incluyen enfoques de la regularización de la discontinuidad considerados en [Larsson et al. \(1998\)](#) [Oliver \(2003\)](#) y los elementos finitos enriquecidos presentados en [Steinmann \(1999\)](#), por ejemplo. Muchos de estos trabajos consideran elementos finitos triangulares con interpolaciones constantes de los saltos a nivel elemento. Elementos cuadriláteros con saltos constantes han sido considerados en [Mosler y Meschke \(2003\)](#). Saltos constantes, sin embargo, demuestran ser inapropiados para la cinemática de vigas y placas ([Ehrlich y Armero, 2005](#)), como el denominado “bloqueo de tensiones”. Esta situación puede ser definida como un exceso en la rigidez del elemento debido a una falsa transferencia de tensiones (espurias) a través de la discontinuidad, destacando en particular la imposibilidad de reproducir una apertura completa de la discontinuidad con tensiones no asociadas (por ejemplo en combinación con modos de cuerpo rígido, de la separación de partes del elemento). En [Ehrlich y Armero \(2006\)](#) se ha observado que la consideración precisa de estos modos permite el diseño de mejoras de “bloqueo-libre”, incluyendo interpolaciones lineales de las deflexiones en este contexto. Similares consideraciones han sido desarrolladas recientemente en [Manzoli y Shing \(2006\)](#) para la formulación de elementos cuadriláteros con discontinuidades regularizadas en el continuo, ya que estos elementos exhiben una similar transferencia falsa de tensiones cuando se trata de un modelo con modos de separación no-constantes.

En este trabajo se desarrollan elementos con interpolaciones lineales de los saltos, explotando un nuevo enfoque para identificar los modos de deformaciones y ser capturados con mayor precisión. Este enfoque contrasta con descripción directa de los saltos discontinuos sobre el elemento, como lo mostrado en [Alfaite et al. \(2003\)](#) y [Bolson \(2001\)](#). Se consideran elemen-

tos cuadriláteros, basados en campos de desplazamientos y mixtos, elementos de deformación clásicos y enriquecidos. Cabe destacar, que en contraposición con los elementos presentados en [Manzoli y Shing \(2006\)](#), se consideran discontinuidades no regularizadas con interpolaciones lineales para el salto normal como así también para la componente tangencial. Lo anterior requiere, no sólo la captura de modos de cuerpo rígido del elemento dividido, sino también del estiramiento relativo discontinuo entre las diferentes partes. Se resalta que las interpolaciones continuas pueden ser logradas manteniendo la implementación local antes mencionada por la cual los parámetros de enriquecimiento para el modelado de los saltos son condensados estáticamente a nivel del elemento, y por lo tanto implica mínimos cambios al código de elementos finitos clásicos. Esta situación puede ser observada con enfoques similares a [Alfaite et al. \(2003\)](#) y [Bolson \(2001\)](#) basados en la adición de nodos a lo largo del camino de la discontinuidad dando lugar al enriquecimiento global.

## 2.1. Definición del problema

Es de interés analizar la falla de un sólido de volumen  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$  cuya deformación puede ser caracterizada en un rango infinitesimal de interés por un campo de desplazamientos  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$  a gran escala. Para esto se considera que este campo exhibe condiciones de regularidad estándar (por ejemplo  $H^1(\Omega)$  para problemas clásicos de elasticidad), definiendo el equilibrio estático por la formulación débil clásica

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \boldsymbol{\omega} d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\omega} d\Omega + \int_{\partial_T \Omega} \overline{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{\omega} ds \quad (1)$$

para todas las variaciones admisibles  $\boldsymbol{\omega}$  de  $\mathbf{u}$  (sin tener en cuenta la parte del borde  $\partial_u \Omega$  donde el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$  está impuesto), considerando una carga volumétrica aplicada  $\boldsymbol{\rho} \mathbf{b}$  y fuerzas de tracción  $\overline{\mathbf{T}}$  en una sección del contorno  $\partial_T \Omega$ , el tensor de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  es determinada en términos de las deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \nabla^s \mathbf{u}$  y otros efectos característicos de la respuesta del sólido.

Aquí nos interesa el modelado de fallas, que puede ser caracterizado por una ley cohesiva a lo largo de la superficie de discontinuidad de los desplazamientos, también denominada discontinuidad fuerte. En el marco multi-escala presentado aquí, estas discontinuidades son consideradas localmente, como una superficie  $\Gamma_x$  cuya normal  $\mathbf{n}$  definida localmente en un entorno  $\Omega_x \subset \Omega$ , donde su presencia ha sido detectada (por ejemplo condición de tensor acústico nulo en la respuesta volumétrica).

Los desplazamientos locales son escritos como

$$\mathbf{u}_u = \mathbf{u} + \widehat{\mathbf{u}}([\mathbf{u}_u]) \text{ en } \Omega_x. \quad (2)$$

Esto es, a través de un campo discontinuo de desplazamientos  $\widehat{\mathbf{u}}$  adicionado al desplazamiento original  $\mathbf{u}$  y definido en términos de un salto en el desplazamiento asociado  $[\mathbf{u}_u] : \Gamma_x \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$  a través  $\Gamma_x$ . Asumiendo, por ejemplo una respuesta lineal elástica en el volumen  $\Omega_x / \Gamma_x$ , las tensiones están dadas por

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_u \text{ para } \boldsymbol{\varepsilon}_u = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}([\mathbf{u}_u]) \text{ en } \Omega_x \setminus \Gamma_x \quad (3)$$

Las deformaciones a gran escala  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ , en las deformaciones enriquecidas  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}([\mathbf{u}_u])$  provocadas por el efecto del salto  $[\mathbf{u}_u]$  a lo largo  $\Gamma_x$  al resto de  $\Omega_x$ . El campo local recién introducido  $[[\mathbf{u}_u]]$  en  $\Gamma_x$  es determinado a través de una relación de equilibrio local a lo largo de  $\Gamma_x$

$$\int_{\Gamma_x} [[\boldsymbol{\omega}_u]] \cdot (\boldsymbol{\sigma}_n - \mathbf{T}_{\Gamma}) ds = 0 \quad (4)$$

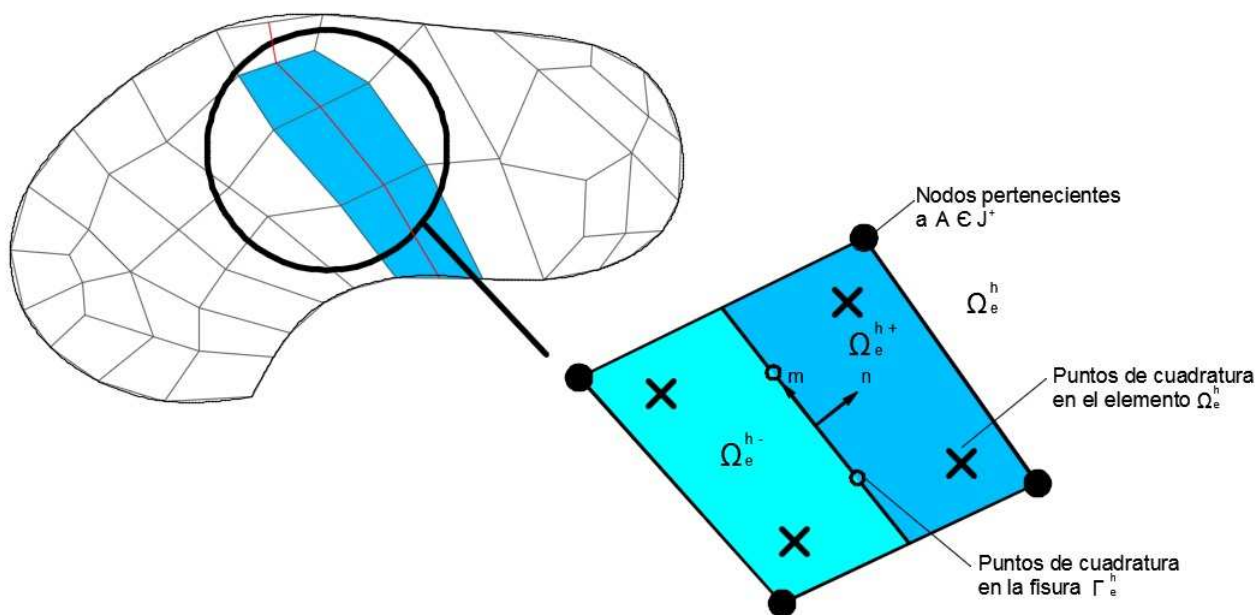


Figura 1: Malla de Elementos Finitos con la propagación de una discontinuidad a través de sus elementos. Esquema general del problema a resolver.

para todas las variaciones de  $[[\omega_u]]$  de los saltos  $[[u_u]]$  y para la fuerza traxtriz  $T_\Gamma$  definida por la mencionada ley cohesiva  $T_\Gamma([[u_u]])$ , es decir una ley de ablandamiento que introduce el mecanismo disipativo localizado para ser capturado (por ejemplo, una fisura).

**2.2. Aproximación mediante elementos finitos**

La característica más atractiva de la formulación descrita anteriormente es el tratamiento de modelos numéricos con discontinuidades fuertes, de carácter local. Esto se traduce directamente a la configuración numérica para la identificación de un entorno  $\Omega_x$  con un elemento finito  $\Omega_e^h$  (teniendo en cuenta la condición de consistencia con la existencia del limite  $h_e = A_{\Omega_e^h}/l_{\Gamma_e^h} \rightarrow 0$ ). Se considera que la discontinuidad se propaga a través de una malla general, definida por segmentos rectos  $\Gamma_e^h$  sobre cada elemento activo para problemas planos. Para una ilustración del caso, ver Figura (1). Para definir el método se considera un solo elemento de la malla que se encuentra atravesado por la discontinuidad, es por ello que se conoce la geometría local y la posición y forma de la fisura  $\Gamma_e^h$ .

Se comienza por considerar la interpolación local de los saltos de desplazamientos a lo largo del segmento  $\Gamma_e^h$  de la forma

$$[[u_u^h]](s) = J(s)\xi \tag{5}$$

para un conjunto de parámetros locales del elemento  $\xi = [\xi_{0n} \ \xi_{0m} \ \xi_{1n} \ \xi_{1m}]$  y asociado a funciones de interpolación  $J(s)$  definidas en términos de una coordenada local  $s$  en  $\Gamma_e^h$ . El principal aspecto de la formulación desarrollada en la sección previa para problemas continuos es el efecto de los saltos, descritos en ecuación (5) en las deformaciones en el volumen  $\Omega_e^h/\Gamma_e^h$  consideradas en la ecuación (3). En el entorno discreto (infinitesimal) de interés aquí, se tiene

$$\epsilon_u^h = \bar{B}d + G_{(c)}\xi \quad en \quad \Omega_e^h/\Gamma_e^h \tag{6}$$

para un operador enriquecedor de deformación  $G_{(c)}$  definido sobre el elemento  $\Omega_e^h$ , que establece la contribución de la discontinuidad a la cinemática discreta del elemento. Esta cinemática

es definida en la ecuación (6) en forma equivalente a la de los desplazamientos a gran escala  $\mathbf{u}^h = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d}$ , pero con un operador discreto general de deformación  $\overline{\mathbf{B}}$  para las deformaciones a gran escala  $\boldsymbol{\varepsilon}^h = \overline{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{d}$  para acomodarse al método general de elementos finitos considerando formulaciones de deformaciones, mixtas o deformaciones enriquecidas. En la configuración discreta, las ecuaciones que rigen son

$$\mathbf{R} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left( \int_{\Omega_e^h} \overline{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \right) = \mathbf{0} \quad (7)$$

$$\mathbf{r}_{enh}^e = - \int_{\Omega_e^h} \mathbf{G}_{(e)}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_e^h} \mathbf{J}^T \mathbf{T}_\Gamma d\Gamma = \mathbf{0} \quad (8)$$

donde la segunda ecuación se aplica únicamente y por separado a los elementos  $\Omega_e^h$  donde un segmento de discontinuidad  $\Gamma_e^h$  ha sido activado. La ecuación (7) es la equivalente discreta a la ecuación de equilibrio global (1), involucrando al operador de ensamblaje clásico  $\mathbf{A}$  sobre  $n_{elem}$ , para el problema dado. Del mismo modo, la implementación numérica actual introduce la notación vectorial clásica de Voigt, pero ninguna distinción explícita en la simbología es utilizada aquí. La ecuación (8) es la discretización de la ecuación de equilibrio local (4). Sin embargo, en contraste con esta última, el término de las tensiones ha sido definido con una integral sobre el elemento  $\Omega_e^h$  a través del operador de "equilibrio"  $\mathbf{G}_{(e)}$ , ya que las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  son naturalmente definidas allí. De hecho, son evaluadas en los puntos de cuadratura empleados en la evaluación de todas las integrales sobre el elemento  $\Omega_e^h$ . Idénticamente, la integral sobre el segmento de la discontinuidad  $\Gamma_e^h$  en la ecuación (8) involucra cantidades definidas naturalmente allí (por ejemplo, la fuerza traxtriz  $\mathbf{T}_\Gamma$  en términos del salto local  $[[\mathbf{u}_u^h]]$  y de las funciones de interpolación  $\mathbf{J}$ ), que a continuación son evaluadas a través de una regla de cuadratura local a lo largo de  $\Gamma_e^h$ . La implementación desarrollada aquí, considera una cuadratura clásica de Gauss para ambos. Ver Figura (1) para la ilustración de estas consideraciones. Comparando las ecuaciones (8) y (4), se observa que el operador de equilibrio  $\mathbf{G}_{(e)}$  puede ser interpretado como una proyección de las tensiones definidas en los puntos de cuadratura en  $\Omega_e^h$  a las tracciones en  $\Gamma_e^h$  para los diferentes componentes de las interpolaciones utilizadas  $\mathbf{J}$ . De esta manera se tiene

$$\int_{\Omega_e^h} \mathbf{G}_{(e)}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = - \int_{\Gamma_e^h} \mathbf{J}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} d\Gamma_e^h + l_{\Gamma_e^h} 0(h_e^{p+1}) \quad (9)$$

para  $h_e = A_{\Omega_e^h} / l_{\Gamma_e^h}$  y para  $p > 0$  (consistencia numérica).

Como en las funciones de interpolación local  $\mathbf{J}$ , intervienen también polinomios en las coordenadas locales  $s$ , se puede escribir para las diferentes componentes  $s^k$  ( $k = 0, 1$  en los elementos lineales considerados)

$$\mathbf{G}_{(e)k} \boldsymbol{\eta} = - \frac{1}{h_e} g_{e_k}(x, y) (\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\eta})^s \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n_{dim}} \quad \text{para } k = 0, 1 \quad (10)$$

para un conjunto de funciones lineales en un sistema local de coordenadas cartesianas  $\{x, y\}$  asociado al elemento de forma

$$g_{e_k} = a_k + b_k x + c_k y \quad (11)$$

para la determinación de las constantes

$$\begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix} = \mathbf{H}^{-1} \left( \frac{1}{l_{\Gamma_e^h}} \int_{\Gamma_e^h} \begin{bmatrix} s^k \\ s^k x \\ s^k y \end{bmatrix} d\Gamma \right) \quad (12)$$

Para los coeficientes  $k = 0, 1$ , considerando la matriz  $H$ :

$$H := \frac{1}{A_{\Omega_e^h}} \int_{\Omega_e^h} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{bmatrix} d\Omega \quad (13)$$

con  $A_{\Omega_e^h} = \int_{\Omega_e^h} d\Omega$  y  $l_{\Gamma_e^h} = \int_{\Gamma_e^h} d\Gamma$ . Las integrales en (12) y (13) son evaluadas con las mismas reglas de cuadratura descritas anteriormente. Sólo tienen que ser evaluadas una vez, luego que la geometría particular del elemento atravesado por el segmento de la discontinuidad  $\Gamma_e^h$  es conocida. Para completar la formulación de elementos finitos, queda por definir el operador de enriquecimiento de deformaciones  $G_{(c)}$  para las interpolaciones asumidas  $J$ , para los saltos de desplazamientos. Se desarrollan a continuación elementos enriquecidos con saltos lineales.

### 2.3. Elementos finitos enriquecidos con saltos lineales

Según se analizó en la sección anterior, los elementos finitos con discontinuidades embebidas pueden contener interpolaciones constantes de los saltos de los campos de desplazamientos. Esta opción sin embargo genera bloqueo de tensiones cuando se las combina con elementos cuadriláteros de alto orden, generando tensiones espurias en la fisura, inclusive si está completamente abierta. Para evitar estos inconvenientes, en este trabajo se procede a la utilización de interpolaciones lineales de los saltos, considerando

$$\widehat{\varepsilon}_u(\xi) = \overline{B} \widehat{d}(\xi) + G_{(c)} \xi \quad \forall \xi. \quad (14)$$

Siendo,  $G_{(c)}$  representa el operador de deformaciones enriquecidas. En la Figura (2) se observan los modos considerados para la formulación del operador. En particular, se consideran modos de separación para los saltos normales y tangenciales, denotados por la expresión  $\xi = [\xi_{0n} \ \xi_{0m} \ \xi_{1n} \ \xi_{1m}]$ , con el sistema de referencia local  $\{n, m\}$ , respectivamente. Todos los modos de separación excepto el último modo, deben ser acompañados de deformaciones en el volumen del elemento, con el afán de evitar el bloqueo de tensiones. El cuarto modo (modo d en Figura (2)) no se considera debido a que contiene una deformación axial equivalente a la deformación volumétrica.

Procediendo sistemáticamente en la ecuación (14) para los dos primeros modos de deformación se obtienen las siguientes expresiones

$$\widehat{d}_A^{0n}(\xi_0) = \begin{cases} \xi_{0n} n & \text{si } A \in J^+ \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (15)$$

$$\widehat{d}_A^{0m}(\xi_0) = \begin{cases} \xi_{0m} m & \text{si } A \in J^+ \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (16)$$

Siendo,  $J^+$  representa el conjunto de nodos que pertenecen al área positiva  $\Omega_e^{h+}$ , separados por la discontinuidad  $\Gamma_e^h$ . Cabe aclarar que para la presente formulación es indistinto considerar un área generada por la discontinuidad positiva. Considerando la expresión de la ecuación (14) combinada con las (15) y (16) y considerando  $\widehat{\xi}_u^{(0n)} = \widehat{\xi}_u^{(0m)} = 0$  se obtiene

$$G_{(c)}^{(0n)} = -\sum_{A \in J^+} \overline{B}^A n \quad (17)$$

$$G_{(c)}^{(0m)} = -\sum_{A \in J^+} \overline{B}^A m \quad (18)$$



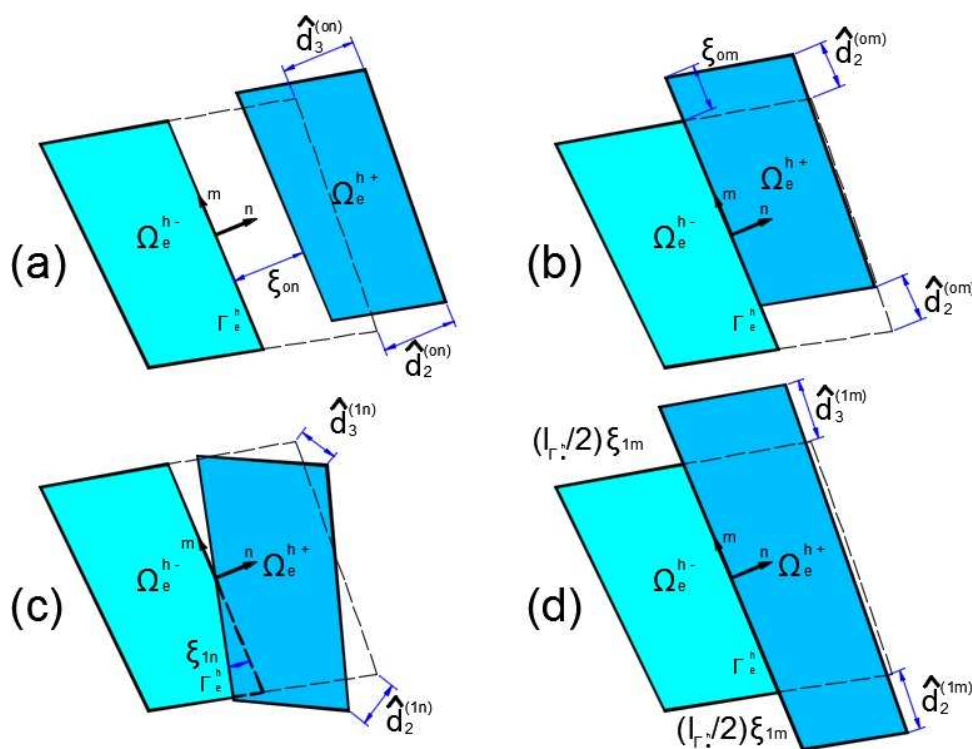


Figura 2: Modos de deformación usados en el diseño del operador de deformaciones enriquecidos  $G_{(c)}$ . (a) Modo de apertura normal. (b) Modo de apertura tangencial. (c) Modo de apertura lineal normal. (d) Modo de apertura lineal tangencial. En estos casos,  $J^+ = 2, 3$  para los nodos pertenecientes a  $\Omega_e^{h+}$ .

El modo de separación normal lineal se obtiene de manera similar. Considerando  $\hat{\xi}_u^{(1n)} = 0$  los desplazamientos nodales quedan

$$\hat{d}_A^{1n}(\xi_{1n}) = \begin{cases} \xi_{1n}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{m})^a \bar{x}_A & \text{si } A \in J^+ \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (19)$$

donde

$$(\mathbf{n} \otimes \mathbf{m})^a := \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \text{ considerando } \bar{x}_A = x_A - x_{\Gamma_e^h} \quad (20)$$

Siendo  $x_A$  las coordenadas de los nodos que pertenecen al área positiva y  $x_{\Gamma_e^h}$  las coordenadas medidas desde el centro de la discontinuidad en el elemento analizado. Bajo estas consideraciones se obtiene

$$G_{(c)}^{(1n)} = -\sum_{A \in J^+} \bar{B}^A (\mathbf{n} \otimes \mathbf{m})^a \bar{x}_A \quad (21)$$

Finalmente queda por determinar el cuarto modo de deformación, el cual va acompañado de una deformación volumétrica:

$$\hat{\epsilon}_\mu^{(1m)} = \xi_{1m}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) H_{\Gamma_e^h}, \quad (22)$$

y los desplazamientos nodales:

$$\hat{d}_A^{(1m)}(\xi_{1m}) = \begin{cases} \xi_{1m}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) \bar{x}_A & \text{si } A \in J^+ \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (23)$$

Considerando la función de Heaviside

$$H_{\Gamma_e^h}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_e^{h+} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (24)$$

el operador resulta

$$\mathbf{G}_{(c)}^{\langle 1m \rangle} = (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) H_{\Gamma_e^h} - \Sigma_{A \in J^+} \bar{\mathbf{B}}^A (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) \bar{x}_A \quad (25)$$

Siendo

$$\mathbf{G}_{(c)} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{(c)}^{\langle 0n \rangle} & \mathbf{G}_{(c)}^{\langle 0m \rangle} & \mathbf{G}_{(c)}^{\langle 1n \rangle} & \mathbf{G}_{(c)}^{\langle 1m \rangle} \end{bmatrix} \quad (26)$$

## 2.4. Resolución de EFEM

Una característica muy importante de EFEM es que fácilmente puede ser implementado mediante la modificación de un código de elementos finitos clásico. Debido a que las ecuaciones (7) y (8) se satisfacen a nivel elemento, es posible eliminar los parámetros enriquecedores  $\xi$ , resultando

$$\mathbf{K}_* \Delta \mathbf{d} = \mathbf{R}_* \quad (27)$$

para los incrementos  $\Delta \mathbf{d}$  de los desplazamientos nodales luego de la linealización utilizada en la solución iterativa de las ecuaciones (7) y (8). La matriz estáticamente condensada  $\mathbf{K}_*$  y el residuo condensado  $\mathbf{R}_*$  quedan definidos por las siguientes ecuaciones

$$\mathbf{K}^* = A_{e=1}^{n_{elem}} [\mathbf{K}_{dd}^e - \mathbf{K}_{d\xi}^e \mathbf{K}_{\xi\xi}^{e-1} \mathbf{K}_{\xi d}^e] \quad (28)$$

$$\mathbf{R}^* = A_{e=1}^{n_{elem}} [\mathbf{R}^e - \mathbf{K}_{d\xi}^e \mathbf{K}_{\xi\xi}^{e-1} \mathbf{r}_{en}^e] \quad (29)$$

mientras que las matrices condensadas son:

$$\mathbf{K}_{dd}^e = \int_{\Omega_e^h} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbb{C} \bar{\mathbf{B}} d\Omega \quad (30)$$

$$\mathbf{K}_{d\xi}^e = \int_{\Omega_e^h} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbb{C} \mathbf{G}_{(c)} d\Omega \quad (31)$$

$$\mathbf{K}_{\xi d}^e = \int_{\Omega_e^h} \mathbf{G}_{(e)}^T \mathbb{C} \bar{\mathbf{B}} d\Omega \quad (32)$$

$$\mathbf{K}_{\xi\xi}^e = \int_{\Omega_e^h} \mathbf{G}_{(e)}^T \mathbb{C} \mathbf{G}_{(c)} d\Omega + \int_{\Gamma_e^h} \mathbf{J}^T \bar{\mathbb{C}}_{\Gamma} \mathbf{J} d\Gamma \quad (33)$$

siendo  $\mathbb{C}$  y  $\bar{\mathbb{C}}_{\Gamma}$  los módulos volumétrico y tangente respectivamente.

Todos los aspectos teóricos desarrollados hasta aquí, corresponden a una formulación clásica de EFEM según los lineamientos de [Armero \(1999, 2001\)](#); [Armero y Garikipati \(1995, 1996\)](#). Se consideran elementos finitos con interpolaciones lineales para los saltos del campo de desplazamientos sobre la discontinuidad. Haciendo base de esta tecnología de elementos se procede al desarrollo de modelos constitutivos para ser aplicados tanto en el volumen del sólido como así también a lo largo de la discontinuidad de los elementos utilizados. Hasta aquí se ha considerado la ubicación de la discontinuidad conocida de antemano, sin embargo durante la implementación numérica se debe ir determinando paso a paso la posición de la misma y los elementos de la malla que ésta afecta.



### 3. SEGUIMIENTO DE LA TRAYECTORIA DE LA DISCONTINUIDAD

Para simplificar el análisis, se desarrolla una formulación para el caso bidimensional, que puede ser extendida al espacio tridimensional. Se considera un cuerpo,  $\Omega$ , que experimenta una fisura. Se denota el camino de la fisura como  $S_i \in \{1, \dots, n_d\}$ , donde  $n_d$  es el número de tramos que componen la discontinuidad. Un algoritmo apto para el seguimiento de la discontinuidad provee una *condición para la propagación de la fisura* y una *dirección de propagación*. Se debe entender por una *condición de propagación* a un criterio de falla dentro del elemento, por ejemplo Rankine, Guest, etc., mientras que la *dirección de propagación* es un vector normal a la discontinuidad, perpendicular a la dirección de máxima tensión de tracción. Existen básicamente dos enfoques para el análisis del problema por un lado un enfoque local en el cual se analiza a nivel elemento: si el mismo falla según algún criterio seleccionado, se determina el vector  $\mathbf{n}$  normal a la fisura y en el paso siguiente se analizan los elementos vecinos al que falló previamente y se determinan los elementos que fallan sucesivamente, como así también la posición de la discontinuidad. De esa manera se logra un patrón de discontinuidad que no es continuo entre los elementos, sin embargo resulta una buena aproximación si el tamaño de los elementos es adecuado. Ver Figura (3). El segundo enfoque, adoptado en este trabajo corresponde a un enfoque global, basado en la resolución de un problema análogo al térmico (Oliver et al., 2002) (Oliver et al., 2004). La idea principal de esta metodología es la determinación de una función escalar  $\theta(x) = \bar{\theta}$  que defina todos los posibles caminos de la discontinuidad en el elemento. Tal campo escalar se construye en base a la evaluación de la derivada direccional del campo  $\theta(x)$  en la dirección del vector unitario  $\mathbf{n}$ . La variable escalar  $\theta(x)$  satisface la ecuación diferencial:

$$\nabla\theta \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (34)$$

considerando la propiedad de ortogonalidad del vector  $\mathbf{n}$ , se arriba a la formulación fuerte del problema "térmico" de la siguiente manera

$$\nabla \cdot \mathbf{k}_\theta \nabla\theta = 0 \quad (35)$$

bajo la consideración del tensor de *conductividad térmica*

$$\mathbf{k}_\theta = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (36)$$

para  $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , siendo  $\mathbf{I}$  corresponde a un tensor identidad de segundo orden. La ecuación (35) puede ser resuelta aplicando el método de elementos finitos, obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{K}_\theta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad (37)$$

siendo

$$\mathbf{K}_\theta = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e^h} \mathbf{B}^T \mathbf{K}_\theta \mathbf{B} dV \quad (38)$$

en las ecuaciones anteriores  $\boldsymbol{\theta}$  corresponde a temperaturas nodales y  $\mathbf{A}$  a un operador de ensamblaje para el dominio discretizado del problema mecánico original. Adicionalmente, el operador  $\mathbf{B}$  puede ser obtenido a través del gradiente simétrico de las funciones de forma  $\mathbf{N}$ , usadas en la interpolación del campo de desplazamientos del problema. La matriz de conductividad térmica

$\mathbf{k}_\theta$  no es inversible por definición. Para evitar este problema el tensor debe ser modificado de la siguiente manera:

$$\mathbf{k}_\zeta = (1 + \zeta)\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (39)$$

donde  $\zeta$  es una pequeña perturbación a la expresión original. Con fines prácticos se utiliza un valor de  $\zeta = 10^{-6}$ . Cabe aclarar que para evitar condiciones de inestabilidad de la solución o una solución nula del sistema lineal de la ecuación (37) es necesario aplicar condiciones de borde. Es necesario imponerlas como mínimo en dos puntos, los cuales no deben pertenecer a una línea *isotérmica*. Finalmente se debe ubicar la posición específica de los segmentos que componen la discontinuidad  $\Gamma_e^h$ , basada en las temperaturas nodales  $\theta$  obtenidas como solución del sistema lineal de la ecuación (37). Para esto, se comprueba si la discontinuidad en los elementos vecinos es atravesada por la discontinuidad existente a través de la condición

$$\min(\theta_A) \leq \bar{\theta} \leq \max(\theta_A) \quad \forall A \in \{1, \dots, n_{node}\} \quad (40)$$

para una dada temperatura nodal  $\theta_A$  dada.  $n_{node}$  son los nodos asociados al elemento subyacente. Este proceso se debe realizar en cada escalón de carga en simultáneo con la resolución del método EFEM, pues es necesario en cada paso iterativo conocer la posición de la discontinuidad. Ver Figura (4).

En resumen, el algoritmo propuesto de esta manera no sólo minimiza el costo computacional, sino también evita los problemas topológicos asociados a la geometría de la superficie, es decir, la continuidad a través de los bordes de los elementos que son interceptados por la trayectoria de la fisura.

También debe destacarse que este procedimiento se lleva a cabo puramente a nivel elemento, sin modificar la estructura del problema mecánico original, siendo fácilmente implementado como un módulo adicional en un algoritmo de elementos finitos convencional.

Este método permite el análisis de elementos estructurales que presenten múltiples fisuras, pero no es aplicable al caso de múltiples fisuras dentro de un mismo elemento.

## 4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

El modelo descrito ha sido implementado en un programa de elementos finitos con el que se resolvieron los ejemplos que se presentan a continuación.

### 4.1. Tracción Uniaxial

En primer lugar se somete a un elemento a un estado de tracción uniaxial. Esta prueba tiene la finalidad de verificar la consistencia numérica del método. Para ello se considera un cubo de 20 cm de lado sometido a tracción uniaxial, ver Figura (5). Se asume un comportamiento de tipo elástico-frágil para la respuesta constitutiva volumétrica, con un módulo de Young  $E = 30000 \text{ MPa}$  y un módulo de Poisson  $\nu = 0,2$ . La condición de inicialización de la fisura es a través del criterio de falla de Rankine, siendo la tensión de tracción máxima  $f_t = 3 \text{ MPa}$ . La ley cohesiva adoptada para la fisura satisface es la siguiente expresión (ver Figura 6)

$$t_\Gamma^n = \max(0, f_t + S_n \|u_u^n\|) \quad (41)$$

donde  $S_n = -45 \text{ MPa/mm}$ . En la Figura (5) se observa adicionalmente la posición del plano de la falla determinado mediante la resolución de la ecuación (37). En la Figura (7) se representa el resultado de la simulación que concuerda con los resultados analíticos presentados en Armero (1999, 2001). Se observa la coincidencia de la solución en ambos procedimientos, quedando verificada la consistencia numérica de la formulación desarrollada.

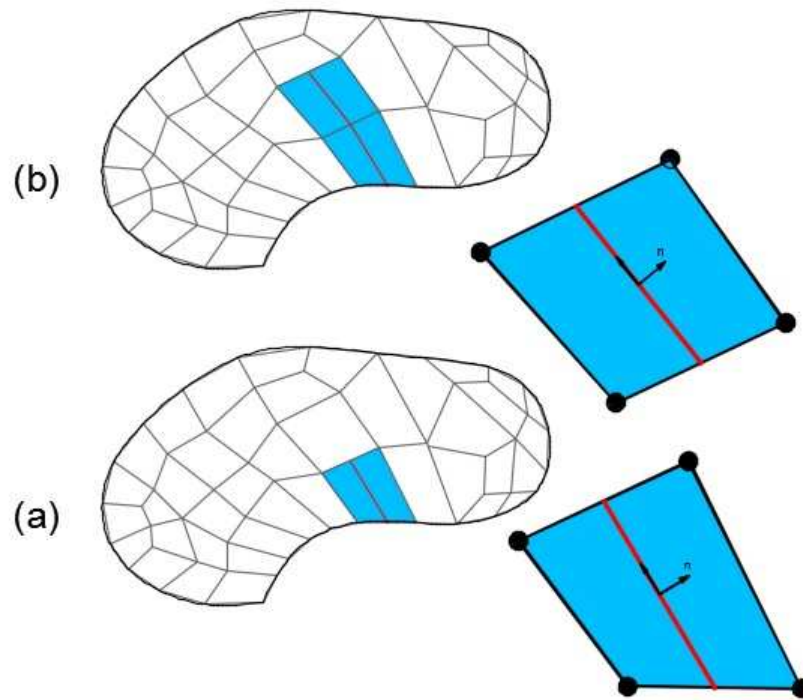


Figura 3: Trayectoria de la discontinuidad. (a) Falla de un elemento. (b) Seguimiento de la discontinuidad.

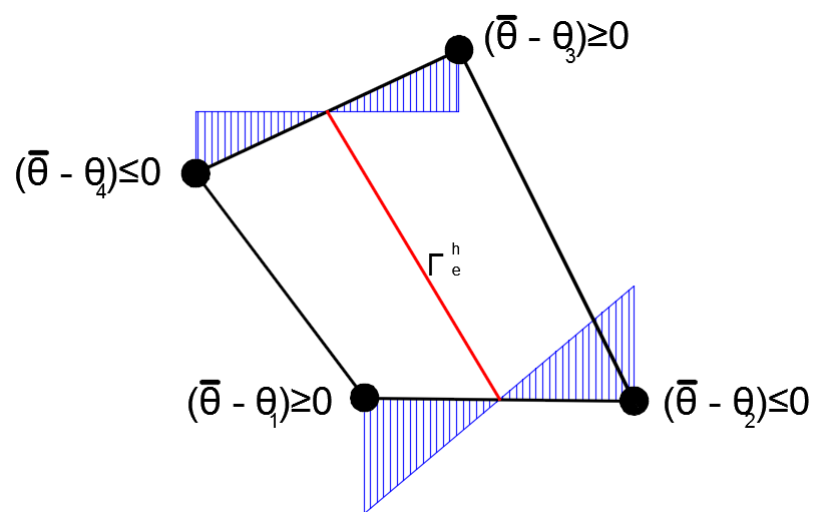


Figura 4: Determinación de la posición de la discontinuidad dentro del elemento en análisis.

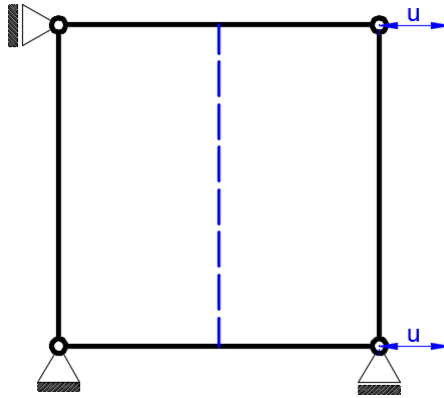


Figura 5: Esquema del elemento ensayado. Con línea de trazo azul se representa el plano de falla del elemento.

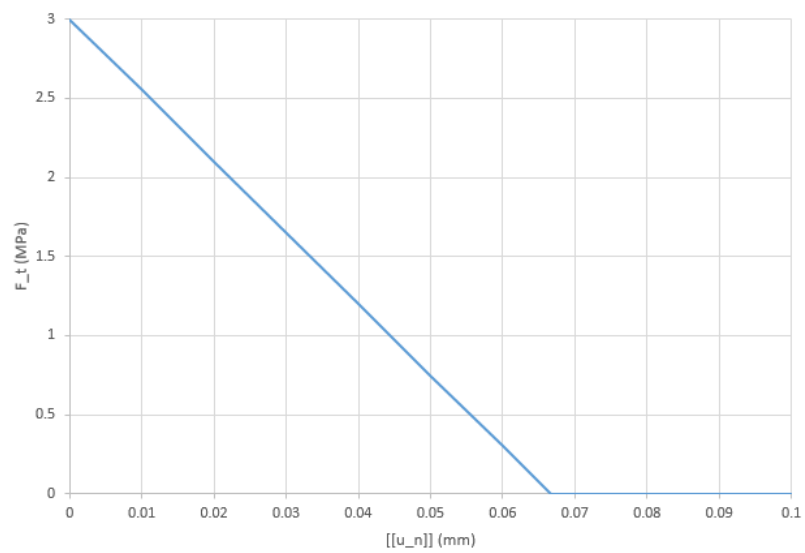


Figura 6: Ley cohesiva de apertura normal de la fisura.

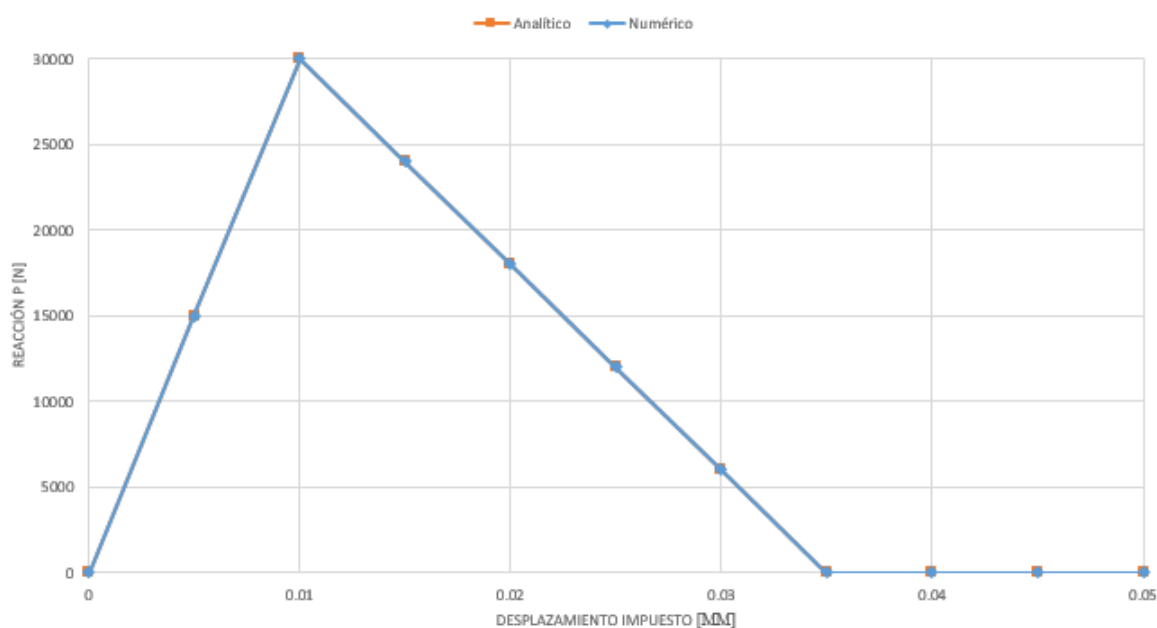


Figura 7: Resultados analíticos y numéricos del ensayo de tracción uniaxial.

#### 4.2. Viga entallada sometida a flexión

En esta sección se considera, el problema de flexión de vigas entalladas de hormigón, como un ejemplo clásico de rotura en modo I de fractura. Especialmente se toman como referencia el trabajo experimental realizado por [Pettersson \(1981\)](#). El objetivo de la simulación de este ensayo experimental es verificar el rendimiento de los elementos finitos enriquecidos en la resolución de la discontinuidad. Para ello se considera una viga de  $2m$  de largo, cuya sección es de  $5\text{ cm} \times 20\text{ cm}$ , con una entalla de  $100\text{ mm}$  de altura y espesor de  $20\text{ mm}$ , como se observa en la Figura (8). Los valores de las propiedades del material son los adoptados del trabajo citado. Se considera una respuesta elástico-frágil con un módulo de Young  $E = 30000\text{ MPa}$  y un módulo de Poisson  $\nu = 0,2$ . Como criterio de falla, se adopta el de Rankine. Para modelar la fractura se adopta una ley cohesiva potencial para la apertura normal (ver Figura 9) de acuerdo a las ecuaciones (42) y (43), con el valor de resistencia a la tracción  $f_t = 3,33\text{ MPa}$  y los parámetros  $k = 0,5$ ,  $\delta_a = 0,015$  y  $\delta_0 = 0,16\text{ mm}$ , correspondientes a una energía de fractura  $G_f = 0,124\text{ N/mm}$ , resultando

$$t_{\Gamma}^n = f_t \left( 1 - \left( \frac{\delta_0}{\delta_a} \right)^k \frac{[[u_u^n]]}{\delta_a} \right) \quad \text{para } [[u_u^n]] < \delta_a \quad (42)$$

$$t_{\Gamma}^n = \frac{f_t}{1 - (\delta_a/\delta_0)^k} \left( 1 - \left( \frac{[[u_u^n]]}{\delta_0} \right)^k \right) \quad \text{para } [[u_u^n]] > \delta_a \quad (43)$$

La apertura de fisura tangencial responde a la ley cohesiva de la ecuación (41), con una rigidez  $k_m = 30\text{ MPa/mm}$ . Se impone un control de desplazamiento en el centro de la viga con una flecha máxima  $u = 0,8\text{ mm}$  con incrementos cada  $0,01\text{ mm}$ .

En la Figura (10) se muestra el esquema de la malla de elementos finitos utilizada, con elementos cuadriláteros de 4 nodos, y con elementos mayor densidad de elementos de menor tamaño sobre la entalla.

En la Figura (11) se muestran los resultados numéricos contrastados con los experimentales provistos por [Pettersson \(1981\)](#). Puede observarse el buen ajuste de los resultados de la formula-

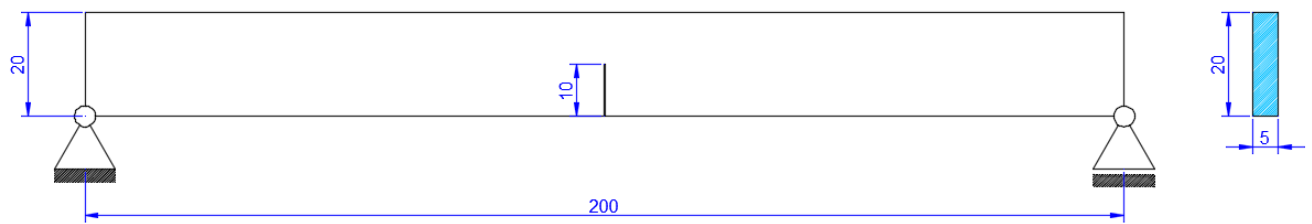


Figura 8: Esquema de la viga sometida a flexión. Dimensiones en centímetros.

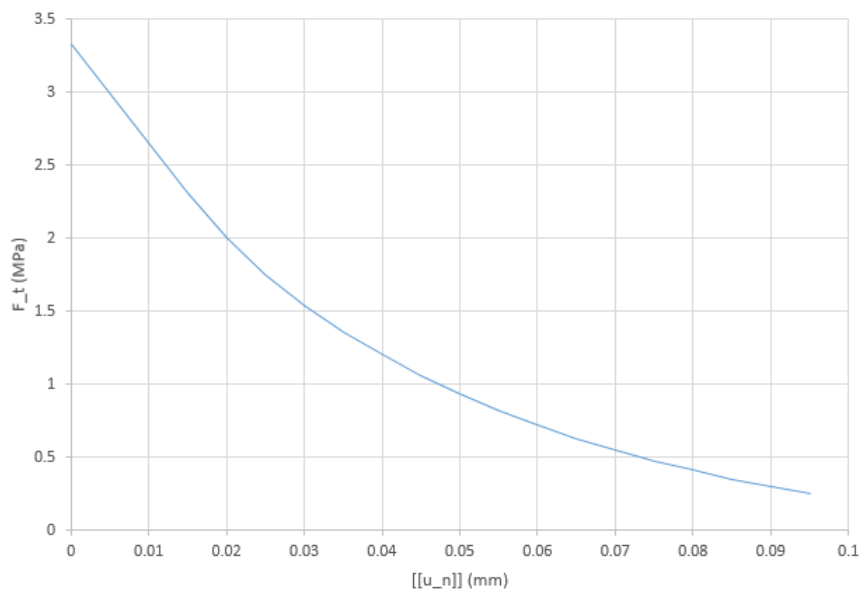


Figura 9: Ley cohesiva de apertura normal de la fisura.

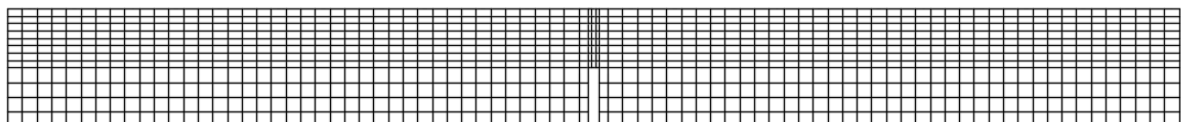


Figura 10: Esquema de la malla utilizada correspondiente al ensayo de flexión para la simulación. Con un total de 984 elementos.



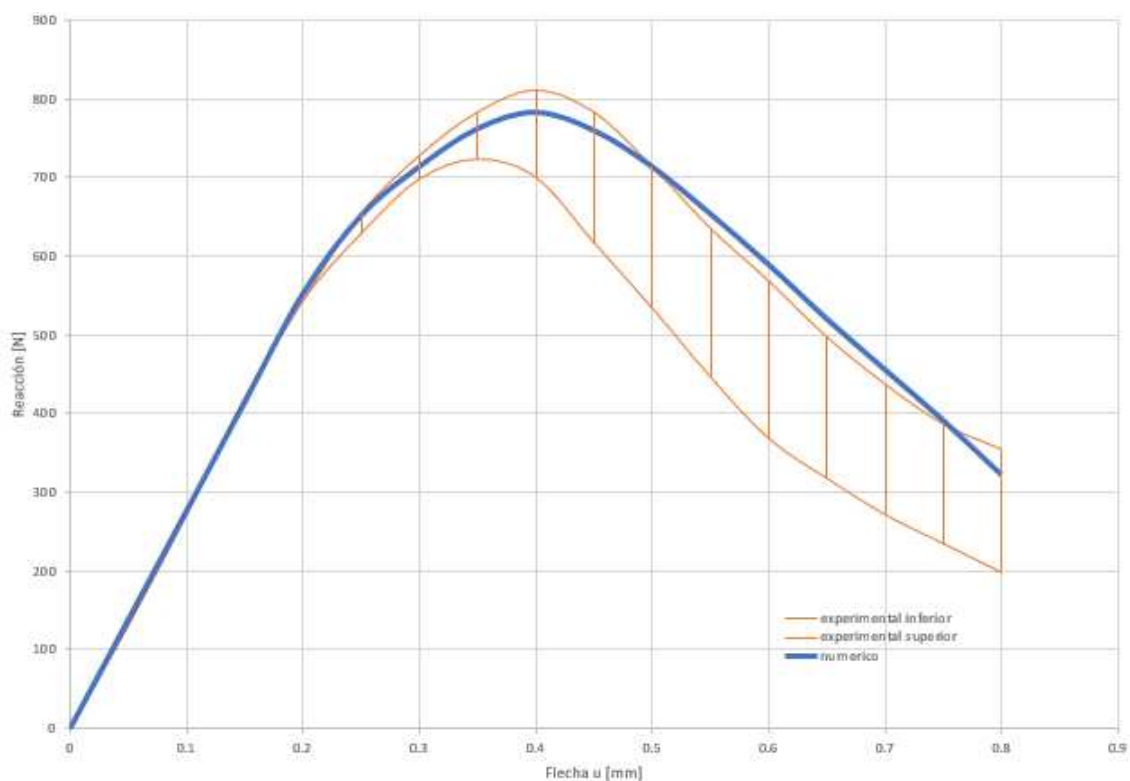


Figura 11: Resultado de la simulación del ensayo de flexión.

ción propuesta a la solución experimental en los regímenes de endurecimiento y ablandamiento así como también en el valor de la reacción máxima.

## 5. CONCLUSIONES

La falla de materiales en forma de fisuras o bandas de corte son el ejemplo típico para el modelado con la técnica EFEM. Este método ha sido abordado en este trabajo con un concepto multiescala: el problema de valores de borde a escala global, resuelto mediante la técnica de elementos finitos clásica y la respuesta local de las deformaciones descrita en la pequeña escala. De este modo, únicamente las variables globales permanecen en las ecuaciones algebraicas que describen el campo de deformaciones discontinuo a nivel elemento. La formulación propuesta puede ser implementada realizando ligeras modificaciones a un código de elementos finitos clásico. En este trabajo se presentan ejemplos de aplicación para la técnica de EFEM para resolver problemas en los que se generan fuertes discontinuidades en el campo de desplazamientos. Los ejemplos desarrollados demuestran las ventajas de esta formulación para la simulación de elementos que presentan una rotura frágil, tales como el hormigón o materiales cerámicos. El método EFEM, en conjunto con el tratamiento de la trayectoria de la fisura mediante la analogía del problema térmico, genera una herramienta muy eficaz y robusta para el estudio de la propagación y localización de las fisuras en elementos estructurales.

## REFERENCIAS

- Alfaite J., Simone A., y Sluys L. *International Journal of Solids and Structures*, (40):5799–5817, 2003.
- Armero F. *Mechanics of Cohesive - Frictional Materials*, 4:101 – 131, 1999.

- Armero F. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:181 – 213, 2001.
- Armero F. y Garikipati K. Recent advances in the analysis and numerical simulation of strain localization in inelastic solids. In: *Proceedings of the 4 Computational Plasticity Conference*, 1995.
- Armero F. y Garikipati K. *International Journal of Solids and Structures*, 33:2863–2885, 1996.
- Bolson G. *Computational Mechanics*, (27):463–473, 2001.
- Callari C. y Armero F. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:4371–4400, 2002.
- Ehrlich D. y Armero F. *Computational Mechanics*, (35):237–264, 2005.
- Ehrlich D. y Armero F. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (195):1283–1324, 2006.
- Larsson R., Steinmann P., y Runesson K. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, (4):171–194, 1998.
- Manzoli O. y Shing P. *Computer and Structures*, (84):742–757, 2006.
- Mosler J. y Meschke G. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (57):1553–1576, 2003.
- Oliver J. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (57):1553–1576, 2003.
- Oliver J., Huespe A., Samaniego E., y Chaves E. *On strategies for tracking strong discontinuities in computational failure mechanics*. 2002.
- Oliver J., Huespe A., Samaniego E., y Chaves E. *Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete.*, volumen 28. 2004.
- Petersson P. *Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials. Report No. TVBM-1006, Division of Building Materials, University of Lund, Lund, Sweden*. 1981.
- Steinmann P. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, (4):133–152, 1999.