Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXXIV, págs. 1869-1890 (artículo completo)
Sebastián Giusti, Martín Pucheta y Mario Storti (Eds.)
Córdoba, 8-11 Noviembre 2016

UM ESTUDO SOBRE A INFLUÊNCIA DOS FATORES DE RELAXAÇÃO NA CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS INCOMPRESSÍVEIS

Maicon W. N. Odone[a], **Elson M. Toledo**[a,b] **e Luis Paulo S. Barra**[a]

[a]*Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil, http://www.ufjf.br/pgmc*

[b]*Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC), Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil http://www.lncc.br/*

Palavras Chave: Escoamentos incompressíveis, Volumes finitos, Fatores de relaxação

Resumo. Muitos problemas em dinâmica dos fluidos são formulados em termos de equações de movimento que, além da não linearidade, apresentam acoplamento entre o campo de pressões e o campo de velocidades. Os problemas se tornam ainda mais complexos no caso de escoamentos incompressíveis, onde não existe equação relacionando diretamente a pressão como variável primaria. Na solução numérica desses tipos de problemas, utilizando o método dos volumes finitos, a não linearidade e o acoplamento pressão-velocidade frequentemente são tratados por meio de algoritmos iterativos como o SIMPLE e suas variações. Esses algoritmos são suscetíveis à problemas de convergência se fatores de relaxação não forem empregados durante o ciclo iterativo. A escolha de fatores de relaxação, por si, pode representar um desafio pois dependem do tipo de problema a ser resolvido, influenciando a taxa de convergência. Além disto a utilização de valores fixos pode não ser adequada para todas as iterações e passos de tempo, sendo necessário variá-los ao longo do processo iterativo. Neste trabalho apresenta-se um estudo sobre o controle dos fatores de relaxação para o algoritmo iterativo SIMPLE visando a redução do número de iterações e a consequente redução do tempo de execução dos processos computacionais. Um método de controle dos fatores de relaxação para as equações de movimento é apresentado e implementado para os problemas de convecção natural e circulação em uma cavidade fechada e de circulação com fluxos de entrada e saída. O método proposto apresentou resultados satisfatórios para os problemas estudados neste trabalho.

1 INTRODUÇÃO

Muitos problemas encontrados em aplicações industriais, metalúrgicas e de engenharia consistem em modelos baseados nas equações da termodinâmica e nas equações de transporte para escoamento de fluidos (equações de conservação da quantidade de movimento linear acrescidas da equação da continuidade). Este último conjunto de equações apresenta duas principais dificuldades: a não-linearidade e a presença do termo do gradiente de pressão (Versteeg e Malalasekera, 2007). No caso de escoamentos compressíveis a equação de conservação da massa pode ser usada como uma equação de transporte para a densidade e o campo de pressões pode ser obtido através da densidade e da equação da energia por meio de uma equação de estado (Versteeg e Malalasekera, 2007). Já para escoamentos incompressíveis, ou seja, onde a densidade é constante, o problema se torna mais complexo pois neste caso a pressão não está relacionada com a densidade e não existe equação envolvendo diretamente a pressão como variável primária (Moukalled et al., 2016). Nestes casos, a equação da continuidade impõe uma restrição às equações de Navier-Stokes tal que, se o campo de pressões correto for empregado às mesmas, então o campo de velocidades obtido com sua solução irá satisfazer a equação da continuidade (Ferziger e Peric, 2012; Versteeg e Malalasekera, 2007).

Na solução numérica das equações de Navier-Stokes acrescidas da equação da continuidade frequentemente são adotados algoritmos segregados, onde cada equação é resolvida separadamente e iterativamente (Morii e Vierow, 2000; Min e Tao, 2007; Chatwani e Turan, 1991), e ambos os problemas relacionados à não-linearidade e o acoplamento pressão-velocidade são tratados. No contexto dos algoritmos iterativos para a solução desses problemas pode-se destacar o algoritmo SIMPLE, acrônimo de Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations (Patankar, 1980) e suas variações como o SIMPLEC (SIMPLE Consistent - Doormaal e Raithby (1984)), SIMPLER (SIMPLE Revised - Patankar (1981)), PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators - Issa (1986)) dentre outros.

Embora algoritmos como o SIMPLE e suas variações lidem bem com os problemas associados a não-linearidade e o acoplamento pressão-velocidade, eles apresentam características de convergência lenta, necessitando empregar fatores de relaxação para evitar o surgimento de oscilações e instabilidades numéricas (Morii e Vierow, 2000; Marek e Straub, 1993). Estudos tem mostrado que o emprego de fatores de relaxação tende a diminuir ainda mais a velocidade de convergência do algoritmo devido a seu efeito de amortecimento ao longo das iterações (Marek e Straub, 1993). Assim, a escolha de fatores de relaxação adequados, de modo a acelerar e permitir a convergência e estabilidade deste algoritmo é uma questão em aberto, de suma importância e um desafio, uma vez que dependem dos problemas a serem resolvidos e o emprego de valores fixos pode não ser adequado para todas as iterações (Versteeg e Malalasekera, 2007).

No presente trabalho um método para automatizar o cálculo dos fatores de relaxação para as equações de movimento no algoritmo SIMPLE é apresentado. A ideia é que um novo valor para o fator de relaxação seja calculado após um dado número de iterações e que esse processo de automatização permita reduzir o número de iterações e o tempo total de execução deste processo em comparação com o emprego de fatores de relaxação fixos. O método, baseado em Min e Tao (2007) é apresentado e empregado em uma implementação do método dos volumes finitos (MVF) com alocação deslocada das variáveis para os problemas de convecção natural e circulação em uma cavidade fechada e de circulação com fluxos de entrada e saída.

2 EQUAÇÕES GOVERNANTES E ALGORITMO SIMPLE

2.1 Equações do movimento e da energia

Para os problemas abordados neste trabalho, serão considerados escoamentos de fluidos newtonianos incompressíveis em regiões bidimensionais e em regime permanente (estacionário). Estes escoamentos podem ser modelados pelas equações de conservação da quantidade de movimento linear (equações de movimento) com as componentes da velocidade restritas à equação da continuidade (ou equação de conservação da massa) que podem ser escritas como (Odone et al., 2013, 2015)

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V} u) - \nabla \cdot (\mu \nabla u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + S_u \tag{1}$$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V} v) - \nabla \cdot (\mu \nabla v) = -\frac{\partial p}{\partial y} + S_v \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \tag{3}$$

onde u e v são as componentes do vetor velocidade $\vec{V}$, ρ é a densidade, μ a viscosidade, p a pressão e S_u e S_v representam termos fonte.

Em problemas termodinâmicos, que envolvem variação de temperatura além do escoamento, é necessário o emprego da equação de conservação da energia que pode ser escrita como:

$$\nabla \cdot (\rho c \vec{V} T) - \nabla \cdot (k \nabla T) = S_T \tag{4}$$

onde T é a temperatura, c é o calor específico, k a condutividade térmica e S_T representa termos fonte. Modificações na equação (4), como escrevê-la em função da entalpia ou adição de termos fonte adequados pode ser necessário dependendo do modelo estudado.

2.2 Discretização

A solução do sistema de Equações (1) a (4) requer sua discretização por algum método. Neste trabalho emprega-se o MVF que consiste na integração de cada uma das equações em volumes de controle como ilustrado na Figura 1.

Alocação deslocada (staggered) das variáveis é empregada (Versteeg e Malalasekera, 2007; Moukalled et al., 2016). Assim, as equações de movimento bem como a equação da continuidade são integradas nos volumes de controle em torno de pontos como e e n para as componentes da velocidade u e v, respectivamente. Variáveis escalares, como a temperatura e a pressão são alocadas em pontos como P e a equação da energia é integrada nos volumes de controle ao redor de pontos como P. Aproximação dos termos difusivos são feitas usando esquema de diferenças centrais enquanto que os termos convectivos são aproximados por esquemas como *upwind* ou híbrido (Patankar, 1980; Versteeg e Malalasekera, 2007).

Assim, fazendo-se o processo de integração das equações (1), (2) e (4) nos seus correspondentes volumes de controle, aproximando-se os fluxos difusivos e convectivos através das faces dos volumes, agrupando e reordenando os termos pode-se escrever as seguintes equações discretas para as equações do movimento e da energia, respectivamente:

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_P - p_E) A_e + b_e \tag{5}$$

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_P - p_N) A_n + b_n \tag{6}$$

$$a_T T_P = \sum a_{nb} T_{nb} + a_P^0 T_P^0 + b_P \tag{7}$$

onde cada a_i são os coeficientes contendo combinações da discretização dos termos difusivo e convectivo, $(p_P - p_E)A_e$ e $(p_P - p_N)A_n$ representa a integração do gradiente de pressão em cada uma das equações do movimento e cada somatório se dá sobre cada um dos pontos vizinhos para cada respectiva variável (Odone et al., 2013, 2015).

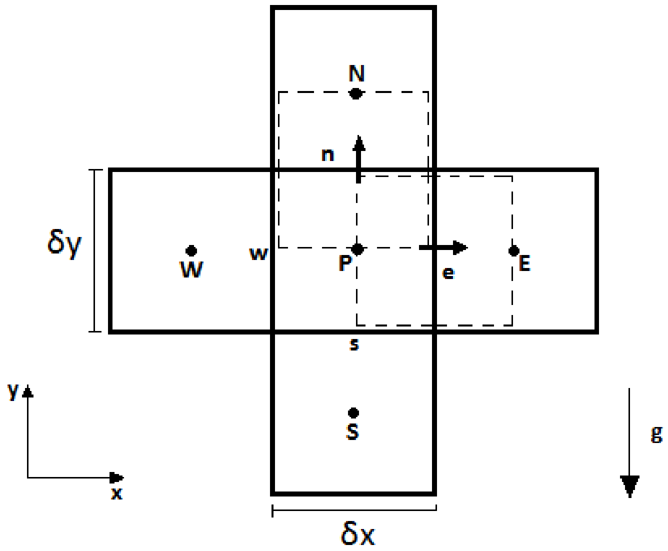

Figura 1: Volume de controle para o método dos volumes finitos

2.3 Algoritmo SIMPLE

O algoritmo SIMPLE é a base para uma série de algoritmos similares com o propósito de resolver iterativamente um problema de escoamento incompressível. No que segue, apresenta-se a formulação do algoritmo SIMPLE para o regime permanente.

Arbitrando-se um valor p^* para o campo de pressões e admitindo que os fluxos de massa $F_x = \rho u$ e $F_y = \rho v$ através das faces dos VC tenham sido calculados a partir de uma estimativa para o campo de velocidades (Versteeg e Malalasekera, 2007), as componentes intermediárias u^* e v^* da velocidade podem ser obtidas resolvendo as equações discretas do movimento, tais que:

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (p_P^* - p_E^*)A_e + b_e \tag{8}$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (p_P^* - p_N^*)A_n + b_n \tag{9}$$

Definindo-se a correção para a pressão, p', como a diferença entre o valor correto da pressão p e do valor estimado p^*, e definindo-se correções análogas para as componentes da velocidade, pode-se escrever:

$$p = p^* + p', \qquad u = u^* + u', \qquad \text{e} \qquad v = v^* + v'. \tag{10}$$

A substituição do campo de pressões correto nas equações (5) e (6) levam ao cálculo das componentes u e v corretas dadas por:

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_P - p_E)A_e + b_e \tag{11}$$

e

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_P - p_N) A_n + b_n \tag{12}$$

Subtraindo a equação (11) da equação (8) e subtraindo a equação (12) da equação (9) fornece:

$$a_e u'_e = \sum a_{nb} u'_{nb} + (p'_P - p'_E) A_e \tag{13}$$

e

$$a_n v'_n = \sum a_{nb} v'_{nb} + (p'_P - p'_N) A_n \tag{14}$$

Neste momento, a principal aproximação do algoritmo SIMPLE é realizada e consiste em desprezar os termos sob os somatórios, permitindo escrever:

$$u'_e = d_e (p'_P - p'_E) \tag{15}$$

e

$$v'_n = d_n (p'_P - p'_N) \tag{16}$$

onde $d_e = A_e/a_e$ e $d_n = A_n/a_n$. As equações (15) e (16) definem as expressões de correção para as componentes da velocidade que, empregadas na equação (10), fornece

$$u_e = u^*_e + d_e (p'_P - p'_E), \qquad \text{e} \qquad v_n = v^*_n + d_n (p'_P - p'_N) \tag{17}$$

No tratamento de escoamentos incompressíveis, a solução das equações de movimento ficam restritas à equação da continuidade (3). Integrando-se a equação da continuidade em um VC em torno do ponto P (Figura 1) e substituindo as componentes da velocidade pelas expressões dadas na equação (17), permite escrever:

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b'_P \tag{18}$$

com os coeficientes dados por

$$\begin{aligned} a_E &= (\rho d A)_e \\ a_W &= (\rho d A)_w \\ a_N &= (\rho d A)_n \\ a_S &= (\rho d A)_s \\ a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S \\ b'_P &= (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e + (\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n \end{aligned} \tag{19}$$

A Equação (19) é a discretização da equação da continuidade escrita como uma equação para a correção da pressão p'. A solução desta equação fornece correções para a pressão em todos os pontos e são empregadas para atualizar tanto as pressões quanto as componentes da velocidade por meio das expressões (10) e (17).

Estas etapas fornecem todos os elementos para a formulação do algoritmo SIMPLE, cujas principais etapas são descritas a seguir.

- Repita até a convergência:

  1 - Resolva as equações de movimento discretas, obtendo u^* e v^*:

$$\begin{aligned} a_e u^*_e &= \sum a_{nb} u^*_{nb} + (p^*_P - p^*_E) A_e + b_e \\ a_n v^*_n &= \sum a_{nb} v_{nb^*} + (p^*_P - p^*_N) A_n + b_n \end{aligned}$$

2 - Resolva a equação de correção da pressão, obtendo p':

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b'_P$$

3 - Corrija as pressões e velocidades, obtendo u, v e p:

$$p = p^* + p' \qquad u_e = u_e^* + d_e(p'_P - p'_E) \qquad v_n = v_n^* + d_n(p'_P - p'_N)$$

4 - Resolva outras equações discretas, obtendo ϕ:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b_\phi$$

5 - Defina as estimativas para a próxima iteração:

$$p^* = p \qquad u^* = u \qquad v^* = v$$

No passo 4, ϕ representa qualquer outra variável escalar como, por exemplo, a temperatura (Odone et al., 2013, 2015; Versteeg e Malalasekera, 2007).

3 MÉTODO DE VARIAÇÃO DO FATOR DE RELAXAÇÃO

O algoritmo SIMPLE tal como apresentado na seção anterior é suscetível à divergência devido as não-linearidades e o acoplamento do campo de pressões e velocidade com a equação da continuidade. Assim, fatores de relaxação devem ser empregados para garantir a estabilidade e convergência do algoritmo.

3.1 Introdução dos fatores de relaxação

Fatores de relaxação são frequentemente adotados tanto para a correção da pressão quanto para o cálculo das componentes da velocidade. Usualmente, um mesmo valor é usado para os fatores de relaxação de ambas as componentes u e v da velocidade. Representando o fator de relaxação da pressão por α_p e das componentes da velocidade por α_v, de acordo com Moukalled et al. (2016) e Min e Tao (2007) seus valores podem ser tais que

$$\alpha_v + \alpha_p = 1 \tag{20}$$

O fator de relaxação para a pressão pode ser introduzido diretamente na expressão de correção da pressão dada em (10), reescrevendo como:

$$p = p^* + \alpha_p p' \tag{21}$$

Se uma dada estimativa para o campo de pressões p^* é muito distante da solução final p então as correções p' podem ser muito grandes para garantir estabilidade dos cálculos, sendo necessário empregar apenas uma parcela da correção calculada (Versteeg e Malalasekera, 2007).

De acordo com Patankar (1980), a partir das equações do movimento, (5) e (6), pode-se escrever:

$$u_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + (p_P - p_E) A_e + b_e}{a_e} \tag{22}$$

$$v_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + (p_P - p_N) A_n + b_n}{a_n} \tag{23}$$

Denotando os valores obtidos da iteração anterior por $u^{(n-1)}$ e $v^{(n-1)}$, pode-se adicionar e subtrair $u_e^{(n-1)}$ e $v_n^{(n-1)}$ em suas respectivas equações (22) e (23), obtendo

$$u_e = u_e^{(n-1)} + \left(\frac{\sum a_{nb} u_{nb} + (p_P - p_E) A_e + b_e}{a_e} - u_e^{(n-1)} \right) \tag{24}$$

$$v_n = v_n^{(n-1)} + \left(\frac{\sum a_{nb} v_{nb} + (p_P - p_N) A_n + b_n}{a_n} - v_n^{(n-1)} \right) \tag{25}$$

O conteúdo entre parenteses nas equações (24) e (25) representa as variações em u_e e v_n obtidas na iteração atual. Esta variação pode ser modificada introduzindo-se o fator de relaxação α_v, obtendo:

$$u_e = u_e^{(n-1)} + \alpha_v \left(\frac{\sum a_{nb} u_{nb} + (p_P - p_E) A_e + b_e}{a_e} - u_e^{(n-1)} \right) \tag{26}$$

$$v_n = v_n^{(n-1)} + \alpha_v \left(\frac{\sum a_{nb} v_{nb} + (p_P - p_N) A_n + b_n}{a_n} - v_n^{(n-1)} \right) \tag{27}$$

ou ainda

$$\frac{a_e}{\alpha_v} u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_P - p_E) A_e + b_e + (1 - \alpha_v) \frac{a_e}{\alpha_v} u_e^{(n-1)} \tag{28}$$

$$\frac{a_n}{\alpha_v} v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_P - p_N) A_n + b_n + (1 - \alpha_v) \frac{a_n}{\alpha_v} v_n^{(n-1)} \tag{29}$$

Ainda, de acordo com as equações (28) e (29), pode-se mostrar que a equação de correção da pressão é modificada pelo fator de relaxação da velocidade nos termos $d_e = A_e/a_e$ e $d_n = A_n/a_n$ da seguinte forma (Versteeg e Malalasekera, 2007):

$$d_e = \frac{A_e \alpha_v}{a_e} \qquad \text{e} \qquad d_n = \frac{A_n \alpha_v}{a_n} \tag{30}$$

Assim, para efetividade do algoritmo SIMPLE apresentado na seção 2.3, as equações do movimento devem ser resolvidas com os fatores de relaxação embutidos como mostrado nas equações (28) e (29), a equação de correção da pressão deve ser resolvida empregando as expressões dadas em (30) e a correção da pressão deve ser realizada por meio da equação (21).

3.2 Método para o cálculo do fator de relaxação

A utilização de fatores de relaxação durante o processo iterativo do algoritmo SIMPLE permanece uma questão em aberto uma vez que valores ótimos que acelerem a convergência dependem de cada problema a ser resolvido (Versteeg e Malalasekera, 2007) e valores fixos podem não ser ideais para todas as iterações.

Alguns métodos visando a otimização dos fatores de relaxação podem ser encontrados em Marek e Straub (1993), Chatwani e Turan (1991), Morii e Vierow (2000), Ryoo et al. (2005), Min e Tao (2007) e suas respectivas referências. Neste trabalho, um método de otimização dos fatores de relaxação para as equações do movimento baseado em Min e Tao (2007) é estudado.

Denotando-se as normas dos resíduos por N_u e N_v para as suas respectivas equações do movimento (equações (5) e (6)), tem-se:

$$N_u = \frac{(\sum_{nos} (a_e u_e - \sum a_{nb} u_{nb} - (p_P - p_E) A_e - b_e)^2)^{1/2}}{\rho u_{ref}^2} \tag{31}$$

$$N_v = \frac{(\sum_{nos}(a_n v_n - \sum a_{nb} v_{nb} - (p_P - p_N)A_n - b_n)^2)^{1/2}}{\rho v_{ref}^2} \tag{32}$$

de modo que um critério de parada usual para o processo iterativo é

$$max(N_u, N_v) \leq \epsilon \tag{33}$$

onde ϵ é uma tolerância estabelecida (Min e Tao, 2007; Chatwani e Turan, 1991). Propõe-se aqui e é usado como critério de parada e verificação de convergência que o valor máximo da norma da diferença entre as componentes da velocidade calculadas no passo de iteração atual e as componentes da velocidade calculadas no passo de iteração anterior sejam menores que uma dada tolerância. Ou seja,

$$N_u^{dif} = max(|u_e - u_e^{(n-1)}|) \leq \epsilon \quad \text{e} \quad N_v^{dif} = max(|v_n - v_n^{(n-1)}|) \leq \epsilon \tag{34}$$

Dadas as normas definidas pelas expressões (31), (32)) e (34), define-se a razão entre N_v e N_u e entre N_v^{dif} e N_u^{dif} respectivamente por

$$\beta = \frac{N_v}{N_u} \quad \text{e} \quad \beta^{dif} = \frac{N_v^{dif}}{N_u^{dif}} \tag{35}$$

A ideia do método é baseada no fato de que se as normas de cada uma das equações do movimento forem aproximadamente iguais, a convergência do processo iterativo será acelerada, de acordo com (Min e Tao, 2007). Ou seja, pelas expressões dadas em (35), as normas serão aproximadamente iguais quando

$$\beta \approx 1 \quad \text{e} \quad \beta^{dif} \approx 1 \tag{36}$$

No que segue, por simplicidade, a razão entre as normas será denotada simplesmente por β, representando qualquer uma das duas expressões dadas em (35). O algoritmo de cálculo para o novo fator de relaxação é descrito como segue.

Baseado nos fatores de relaxação calculados pelo algoritmo em uma iteração anterior ou na estimativa inicial ($\alpha_v = 0.6$ e $\alpha_p = 0.4$ são os valores inicias empregados neste trabalho), o valor de β é calculado. O novo valor do fator de relaxação da velocidade é calculado em função do valor de β e da variável $flag$ por uma das seguintes expressões:

$$\alpha_v = (\alpha_0)^{\beta^\gamma}, \quad \text{se} \quad \beta \leq 1 \quad \text{e se} \quad flag = 0 \tag{37}$$

$$\alpha_v = (\alpha_0)^{(1/\beta)^\gamma}, \quad \text{se} \quad \beta \leq 1 \quad \text{e se} \quad flag = 1 \tag{38}$$

$$\alpha_v = (\alpha_0)^{\beta^\gamma}, \quad \text{se} \quad \beta > 1 \quad \text{e se} \quad flag = 1 \tag{39}$$

$$\alpha_v = (\alpha_0)^{(1/\beta)^\gamma}, \quad \text{se} \quad \beta > 1 \quad \text{e se} \quad flag = 0 \tag{40}$$

Nas expressões (37) a (40), $flag$ é uma variável que indica se o novo valor do fator de relaxação da velocidade calculado é maior ($flag = 1$) ou menor ($flag = 0$) que o fator de relaxação anterior. Caso o valor do fator de relaxação calculado por uma dessas expressões seja superior ao valor limite dado ($\alpha_{lim} = 0.98$ neste trabalho), a expressão alternativa é imediatamente empregada para atualizar este valor. Por exemplo, se o valor calculado por $\alpha_v = (\alpha_0)^{\beta^\gamma}$ for maior que α_{lim}, então a expressão $\alpha_v = (\alpha_0)^{(1/\beta)^\gamma}$ é usada. O valor do fator de relaxação para a correção da pressão é calculado por

$$\alpha_p = 1 - \alpha_v \tag{41}$$

usando-se o fator de relaxação da velocidade recém calculado

Ainda com relação as expressões (37) a (40), o valor γ, sempre positivo, é usado para modificar o valor do expoente nas duas relações e suavizar a variação do fator de relaxação entre dois passos de iterações onde é calculado. Deve-se observar que variar os fatores de relaxação a cada iteração pode ser algo custoso e até mesmo ineficiente. Assim o algoritmo descrito pode ser empregado a cada iteração ou a cada n iterações a partir de um dado número de iterações iniciais.

4 TESTES NUMÉRICOS

Nesta seção apresenta-se alguns testes numéricos preliminares implementando o método de cálculo dos fatores de relaxação descrito nas seções anteriores. Os exemplos numéricos apresentados foram implementados e executados usando-se a linguagem Python. O objetivo é ilustrar que o método descrito neste trabalho pode reduzir o número de iterações do algoritmo SIMPLE e, consequentemente, o tempo de execução da solução do problema para determinados pares de parâmetros γ e n. Os problemas implementados são os de circulação, convecção natural e de circulação com fluxos de entrada e saída. Todos os problemas apresentados foram executados para malhas de 20×20, 30×30 e 40×40 volumes de controle, número de Reynolds (Re) igual a 100, 1000 e 2000, valores iniciais $\alpha_v = 0.6$ e $\alpha_p = 0.4$ para os fatores de relaxação e usando como critério de parada a norma da diferença (expressões em (34)), descritas anteriormente. Os tempos de execução apresentados são relativos ao tempo de execução com os fatores de relaxação fixos.

4.1 Problema de circulação

A Figura 2 ilustra a solução para o problema de circulação com a malha de 20×20 VCs.

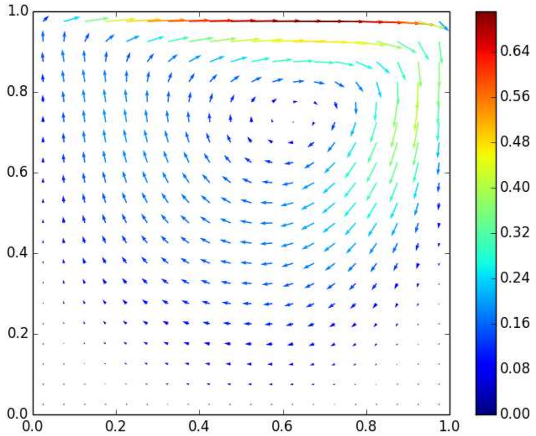

Figura 2: Campo de velocidades do problema de circulação (em m/s)

As Tabelas 1, 2 e 3 apresentam o tempo de execução para um conjunto de dados γ e n nas malhas 20×20, 30×30 e 40×40, respectivamente, para $Re = 100$.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 8$	$n = 10$
$\gamma = 0.5$	0.9543	0.8183	0.8176	0.9728	0.9441	0.9861
$\gamma = 0.8$	0.9190	0.7045	0.7171	0.8630	0.8570	0.9521
$\gamma = 1.0$	0.8874	0.6273	0.6686	0.8144	0.8133	0.9089
$\gamma = 1.2$	0.8250	0.6154	0.6340	0.7538	0.7304	0.8516
$\gamma = 1.5$	0.7845	0.5263	0.5375	0.6641	0.7141	0.8010
$\gamma = 2.5$	0.7916	0.3927	0.5889	0.5233	0.6450	0.7844

Tabela 1: Tempo de execução na malha 20×20, $Re = 100$

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 8$	$n = 10$
$\gamma = 0.5$	0.8551	0.7651	0.7179	0.7935	0.7484	0.7739
$\gamma = 0.8$	0.7496	0.5534	0.5994	0.6896	0.6951	0.7316
$\gamma = 1.0$	0.7467	0.5183	0.5451	0.6720	0.6603	0.6956
$\gamma = 1.2$	0.7519	0.4881	0.4804	0.6480	0.6362	0.6583
$\gamma = 1.5$	0.7966	0.4331	0.4368	0.5791	0.5957	0.6010
$\gamma = 2.5$	0.8634	0.2418	0.2437	0.4244	0.3984	0.4298

Tabela 2: Tempo de execução na malha 30×30, $Re = 100$

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 8$	$n = 10$
$\gamma = 0.5$	0.8427	0.7267	0.7978	0.8309	0.8281	0.8656
$\gamma = 0.8$	0.8460	0.6169	0.6938	0.7928	0.7729	0.8429
$\gamma = 1.0$	0.8688	0.6229	0.6271	0.6720	0.7329	0.7452
$\gamma = 1.2$	0.8702	0.5608	0.5699	0.6970	0.6734	0.6844
$\gamma = 1.5$	0.9258	0.5025	0.4799	0.6090	0.5974	0.6202
$\gamma = 2.5$	1.1978	0.2856	0.2883	0.4422	0.4176	0.4545

Tabela 3: Tempo de execução na malha 40×40, $Re = 100$

O número de iterações com os parâmetros de relaxação fixos nas malhas 20×20, 30×30 e 40×40 foram, respectivamente, 106, 191, e 286. Observa-se que nos três casos foi possível obter redução no tempo de execução para quase todos pares de parâmetros γ e n, sendo as maiores reduções de tempo em cada caso de: 60.72% na malha 20×20 ($\gamma = 2.5$ e $n = 2$ - redução de 106 para 32 iterações), 75.81% na malha 30×30 ($\gamma = 2.5$ e $n = 2$ - redução de 191 para 47 iterações) e 71.43% na malha 40×40 ($\gamma = 2.5$ e $n = 2$ - redução de 286 para 79 iterações).

As Figuras 3, 4 e 5 ilustram a variação do fator de relaxação da velocidade e do valor de β ao longo das iterações para os melhores casos obtidos em cada uma das três malhas.

As Tabelas 4 e 5 exibem os tempos de execução para o problema na malha 30×30 com $Re = 1000$ e $Re = 2000$ respectivamente. Pode-se observar que neste caso, com número de Reynolds de alto valor, o método ainda é capaz de reduzir o tempo de execução e o número de iterações, sendo os melhores casos de redução do tempo de 42.40% ($\gamma = 2.5$ e $n = 10$ -

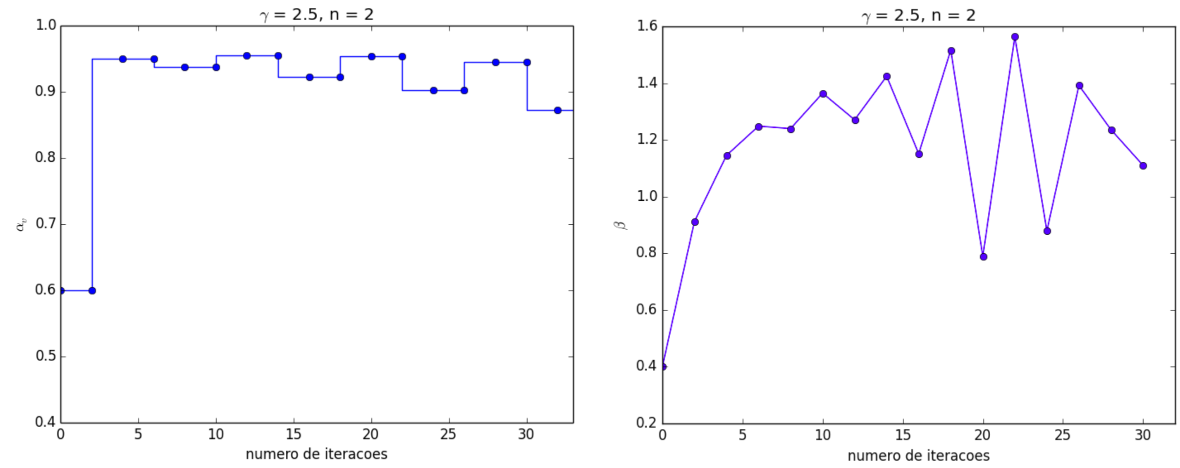

Figura 3: Malha 20×20, α_v e β ao longo das iterações

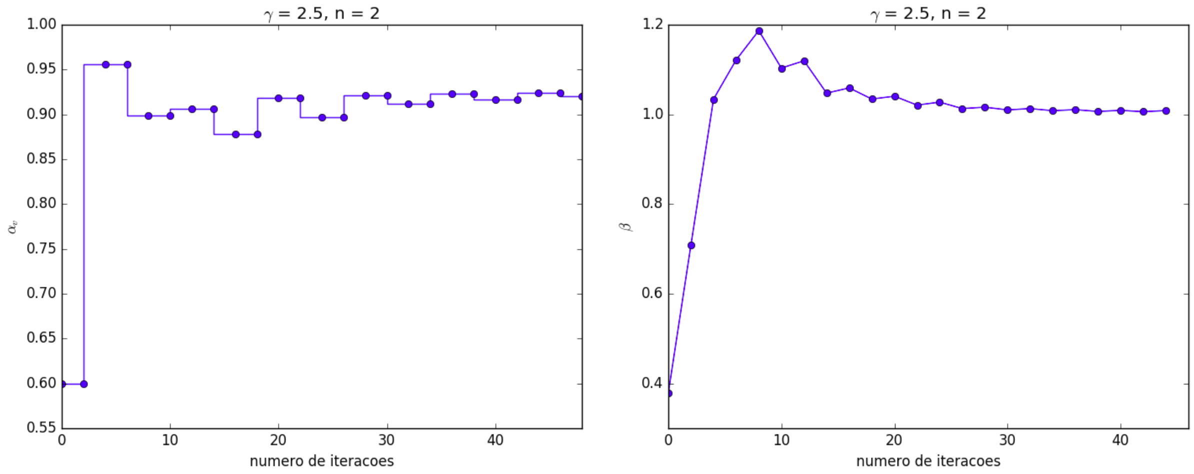

Figura 4: Malha 30×30, α_v e β ao longo das iterações

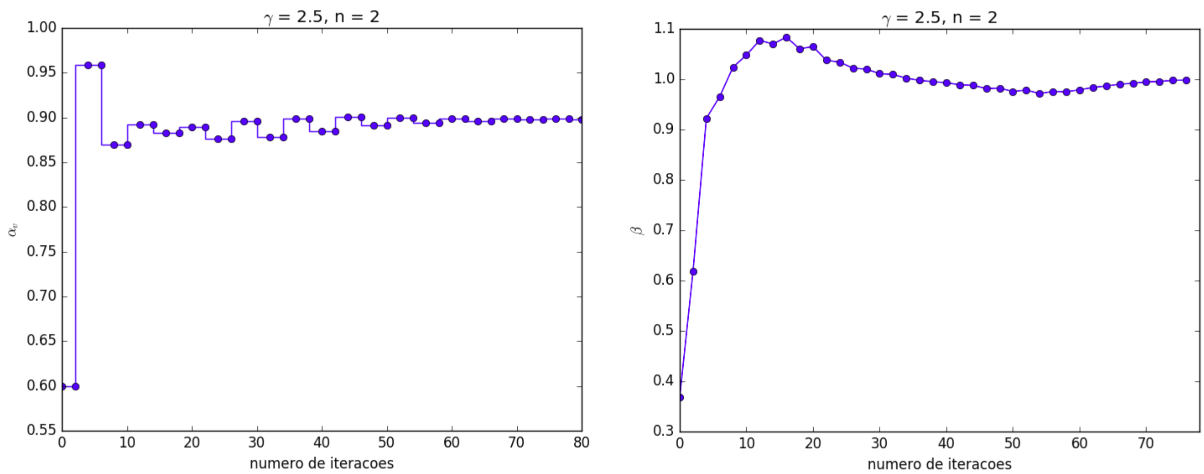

Figura 5: Malha 40×40, α_v e β ao longo das iterações

redução de 139 para 67 iterações) para $Re = 1000$ e de 54.00% ($\gamma = 1.5$ e $n = 1$ - redução de 135 para 61 iterações) para $Re = 2000$.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 8$	$n = 10$
$\gamma = 0.5$	0.7768	0.8111	0.8776	0.9921	0.8584	0.8371
$\gamma = 0.8$	0.7410	0.8081	0.8643	1.0423	0.8815	0.8487
$\gamma = 1.0$	0.7826	0.8233	0.8454	1.0522	0.8300	0.7546
$\gamma = 1.2$	0.6717	0.8118	0.7794	1.0751	0.7780	0.7390
$\gamma = 1.5$	0.6698	0.7703	0.7332	1.1231	0.7441	0.6280
$\gamma = 2.5$	1.1315	0.8849	0.7202	0.9328	0.7058	0.5759

Tabela 4: Tempo de execução na malha 30×30, $Re = 1000$

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 8$	$n = 10$
$\gamma = 0.5$	0.7990	0.9098	0.9654	1.0340	0.8774	0.8344
$\gamma = 0.8$	0.7208	0.8798	0.9506	1.0521	0.8645	0.7533
$\gamma = 1.0$	0.6817	0.7965	0.9646	1.3680	1.0571	0.6750
$\gamma = 1.2$	0.7042	0.8559	0.9188	1.0645	0.7241	0.6106
$\gamma = 1.5$	0.4599	0.7336	0.8095	1.0086	0.7481	0.6156
$\gamma = 2.5$	0.7286	0.7450	0.8962	1.0287	0.8068	0.6359

Tabela 5: Tempo de execução na malha 30×30, $Re = 2000$

As Figuras 6 e 7 exibem a variação do fator de relaxação da velocidade e do valor de β ao longo das iterações para os melhores casos obtidos para $Re = 1000$ e $Re = 2000$ respectivamente.

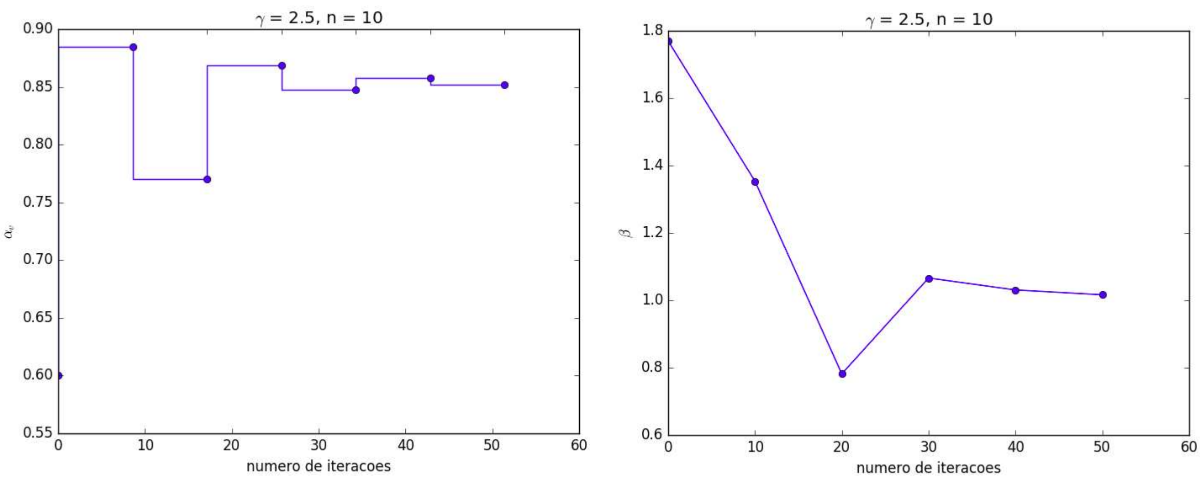

Figura 6: Valores de α_v e β ao longo das iterações para $Re = 1000$

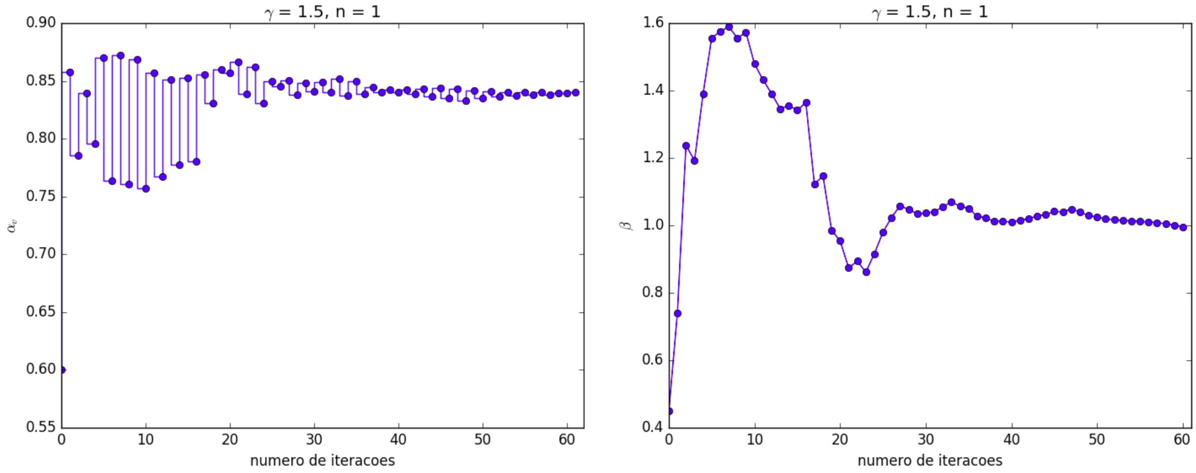

Figura 7: Valores de α_v e β ao longo das iterações para $Re = 2000$

4.2 Problema de convecção natural

A Figura 8 ilustra a solução para o problema de convecção natural com a malha de 20×20 VCs. As Tabelas 6, 7 e 8 apresentam o tempo de execução para um conjunto de dados γ e n nas

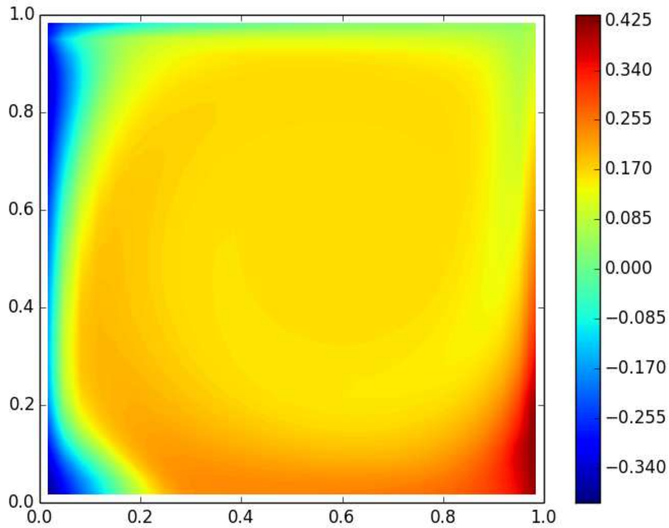

Figura 8: Campo de temperaturas para o problema de convecção natural (em °C)

malhas 20×20, 30×30 e 40×40, respectivamente, para $Re = 100$.

O número de iterações com os parâmetros de relaxação fixos nas malhas 20×20, 30×30 e 40×40 foram, respectivamente, 160, 305, e 484. Observa-se que nos três casos foi possível obter redução no tempo de execução para quase todos pares de parâmetros γ e n, sendo as maiores reduções de tempo em cada caso de: 54.27% na malha 20×20 ($\gamma = 1.5$ e $n = 2$ - redução de 160 para 67 iterações), 77.71% na malha 30×30 ($\gamma = 2.5$ e $n = 3$ - redução de 305 para 62 iterações) e 76.00% na malha 40×40 ($\gamma = 2.5$ e $n = 3$ - redução de 484 para 113 iterações). As Figuras 9, 10 e 11 ilustram a variação do fator de relaxação da velocidade e do valor de β ao longo das iterações para os melhores casos em cada uma das três malhas.

As Tabelas 9 e 10 ilustram os tempos de execução para o problema na malha 30×30 com $Re = 1000$ e $Re = 2000$ respectivamente. Novamente, com número de Reynolds de alto valor, o método é capaz de reduzir o tempo de execução e o número de iterações, sendo os melhores

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 8$	$n = 10$
$\gamma = 0.5$	0.9022	0.7655	0.8000	0.8681	0.8812	0.9032
$\gamma = 0.8$	0.8726	0.6917	0.6590	0.7879	0.7734	0.8452
$\gamma = 1.0$	0.8018	0.5545	0.6012	0.7553	0.7197	0.8208
$\gamma = 1.2$	0.8007	0.5227	0.5483	0.6815	0.7051	0.8331
$\gamma = 1.5$	0.7665	0.4572	0.4765	0.7074	0.6997	0.8019
$\gamma = 2.5$	0.7820	0.4968	0.4696	0.4585	0.6190	0.7491

Tabela 6: Tempo de execução na malha 20×20, $Re = 100$

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 8$	$n = 10$
$\gamma = 0.5$	0.9170	0.7275	0.7247	0.8071	0.8081	0.8781
$\gamma = 0.8$	0.8491	0.5954	0.6591	0.7408	0.7744	0.8366
$\gamma = 1.0$	0.8356	0.5454	0.5680	0.7309	0.7154	0.7457
$\gamma = 1.2$	0.8348	0.4943	0.4955	0.6940	0.6775	0.6988
$\gamma = 1.5$	0.9136	0.4391	0.4501	0.6083	0.6256	0.6239
$\gamma = 2.5$	1.0205	0.2232	0.2228	0.4315	0.3925	0.4271

Tabela 7: Tempo de execução na malha 30×30, $Re = 100$

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 8$	$n = 10$
$\gamma = 0.5$	0.9204	0.7531	0.7600	0.8022	0.8083	0.8247
$\gamma = 0.8$	0.8897	0.5969	0.6669	0.7853	0.7464	0.7653
$\gamma = 1.0$	0.8682	0.5799	0.5996	0.7160	0.6893	0.7033
$\gamma = 1.2$	0.8947	0.5139	0.5033	0.6414	0.6398	0.6442
$\gamma = 1.5$	1.0213	0.4612	0.4364	0.5685	0.5528	0.5778
$\gamma = 2.5$	1.0902	0.2426	0.2399	0.3864	0.3729	0.4176

Tabela 8: Tempo de execução na malha 40×40, $Re = 100$

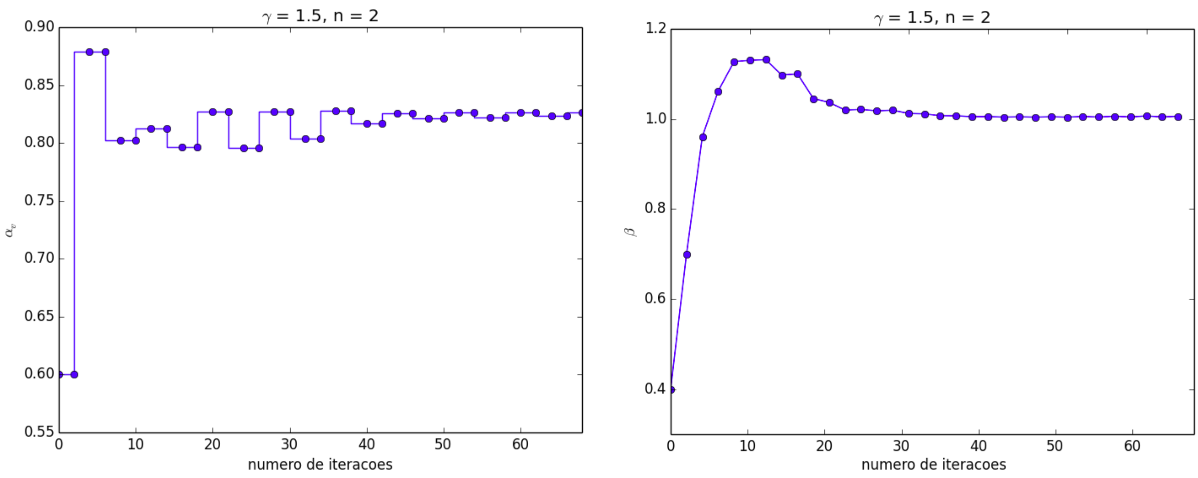

Figura 9: Malha 20×20, α_v e β ao longo das iterações

casos de redução do tempo de 52.65% ($\gamma = 1.0$ e $n = 2$ - redução de 126 para 51 iterações) para $Re = 1000$ e de 54.80% ($\gamma = 1.2$ e $n = 5$ - redução de 134 para 57 iterações) para $Re = 2000$. As Figuras 12 e 13 exibem a variação do fator de relaxação da velocidade e do

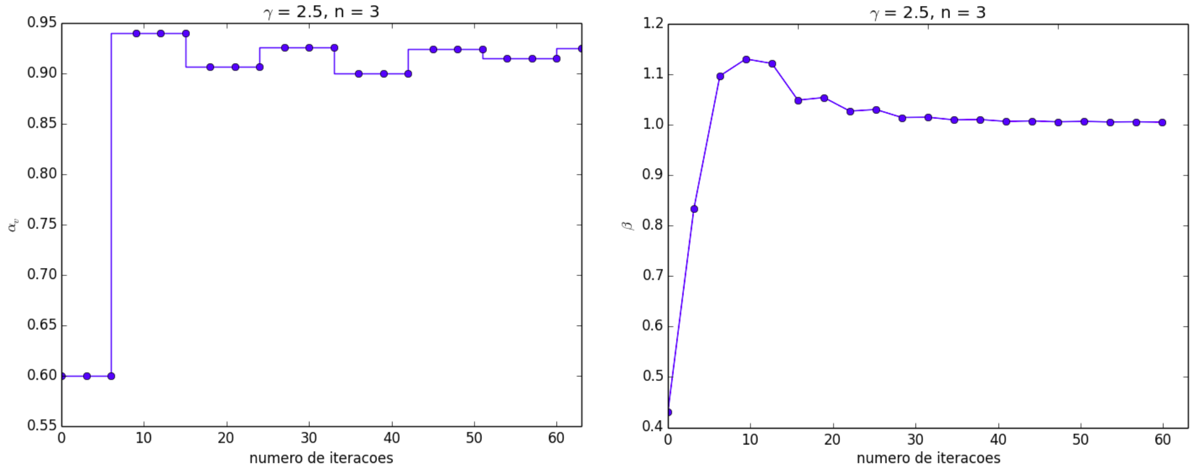

Figura 10: Malha 30 × 30, α_v e β ao longo das iterações

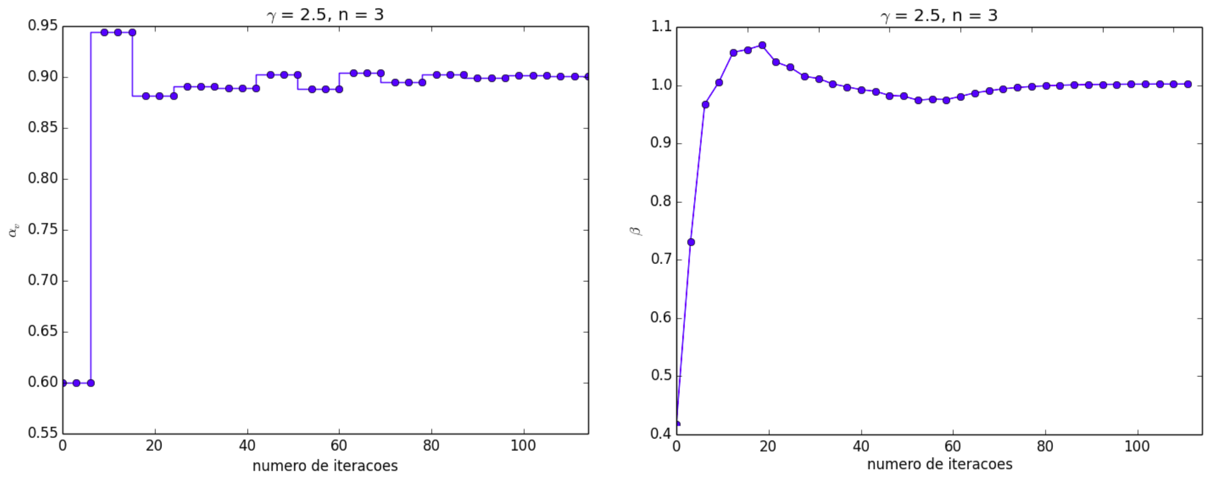

Figura 11: Malha 40 × 40, α_v e β ao longo das iterações

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 8$	$n = 10$
$\gamma = 0.5$	0.7510	0.6683	0.7370	0.6153	0.9272	1.0611
$\gamma = 0.8$	0.6342	0.5215	0.5610	0.5477	0.9131	1.0961
$\gamma = 1.0$	0.5610	0.4734	0.5088	0.4914	0.8942	1.1125
$\gamma = 1.2$	0.5297	0.5916	0.4985	0.4873	0.88246	1.1401
$\gamma = 1.5$	0.4879	0.7046	0.4981	0.6135	0.8732	1.1900
$\gamma = 2.5$	1.6696	1.1913	1.2354	1.6670	1.0799	0.8765

Tabela 9: Tempo de execução na malha 30 × 30, $Re = 1000$

valor de β ao longo das iterações para os melhores casos obtidos para $Re = 1000$ e $Re = 2000$ respectivamente.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=5$	$n=8$	$n=10$
$\gamma=0.5$	0.7137	0.6559	0.6659	0.6381	1.0052	1.0768
$\gamma=0.8$	0.5623	0.5874	0.5191	0.5886	1.0831	1.1457
$\gamma=1.0$	0.5521	0.4807	0.4742	0.4997	1.1592	1.1761
$\gamma=1.2$	0.4930	0.4802	0.4761	0.4519	1.0449	1.3353
$\gamma=1.5$	0.4881	0.7055	0.5306	0.6345	1.1418	1.4086
$\gamma=2.5$	1.3578	1.1287	1.4580	1.6770	1.3271	0.8522

Tabela 10: Tempo de execução na malha 30×30, $Re = 2000$

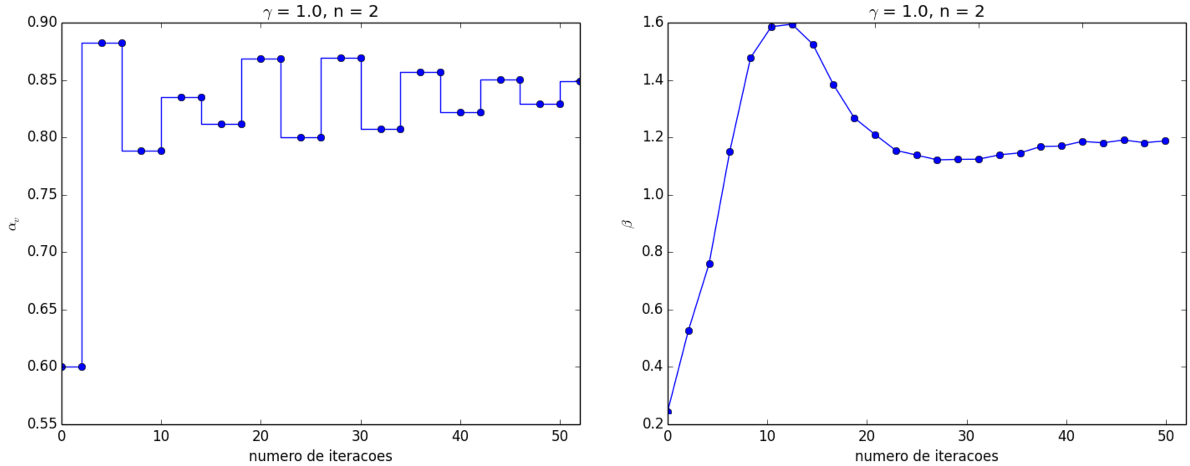

Figura 12: Valores de α_v e β ao longo das iterações para $Re = 1000$

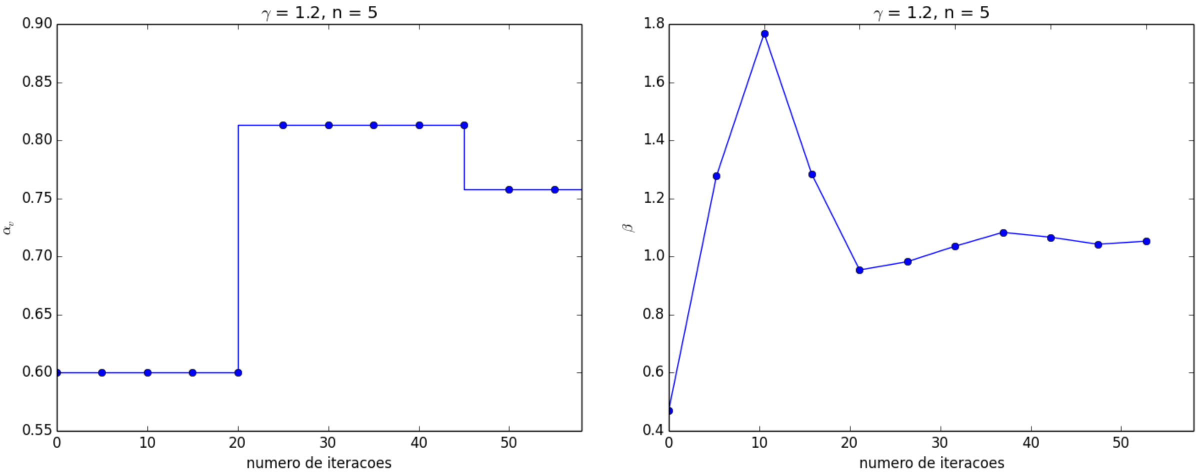

Figura 13: Valores de α_v e β ao longo das iterações para $Re = 2000$

4.3 Problema de circulação com fluxos de entrada e saída

A Figura 14 exibe a solução para o problema de circulação com fluxos de entrada e saída 20×20 VCs. As Tabelas 11, 12 e 13 apresentam o tempo de execução para um conjunto de dados γ e n nas malhas 20×20, 30×30 e 40×40, respectivamente, para $Re = 100$ e empregando o critério de parada pela norma da diferença das componentes da velocidade (equação (34)).

O número de iterações com os parâmetros de relaxação fixos nas malhas 20×20, 30×30 e 40×40 foram, respectivamente, 84, 163, e 216. Observa-se que nos três casos foi possível obter

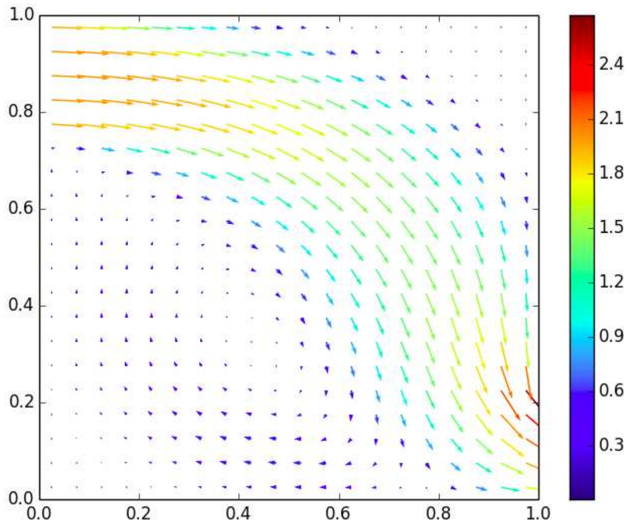

Figura 14: Campo de velocidade para o problema de circulação com fluxos de entrada e saída (em m/s)

redução no tempo de execução para quase todos pares de parâmetros γ e n, sendo as maiores reduções de tempo em cada caso de: 34.73% na malha 20×20 ($\gamma = 1.2$ e $n = 3$ - redução de 84 para 47 iterações), 61.13% na malha 30×30 ($\gamma = 2.5$ e $n = 2$ - redução de 163 para 51 iterações) e 62.60% na malha 40×40 ($\gamma = 2.5$ e $n = 2$ - redução de 216 para 68 iterações).

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 8$	$n = 10$
$\gamma = 0.5$	0.8055	0.8784	0.7498	0.8053	0.8253	0.8612
$\gamma = 0.8$	0.7301	0.7796	0.6917	0.7693	0.7850	0.7821
$\gamma = 1.0$	0.7093	0.6891	0.6712	0.6779	0.7615	0.7386
$\gamma = 1.2$	1.0751	0.6943	0.6526	0.6641	0.7656	0.7883
$\gamma = 1.5$	0.8629	0.6868	0.8375	0.6721	0.7198	0.7112
$\gamma = 2.5$	0.8091	0.6565	0.7476	0.7746	0.7558	0.9223

Tabela 11: Tempo de execução na malha 20×20, $Re = 100$

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 8$	$n = 10$
$\gamma = 0.5$	0.8665	0.8113	0.7443	0.7856	0.7774	0.9049
$\gamma = 0.8$	0.6371	0.6503	0.6271	0.6683	0.8374	0.7850
$\gamma = 1.0$	0.6213	0.5363	0.5305	0.6303	0.7652	0.7962
$\gamma = 1.2$	0.4701	0.4895	0.4817	0.5882	0.6734	0.7641
$\gamma = 1.5$	0.7603	0.4194	0.4586	0.5497	0.6749	0.6960
$\gamma = 2.5$	0.6049	0.3886	0.5457	0.4362	0.6796	0.6274

Tabela 12: Tempo de execução na malha 30×30, $Re = 100$

As Figuras 15, 16 e 17 ilustram a variação do fator de relaxação da velocidade e do valor de β ao longo das iterações para os melhores casos em cada uma das três malhas.

As Tabelas 14 e 15 ilustram os tempos de execução para o problema na malha 30×30 com $Re = 1000$ e $Re = 2000$ respectivamente. neste caso, com número de Reynolds de alto valor, o método ainda é capaz de reduzir o tempo de execução e o número de iterações, sendo os melhores casos de redução do tempo de 45.32% ($\gamma = 2.5$ e $n = 8$ - redução de 163 para 75

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=5$	$n=8$	$n=10$
$\gamma=0.5$	0.7519	0.8175	0.6382	0.6669	0.8361	0.8305
$\gamma=0.8$	0.6218	0.7891	0.5189	0.6124	0.7004	0.8164
$\gamma=1.0$	0.5410	0.5984	0.4543	0.5018	0.7042	0.7819
$\gamma=1.2$	0.4119	0.5095	0.5731	0.4994	0.6572	0.8026
$\gamma=1.5$	0.3963	0.4515	0.4515	0.8566	0.4111	0.4751
$\gamma=2.5$	0.7172	0.3739	0.4392	0.6973	0.3921	0.4073

Tabela 13: Tempo de execução na malha 40×40, $Re = 100$

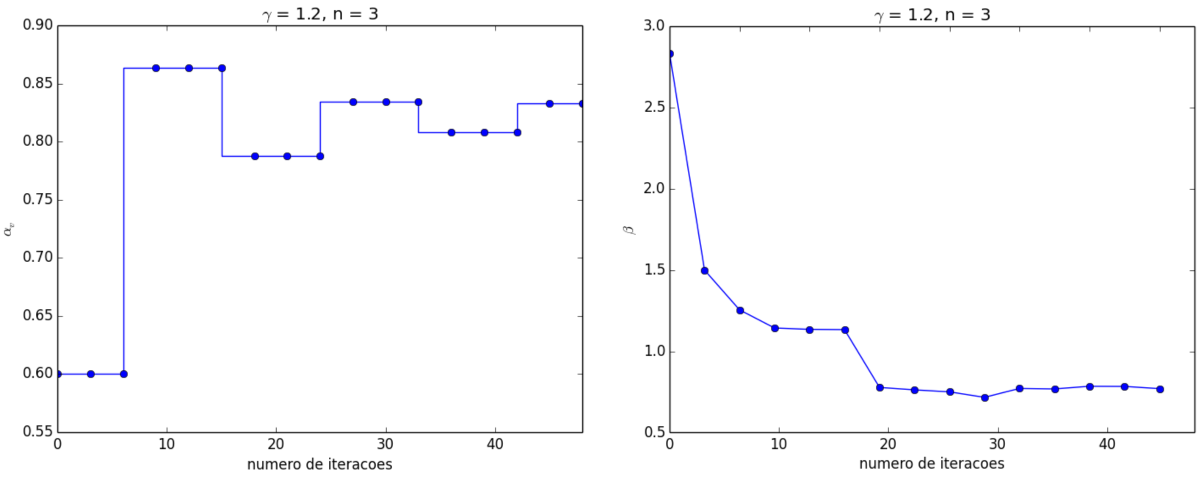

Figura 15: Malha 20×20, α_v e β ao longo das iterações

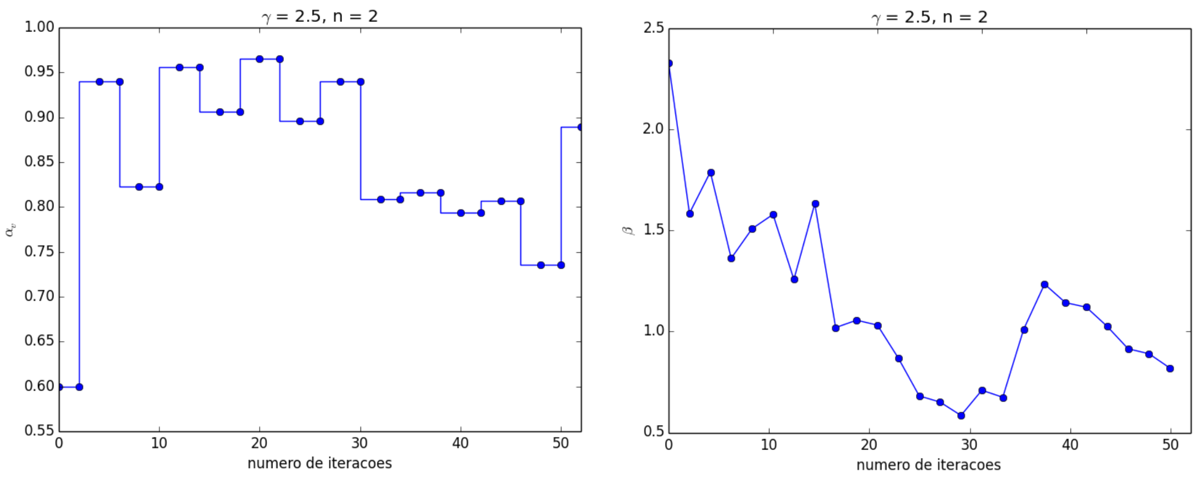

Figura 16: Malha 30×30, α_v e β ao longo das iterações

iterações) para $Re = 1000$ e de 38.43% ($\gamma = 1.0$ e $n = 1$ - redução de 215 para 121 iterações) para $Re = 2000$.

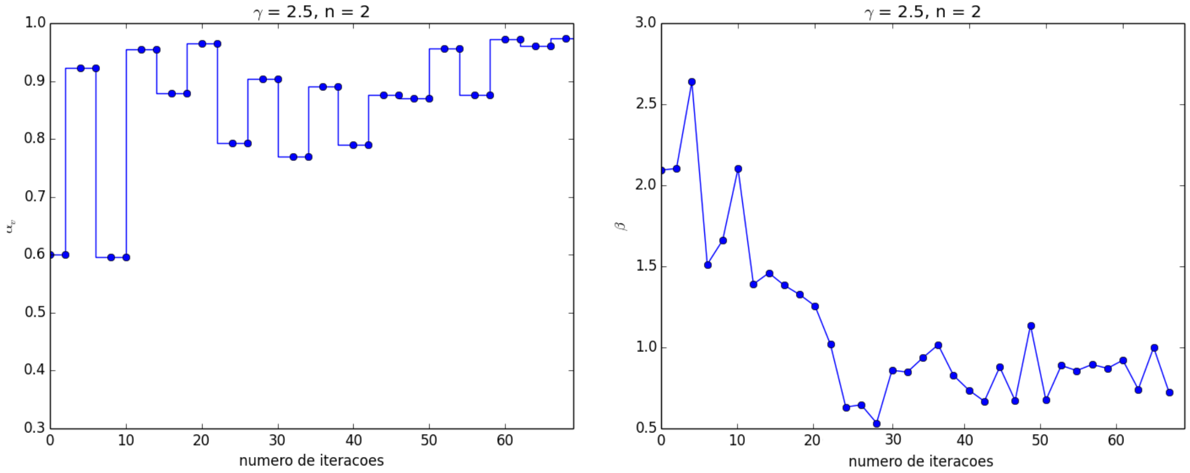

Figura 17: Malha 40×40, α_v e β ao longo das iterações

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 8$	$n = 10$
$\gamma = 0.5$	1.0833	1.1447	1.3553	1.0124	0.8285	0.9710
$\gamma = 0.8$	0.9650	1.0588	0.9331	0.8129	0.7054	0.7194
$\gamma = 1.0$	1.0547	0.9225	0.8575	0.7985	0.6550	0.7192
$\gamma = 1.2$	1.0780	1.4400	0.9655	0.6800	0.7093	0.7182
$\gamma = 1.5$	1.4051	0.7816	1.1415	0.6800	0.7093	0.7182
$\gamma = 2.5$	1.4051	0.7816	1.3136	0.6532	0.5467	0.7061

Tabela 14: Tempo de execução na malha 30×30, $Re = 1000$

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 8$	$n = 10$
$\gamma = 0.5$	0.7206	0.8956	0.7742	0.8866	0.9385	0.8246
$\gamma = 0.8$	0.9679	0.9208	0.8754	0.7662	0.8299	0.7662
$\gamma = 1.0$	0.6156	1.1545	1.3245	0.8801	0.8590	0.8457
$\gamma = 1.2$	1.1033	1.0644	1.0041	0.8957	0.8341	0.6736
$\gamma = 1.5$	0.6698	1.2462	0.8548	0.6851	0.9353	0.6499
$\gamma = 2.5$	0.6455	0.7442	0.7678	0.9074	0.6546	0.6911

Tabela 15: Tempo de execução na malha 30×30, $Re = 2000$

As Figuras 18 e 19 exibem a variação do fator de relaxação da velocidade e do valor de β ao longo das iterações para os melhores casos obtidos para $Re = 1000$ e $Re = 2000$ respectivamente.

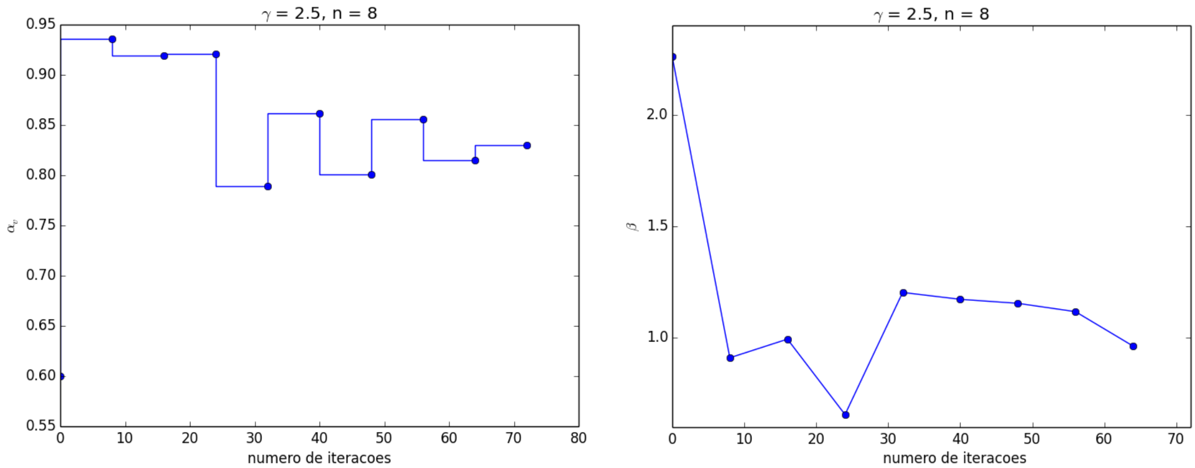

Figura 18: Valores de α_v e β ao longo das iterações para $Re = 1000$

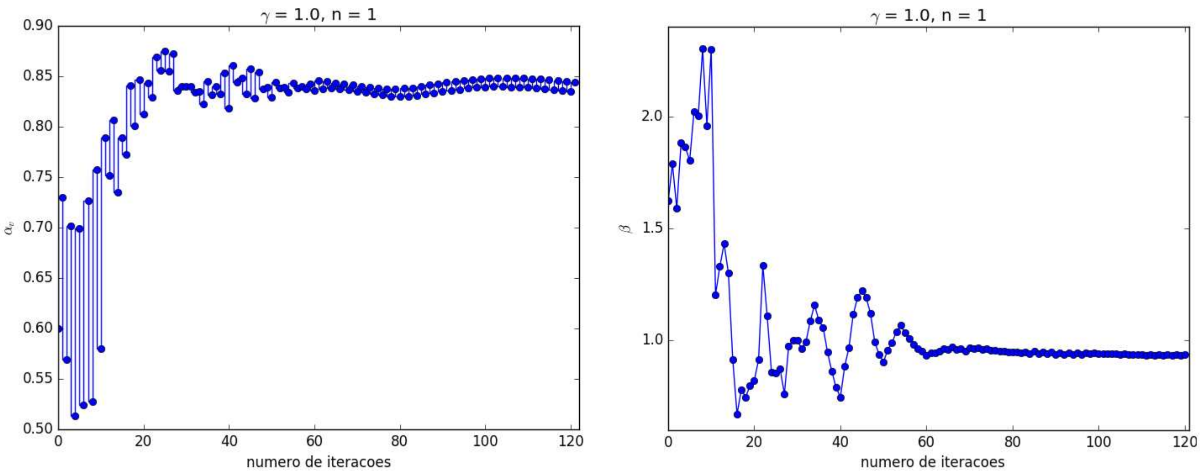

Figura 19: Valores de α_v e β ao longo das iterações para $Re = 2000$

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um método para cálculo de fatores de relaxação para as equações de movimento discretas empregadas no algoritmo SIMPLE. O método tem por objetivo calcular fatores de relaxação otimizados baseados na norma da diferença das velocidades obtidas entre dois níveis de iteração. O algoritmo de cálculo pode ser empregado a cada iteração consecutiva ou cada n iterações, sendo testados neste trabalho os valores para n: 1, 2, 3, 5, 8 e 10. O outro parâmetro usado no método, γ, visa controlar as variações dos fatores de relaxação calculados (Min e Tao, 2007). Os valores de γ testados foram: 0.5, 0.8, 1.0, 1.2, 1.5 e 2.5.

De acordo com os dados e resultados obtidos nos testes preliminares apresentados, pode-se observar que o objetivo primário de reduzir o tempo de execução e o número de iterações é alcançado de modo relativamente satisfatório. O método foi capaz de reduzir o tempo e o número de iterações tanto para problemas com números de Reynolds de baixa magnitude (100) quanto para valores mais elevados (1000 e 2000). A relação entre γ e n pode ser melhor estudada visando encontrar padrões de valores que possam ser aplicados diretamente aos problemas, embora, neste trabalho, os valores de $\gamma \approx 2.5$ e $1 < n < 5$ tenham se mostrado adequados para os problemas estudado com $Re = 100$. Para $Re = 1000$ e $Re = 2000$, não foi possível obter um determinado padrão, mesmo que os testes tenham mostrado reduções de tempo e número de iterações.

Os resultados aqui apresentados foram para três problemas incompressíveis (e térmicos) em regime permanente empregando o algoritmo SIMPLE para tratamento das não-linearidades e do acoplamento pressão velocidade. Como perspectiva de futuros trabalhos sobre este método pretende-se implementar o algoritmo de cálculo dos fatores de relaxação para problemas em regime transiente além de considerar o emprego de outros algoritmos iterativos como o SIMPLER e o SIMPLEC.

REFERÊNCIAS

Chatwani A.V. e Turan A. Technical note improved pressure-velocity coupling algorithm based on minimization of global residual norm. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 20(1):115–123, 1991. doi:10.1080/10407799108944997.

Doormaal J.P.V. e Raithby G.D. Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows. *Numerical Heat Transfer*, 7(2):147–163, 1984. doi:10.1080/01495728408961817.

Ferziger J. e Peric M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer Berlin Heidelberg, 2012. ISBN 9783642976513.

Issa R. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of Computational Physics*, 62(1):40 – 65, 1986. ISSN 0021-9991. doi:http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(86)90099-9.

Marek R. e Straub J. Hybrid relaxation - a technique to enhance the rate of convergence of iterative algorithms. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 23(4):483–497, 1993. doi:10.1080/10407799308914912.

Min C. e Tao W. An under-relaxation factor control method for accelerating the iteration convergence of flow field simulation. *Engineering Computations*, 24(8):793–813, 2007. doi:10.1108/02644400710833314.

Morii T. e Vierow K. The soar method for automatically optimizing simple relaxation factors. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 38(3):309–332, 2000. doi:10.1080/10407790050192799.

Moukalled F., Mangani L., e Darwish M. *The finite volume method in computational fluid dynamics: an advanced introduction with OpenFOAM and Matlab*. Fluid mechanics and its applications. Springer, Cham, 2016.

Odone M.W.N., Toledo E.M., Barra L.P.S., e Silva C.E. Um estudo numérico sobre o método entalpia-porosidade na solução de problemas de mudança de fase. *XXXIV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2013, Goiânia - GO, Brasil*, 2013.

Odone M.W.N., Toledo E.M., Barra L.P.S., e Sutter L.F.M. Uma implementação do método dos volumes finitos para solução de problemas de mudança de fase. *XXXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2015, Rio de Janeiro - RJ, Brasil*, 2015.

Patankar S. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Series in computational methods in mechanics and thermal sciences. Taylor & Francis, 1980. ISBN 9780891165224.

Patankar S.V. a calculation procedure for two-dimensional elliptic situations. *Numerical Heat Transfer Part A - applications*, 4:409–425, 1981. doi:10.1080/01495728108961801.

Ryoo J., Dragojlovic Z., e Kaminski D.A. Control of convergence in a computational fluid dynamics simulation using anfis. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(1):42–47, 2005. doi:10.1109/TFUZZ.2004.839656.

Versteeg H. e Malalasekera W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. Pearson Education Limited, 2007. ISBN 9780131274983.