

ESQUEMA EXPLÍCITO DE TAYLOR GALERKIN PARA SIMULACIÓN DE FLUJOS COMPRESIBLES: ESTABILIZACIÓN USANDO PASO DE TIEMPO INTERIOR.

Horacio Pedro Burbridge^a, Ana Scarabino^b, Armando Miguel Awruch^c

^a*Departamento de Mecánica, Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Pacheco, Av. Hipólito Yrigoyen 288 - General Pacheco, Tigre. Buenos Aires. C.P: 1617, Argentina, horacio.burbridge@utn.frgp.edu.com, <http://www.frgp.utn.edu.ar/>*

^b*Grupo Fluidodinámica Computacional – GFC, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Argentina, scarabino@ing.unlp.edu.ar <http://www.gfc.ing.unlp.edu.ar/>*

^c*PPGEC/UFRGS, Av. Osvaldo Aranha, 99, 3o Andar, 90035-190, Porto Alegre, RS, BRASIL, amawruch@ufrgs.br, <http://www.ufrgs.br/engcivil/ppgec/>*

Palabras clave: Flujo Compresible, Método de Elementos Finitos (MEF), Taylor-Galerkin (T-G), Characteristic Based Split (CBS), Paso de tiempo interior.

Resumen. Como ya fue demostrado por diferentes autores, el esquema de Taylor-Galerkin (T-G) resulta particularmente adecuado para la solución de flujos compresibles en régimen supersónico o transónico que involucran ondas de choque en el contexto del Método de Elementos Finitos (MEF). En particular los autores de este artículo aplicaron este esquema utilizando elementos finitos hexaédricos con evaluación analítica de las matrices de elemento, en conjunto con una técnica de captura de choque para la solución de flujos aerodinámicos compresibles, viscosos y no viscosos. Sin embargo, las metodologías basadas en densidad sufren deficiencias en regímenes subsónicos compresibles para bajos números de Mach o en flujos casi incompresibles. Algunos investigadores desarrollaron el algoritmo “Characteristic Based Split” (CBS) con la intención de obtener un único esquema que presente un comportamiento adecuado, tanto en regímenes subsónicos como supersónicos. En las últimas dos décadas algunos trabajos establecieron ciertas ventajas en la convergencia del algoritmo CBS comparado con el algoritmo T-G. Sin embargo, una de las características que permiten al CBS mostrar una convergencia mejorada, es el uso de pasos de tiempo internos en la formulación de las matrices elementales, lo que, según el entender de los autores de este trabajo, no fue probado con el algoritmo T-G. El objetivo de este trabajo es implementar pasos de tiempo interiores en el algoritmo de Taylor-Galerkin y explorar el desempeño del mismo, mostrando hasta qué punto el esquema explícito de T-G, implementado usando elementos hexaédricos con evaluación analítica de las matrices elementales, puede ser estabilizado mediante el uso de estos pasos de tiempo.

1 INTRODUCCIÓN

Diferentes autores (por ejemplo Donea, 1984) demostraron que, en el contexto del MEF, el esquema T-G resulta particularmente adecuado para la solución de flujos compresibles que involucran ondas de choque en régimen supersónico o transónico a altos números de Mach. En particular, Burbridge y Awruch (2000) aplican este esquema utilizando elementos finitos hexaédricos con evaluación analítica de las matrices elementales en conjunto con una técnica de captura de choque para la solución de flujos aerodinámicos compresibles viscosos y no viscosos. Sin embargo, en regímenes subsónicos compresibles para bajos números de Mach ($M < 0.9$) o en flujos casi incompresibles, las metodologías basadas en densidad sufren deficiencias, tanto en términos de eficiencia como en precisión de la solución. Los resultados obtenidos utilizando el esquema explícito T-G de un paso para flujos subsónicos sobre perfiles alares con números de Mach entre 0.5 y 0.85 muestran convergencia lenta y resultados de presión y densidad oscilatorios (ver Burbridge, 1999). Para abordar este problema se desarrollaron varias técnicas de estabilización. En particular, el algoritmo CBS fue desarrollado por algunos investigadores, tales como Zienkiewicz y Codina (1995), con la intención de obtener un único algoritmo que presentara adecuado comportamiento, tanto en regímenes subsónicos como supersónicos. Durante las dos últimas décadas este algoritmo se estableció como una herramienta reconocidamente útil para el cómputo de un amplio espectro de flujos incompresibles o compresibles a diferentes números de Mach (ver Massarotti et. al., 2006; Boonmarlert et. al., 2004). En particular, en el trabajo presentado por Zienkiewicz et. al. (1995) se muestra la forma explícita del algoritmo y su desempeño para flujos subsónicos, transónicos y supersónicos.

Sin embargo, una de las características que permiten al CBS mostrar una convergencia mejorada es el uso de pasos de tiempo internos en la formulación de las matrices elementales (ver Nithiarasu y Zienkiewicz, 2000). Según el entender de los autores de este trabajo, esta técnica de estabilización no fue probada aún con el esquema T-G. El objetivo de este trabajo es implementar pasos de tiempo interiores en el algoritmo de Taylor-Galerkin y explorar el desempeño del mismo, mostrando hasta qué punto el esquema explícito de T-G, implementado usando elementos hexaédricos con evaluación analítica de las matrices elementales, puede ser estabilizado mediante el uso de estos pasos de tiempo.

Para ello, a los efectos de tener una comparación válida, además de desarrollar e implementar el esquema T-G se presenta aquí el algoritmo CBS implementado utilizando elementos finitos hexaédricos con integración analítica de las matrices del elemento. Se comparan las performances de esquema explícito T-G de un paso y la forma explícita del algoritmo CBS para flujos aerodinámicos viscosos compresibles pero utilizando pasos de tiempo internos en ambos casos.

2 ECUACIONES DE GOBIERNO

En una descripción Euleriana, el sistema de ecuaciones en derivadas parciales que gobierna la dinámica de los fluidos puede escribirse, en su forma conservativa, como sigue

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} = \mathbf{0} \quad (1)$$

siendo

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \rho e \end{Bmatrix}; \mathbf{F}_i = \begin{Bmatrix} \rho v_i \\ \rho v_1 v_i + p \delta_{i1} \\ \rho v_2 v_i + p \delta_{i2} \\ \rho v_3 v_i + p \delta_{i3} \\ v_i(\rho e + p) \end{Bmatrix}; \mathbf{G}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\tau_{i1} \\ -\tau_{i2} \\ -\tau_{i3} \\ -\tau_{ij} v_j - K \frac{\partial u}{\partial x_i} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

En las expresiones anteriores se tiene

- ✓ v_i son las componentes de velocidad
- ✓ ρ es la masa específica, p es la presión termodinámica
- ✓ τ_{ij} son las componentes viscosas del tensor de tensiones
- ✓ e y u son la energía total específica y la energía interna específica, respectivamente
- ✓ K es la conductividad térmica (se asume que la difusión de calor es isotrópica)
- ✓ δ_{ij} es la delta de Kronecker
- ✓ x_i y t son las coordenadas espaciales y temporal, respectivamente
- ✓ $i, j = 1, 2, 3$.

Para un fluido Newtoniano las componentes de tensión viscosas vienen dadas por

$$\tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (3)$$

donde μ y λ son la viscosidad y la viscosidad volumétrica respectivamente y $k=1,2,3$.

La ecuación de estado de los gases perfectos (aire) es la siguiente

$$p = (\gamma - 1) \rho u; \quad \gamma = c_v / c_p \quad (4)$$

donde c_v y c_p son los coeficientes de calor específico a volumen constante y a presión constante respectivamente.

La energía interna u y la temperatura se relacionan con las variables de campo independientes por la siguiente expresión

$$u = c_v T = e - \frac{1}{2} v_i v_i \quad (5)$$

donde T es la temperatura.

La ley de Sutherland se utiliza en este trabajo para establecer la dependencia de la viscosidad, la viscosidad volumétrica y el coeficiente de la conductividad térmica con respecto a la temperatura. Esta ley puede expresarse como

$$\mu = \mu_{ref} \frac{S + u_{ref}}{S + u} \left(\frac{u}{u_{ref}} \right)^{\frac{3}{2}}; \quad \lambda = -\frac{2}{3} \mu; \quad K = K_{ref} \frac{S_k + u_{ref}}{S_k + u} \left(\frac{u}{u_{ref}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (6)$$

Los valores de S y S_k pueden encontrarse en White (1974) para la ley de Sutherland basada en temperatura, y deben ser multiplicados por c_v para obtener los que se usan aquí. Es importante indicar que este sistema de ecuaciones ha sido adimensionalizado utilizando una

longitud de referencia, la densidad no perturbada y la velocidad del sonido no perturbada.

Deben aplicarse condiciones iniciales y de contorno a las ecuaciones (1) para tener el modelo matemático correctamente definido. Las condiciones forzadas de contorno (o condiciones de contorno de Dirichlet) vienen dadas por

$$\begin{aligned} v_i &= \bar{v}_i & \text{en } \Gamma_v \\ \rho &= \bar{\rho} & \text{en } \Gamma_\rho \\ u &= \bar{u} & \text{en } \Gamma_u \end{aligned} \quad (7)$$

donde \bar{v}_i , $\bar{\rho}$ y \bar{u} son los valores prescritos de las componentes de velocidad, la densidad (masa específica) y la energía interna específica, en las regiones de la superficie de contorno Γ_v , Γ_ρ y Γ_u respectivamente.

Las condiciones naturales de contorno (o condiciones de contorno de Newmann) vienen definidas, a su vez, por las siguientes expresiones

$$\left(-p\delta_{ij} + \tau_{ij}\right)n_j = \hat{t}_i \quad \text{en } \Gamma_\sigma \quad \text{con} \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (8)$$

$$K \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i = \hat{q} \quad \text{en } \Gamma_q \quad (9)$$

En las expresiones (8) y (9) se tiene

- ✓ n_i son los cosenos de los ángulos formados por el vector normal a la superficie Γ_σ o Γ_q y los ejes de referencia globales x_i .
- ✓ \hat{t}_i son las tracciones actuando sobre Γ_σ .
- ✓ \hat{q} es el flujo de calor normal actuando en Γ_q .
- ✓ Los efectos de la radiación y la convección en las superficies de contorno no han sido considerados.

Para flujos no viscosos los términos difusivos en la ecuación (1) deben omitirse. En este caso, sólo se prescribe la componente de velocidad normal al contorno sólido (nula) y sólo se tienen en cuenta las componentes normales de las cargas superficiales en el contorno del dominio.

3 FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS: EL ESQUEMA DE TAYLOR-GALERKIN

3.1 Avance en el tiempo: serie de Taylor.

El vector \mathbf{U} se puede expandir según una serie de Taylor como sigue, en donde se han omitido los términos de orden superior (Yoon & Moon et. al., 1998)

$$\Delta \mathbf{U}^{n+1} = \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \dots \quad (10)$$

Expandiendo las derivadas en (10) utilizando la expresión (1) para la derivada temporal de \mathbf{U} resultan las siguientes expresiones

$$\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\right)^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{G}_i^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v_k^n \frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} \right) \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2}\right)^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_i^{n+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Delta \mathbf{G}_i^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v_k^n \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_i^{n+1}}{\partial x_i} \right) \quad (12)$$

Reemplazando las últimas dos expresiones en (10) se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}^{n+1} = \Delta t & \left[-\frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{G}_i^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v_k^n \frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} \right) \right] + \\ & + \frac{\Delta t}{2} \left[-\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_i^{n+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Delta \mathbf{G}_i^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v_k^n \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_i^{n+1}}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

donde Δt es el paso de tiempo, n corresponde al tiempo t , $n+1$ corresponde al tiempo $t+\Delta t$, y

$$\Delta \mathbf{F}_i^{n+1} = \mathbf{F}_i^{n+1} - \mathbf{F}_i^n; \quad \Delta \mathbf{G}_i^{n+1} = \mathbf{G}_i^{n+1} - \mathbf{G}_i^n \quad (14)$$

En la expresión (13) los términos que contienen derivadas de tercer orden fueron despreciados. Como en dicha expresión las variables en el tiempo $n+1$ aparecen en ambos miembros de la ecuación, se hace necesaria la utilización de un esquema iterativo para resolver los términos en el segundo corchete (ver Donea, 1984 por detalles de este esquema).

3.2 Discretización en el espacio: MEF Galerkin.

Aplicando el método clásico de Bubnov-Galerkin a la expresión (13) en el contexto del método de los elementos finitos, y aplicando el teorema de Gauss Green a los términos con derivadas segundas, se obtienen las siguientes ecuaciones matriciales (ver Burbridge y Awruch, 2000) en donde se han omitido algunos términos de contorno que son despreciables y donde se utiliza el subíndice “I” para indicar iteración anterior e “I+1” iteración actual.

Ecuación de continuidad

$$\{\Delta \rho\}_{I+1}^{n+1} = \Delta t [\mathbf{M}_D]^{-1} \left(-[\mathbf{BC}_i] \{\mathbf{F}_i^{\rho}\}^n \right) + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{M}_D]^{-1} \left(-[\mathbf{BC}_i] \{\Delta \mathbf{F}_i^{\rho}\}_I^{n+1} \right) \quad (15)$$

Ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} \{\Delta \rho v_j\}_{I+1}^{n+1} = \Delta t [\mathbf{M}_D]^{-1} & \left(-[\mathbf{BC}_i] \{\mathbf{F}_{ij}^{\rho v}\}^n - [\mathbf{D}_{ij}] \{v_i\}^n + \{f_j\}^n \right) + \\ & + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{M}_D]^{-1} \left(-[\mathbf{BC}_i] \{\Delta \mathbf{F}_{ij}^{\rho v}\}_I^{n+1} - [\mathbf{D}_{ij}] \{\Delta v_i\}_I^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Ecuaciones de conservación de energía

$$\begin{aligned} \{\Delta \rho e\}_{I+1}^{n+1} = \Delta t [\mathbf{M}_D]^{-1} & \left(-[\mathbf{BC}_i] \{\mathbf{F}_i^{\rho e}\}^n - [\mathbf{E}_i] \{v_i\}^n - [\mathbf{K}] \{u\}^n + \{q\}^n \right) + \\ & + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{M}_D]^{-1} \left(-[\mathbf{BC}_i] \{\Delta \mathbf{F}_i^{\rho e}\}_I^{n+1} - [\mathbf{E}_i] \{\Delta v_i\}_I^{n+1} - [\mathbf{K}] \{\Delta u\}_I^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Siendo:

$$[BC_i] = [B_i] + [C_i]; \quad [B_i] = \int_{\Omega_E} [\Phi]^T \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_i} d\Omega; \quad [C_i] = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_E} ([\Phi]\{v_k\}^n) \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial x_k} \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_i} d\Omega$$

con $i, j, k=1, 2, 3$, y:

$$[D_{ij}] = \begin{cases} \int_{\Omega_E} \mu \left(2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial x_i} \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_{(i)}} d\Omega + \int_{\Omega_E} \mu \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial x_k} \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_k} d\Omega, & \text{si } i = j, y: \begin{cases} i = 1 \rightarrow k = 2, 3 \\ i = 2 \rightarrow k = 1, 3 \\ i = 3 \rightarrow k = 1, 2 \end{cases} \\ \int_{\Omega_E} \mu \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial x_i} \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega_E} \lambda \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial x_j} \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_i} d\Omega, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$[E_i] = \int_{\Omega_E} \left[\mu ([\Phi]\{v_i\}^n) \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial x_k} \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_k} + \mu ([\Phi]\{v_k\}^n) \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial x_i} \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_k} \right] d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega_E} \lambda ([\Phi]\{v_k\}^n) \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial x_k} \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_i} d\Omega$$

$$[K] = \int_{\Omega_E} K \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial x_i} \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_i} d\Omega$$

$$[M_D] = \begin{cases} \frac{\Omega_E}{8} & \text{para los términos de la diagonal ppal.} \\ 0 & \text{para todos los términos fuera de la diagonal ppal.} \end{cases}$$

$$\{F_i^p\} = \{\rho v_i\}; \quad \{F_{ij}^{\rho v}\} = \{\rho v_i v_j + p \delta_{ij}\}; \quad \{F_i^{\rho e}\} = \{\rho e v_i + p v_i\}$$

$$\{f_j\}^n = \int_{\Gamma_E} [\Phi^*]^T \left[\mu \left(\frac{\partial[\Phi]}{\partial x_i} \{v_j\}^n + \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_j} \{v_i\}^n \right) + \lambda \left(\frac{\partial[\Phi]}{\partial x_k} \{v_k\}^n \right) \delta_{ij} \right] n_i d\Gamma$$

$$\{q\}^n = \int_{\Gamma_E} [\Phi^*]^T ([\Phi]\{v_j\}^n) \left[\mu \left(\frac{\partial[\Phi]}{\partial x_i} \{v_j\}^n + \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_j} \{v_i\}^n \right) + \lambda \left(\frac{\partial[\Phi]}{\partial x_k} \{v_k\}^n \right) \delta_{ij} \right] n_i d\Gamma +$$

$$+ \int_{\Gamma_E} [\Phi^*]^T K \left(\frac{\partial[\Phi]}{\partial x_i} \{u\}^n \right) n_i d\Gamma$$

En estas expresiones Ω_E y Γ_E son el volumen del elemento y su superficie de contorno respectivamente, $[\Phi] = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_8]$ es la matriz fila que contiene a las funciones de interpolación para cada nodo local, $[\Phi^*]$ es la matriz fila que contiene las funciones de interpolación evaluadas en el contorno de las superficie y $[M_D]$ es la matriz de masa concentrada.

Debe notarse que las expresiones (15), (16) y (17) constituyen un esquema explícito que resulta condicionalmente estable (ver Huebner et al 1995). Utilizando la inversa de la matriz de masa diagonalizada (masa concentrada) no se requiere la inversión de la matriz de masa consistente.

Una vez ensambladas las ecuaciones (15), (16) y (17) para todos los elementos de la malla y aplicadas las correspondientes condiciones de contorno, los valores nodales de ρ , ρv_j , y ρe se pueden calcular a cada paso de tiempo usando un esquema iterativo. Luego los valores nodales de las componentes de velocidad y energía total específica pueden obtenerse inmediatamente para entonces calcular los valores nodales de la energía interna específica y, utilizando la ecuación de estado, los valores nodales de presión. Para casos no viscosos, donde los términos viscosos no son tenidos en cuenta, se omiten los términos que contienen a las matrices $[D_{ij}]$, $[E_i]$ y $[K]$ y a los vectores $\{f_j\}^n$ y $\{q\}^n$.

4 FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS: MÉTODO CBS.

El algoritmo CBS para flujo compresible consiste de cuatro pasos. En el primer paso se calculan valores intermedios de las variables conservativas o variables de flujo de las ecuaciones de cantidad de movimiento omitiendo los términos que contienen gradientes de presión. En el segundo paso se resuelve la ecuación de continuidad para obtener los incrementos de densidad en el fluido. En el tercer paso se actualizan las variables de flujo de las ecuaciones de cantidad de movimiento. Finalmente en el cuarto paso se resuelve la ecuación de la energía y se calcula la presión usando la ecuación de estado.

Los cuatro pasos mencionados anteriormente constituyen la discretización temporal de las ecuaciones de conservación en su forma conservativa. Las ecuaciones de gobierno discretizadas en el tiempo resultan

$$\Delta(\rho v_j)_*^{n+1} = \Delta t \left[-\frac{\partial(\rho v_j v_i)^n}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} v_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial(\rho v_j v_i)^n}{\partial x_i} \right) \right] \quad (18)$$

$$\Delta(\rho)^{n+1} = \Delta t \left[-\frac{\partial(\rho v_i)^n}{\partial x_i} - \frac{\partial \Delta(\rho v_i)_*^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right) \right] \quad (19)$$

$$\Delta(\rho v_j)^{n+1} = \Delta(\rho v_j)_*^{n+1} + \Delta t \left[-\frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} v_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right) \right] \quad (20)$$

$$\Delta(\rho e)^{n+1} = \Delta t \left[-\frac{\partial(\rho e v_i + p v_i)^n}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j \tau_{ij}^n}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^n + \frac{\Delta t}{2} v_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial(\rho e v_i + p v_i)^n}{\partial x_i} \right) \right] \quad (21)$$

Una vez planteada la discretización temporal se procede a la discretización en el dominio espacial utilizando el método clásico de Bubnov-Galerkin. Los términos que involucran derivadas segundas de la posición en las expresiones aproximadas se integran por partes utilizando el teorema de Gauss-Green para relajar las exigencias sobre las funciones de interpolación en términos de continuidad en la frontera entre elementos. Una vez implementado este método se obtienen las siguientes expresiones

Paso 1: Resolución de las variables de flujo de cantidad de movimiento intermedias

$$\{\Delta \rho v_j\}_*^{n+1} = \Delta t_{ext} [M_D]^{-1} \left(-[BCH_i] \{\rho v_j v_j\}^n - [D_{ij}] \{v_i\}^n + \{f_j\}^n \right) \quad (22)$$

Paso 2: Resolución de la ecuación de continuidad

$$\{\Delta \rho\}^{n+1} = \Delta t_{ext} [M_D]^{-1} \left(-[B_i] \{\rho v_i\}^n - [B_i] \{\Delta \rho v_i\}_*^{n+1} - [P] \{p\}^n - \{h\}^n \right) \quad (23)$$

Paso 3: Cálculo de la corrección de variables de flujo de cantidad de movimiento

$$\{\Delta \rho v_j\}^{n+1} = \{\Delta \rho v_j\}_*^{n+1} + \Delta t_{ext} [M_D]^{-1} (- [BCH_i] \{p\}^n) \quad (24)$$

Paso 4: Resolución de la ecuación de la energía

$$\{\Delta \rho e\}^{n+1} = \Delta t_{ext} [M_D]^{-1} (- [BCH_i] \{v_i(\rho e + p)\}^n - [E_i] \{v_i\}^n - [K] \{u\}^n + \{q\}^n) \quad (25)$$

Las matrices $[M_D]$, $[D_{ij}]$, $[E_i]$ y $[K]$ y vectores $\{f_j\}^n$ y $\{q\}^n$ son las mismas que las obtenidas con el esquema T-G. Sin embargo, para el algoritmo CBS aquí implementado aparecen las siguientes matrices y vectores que deben considerarse.

$$\begin{aligned} [B_i] &= \int_{\Omega_E} [\Phi]^T \frac{\partial [\Phi]}{\partial x_i} d\Omega \quad ; \quad [H_i] = \frac{\Delta t_{in}}{2} \int_{\Omega_E} \left[\frac{\partial [\Phi]}{\partial x_i} \{v_k\}^n \right] [\Phi]^T \frac{\partial [\Phi]}{\partial x_i} d\Omega \quad ; \\ [C_i] &= \frac{\Delta t_{in}}{2} \int_{\Omega_E} ([\Phi] \{v_k\}^n) \frac{\partial [\Phi]^T}{\partial x_k} \frac{\partial [\Phi]}{\partial x_i} d\Omega \quad ; \quad [BCH_i] = [B_i] + ([C_i] + [H_i]) \\ [P] &= \frac{\Delta t_{in}}{2} \int_{\Omega_E} \frac{\partial [\Phi]^T}{\partial x_i} \frac{\partial [\Phi]}{\partial x_i} d\Omega \quad ; \quad \{h\}^n = \frac{\Delta t_{in}}{2} \int_{\Gamma_E} [\Phi^*]^T \left(\frac{\partial [\Phi]}{\partial x_i} \{p\}^n \right) n_i d\Gamma \end{aligned}$$

5 CONDICIÓN DE ESTABILIDAD Y PASO DE TIEMPO INTERNO.

5.1 Condición de estabilidad de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL).

Considerando que los dos métodos propuestos son explícitos, los mismos resultan condicionalmente estables. La condición de estabilidad CFL para cada elemento, en forma adimensional, viene dada por

$$\Delta t_E = \beta \frac{\frac{L_E}{L_{ref}}}{M + \frac{c}{c_{ref}}} \quad (26)$$

donde L_E es la dimensión característica del elemento, c es la velocidad del sonido promedio de elemento L_{ref} y c_{ref} son una longitud y la velocidad de sonido de referencia del problema respectivamente, M es el Mach local en el elemento y β es un coeficiente de seguridad que adopta valores tales que $0.2 \leq \beta \leq 0.7$.

5.2 Método CBS: Paso de tiempo interno.

Las ecuaciones fueron resueltas, en primera instancia, con un valor uniforme de Δt en toda la malla de elementos finitos, adoptando el menor valor entre todos los Δt_E obtenidos aplicando (26). Sin embargo, algunos investigadores (Nithiarasu and Zienkiewicz, 2000) han determinado que mediante la utilización del Δt local en los términos estabilizadores del método CBS -aquellos que contienen derivadas segundas de las variables de flujo o de la presión- proporciona mejor estabilización de las aproximaciones espaciales. Por lo tanto al formar las matrices $[B^{CH}_i]$ y $[P]$ y el vector $\{h\}^n$ se utiliza un paso de tiempo local $\Delta t = \Delta t_{in}$.

Si bien podría pensarse que esto constituye un error ya que no se está respetando un paso de tiempo uniforme, en realidad esto no ocurre, ya que el paso de tiempo que domina el avance en el tiempo es el que aparece en las ecuaciones (22), (23), (24) y (25) Δt_{ext} mientras

que el paso de tiempo interno Δt_{in} es un valor que sólo afecta a ciertas matrices y vectores en las ecuaciones de elemento y puede adaptarse para que sea tal que la convergencia general del método CBS se vea mejorada.

Efectivamente, en el trabajo mencionado anteriormente se muestra claramente que el método CBS con paso de tiempo interno presenta una mejora de convergencia cuando se lo compara con el mismo método CBS con paso de tiempo único, y con el método de T-G.

5.3 Método T-G: Paso de tiempo interno.

Sin embargo, si bien en aquellos trabajos mencionados en el punto anterior queda bien establecida la mejoría en la convergencia lograda utilizando el método CBS con paso de tiempo interno, según el mejor entender de los autores de este trabajo, aún no se ha probado utilizar un paso de tiempo interior con el esquema T-G, lo cual, en rigor, debería ser realizado a los efectos de ponderar si efectivamente la utilización de un paso de tiempo interno puede mejorar la convergencia del esquema T-G a tal punto de hacer comparable sus resultados con los del método CBS. Haciendo esto las ecuaciones para el esquema T-G resultan:

Ecuación de continuidad

$$\{\Delta\rho\}_{I+1}^{n+1} = \Delta t_{ext} [M_D]^{-1} \left(-[BC_i] \{F_i^p\}^n \right) + \frac{\Delta t_{ext}}{2} [M_D]^{-1} \left(-[BC_i] \{\Delta F_i^p\}_I^{n+1} \right) \quad (27)$$

Ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} \{\Delta\rho v_j\}_{I+1}^{n+1} = & \Delta t_{ext} [M_D]^{-1} \left(-[BC_i] \{F_{ij}^{pv}\}^n - [D_{ij}] \{v_i\}^n + \{f_j\}^n \right) + \\ & + \frac{\Delta t_{ext}}{2} [M_D]^{-1} \left(-[BC_i] \{\Delta F_{ij}^{pv}\}_I^{n+1} - [D_{ij}] \{\Delta v_i\}_I^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

Ecuaciones de conservación de energía

$$\begin{aligned} \{\Delta\rho e\}_{I+1}^{n+1} = & \Delta t_{ext} [M_D]^{-1} \left(-[BC_i] \{F_i^{\rho e}\}^n - [E_i] \{v_i\}^n - [K] \{u\}^n + \{q\}^n \right) + \\ & + \frac{\Delta t_{ext}}{2} [M_D]^{-1} \left(-[BC_i] \{\Delta F_i^{\rho e}\}_I^{n+1} - [E_i] \{\Delta v_i\}_I^{n+1} - [K] \{\Delta u\}_I^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Siendo

$$[BC_i] = [B_i] + [C_i]; \quad [B_i] = \int_{\Omega_E} [\Phi]^T \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_i} d\Omega; \quad [C_i] = \frac{\Delta t_{in}}{2} \int_{\Omega_E} ([\Phi] \{v_k\}^n) \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial x_k} \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_i} d\Omega$$

mientras que el resto de las matrices y vectores no resultan modificados.

5.4 Método T-G modificado: Paso de tiempo interno.

Además de las consideraciones hechas en el punto 5.3, puede notarse que el principal problema de estabilización a resolver está dado en los valores de densidad y presión, que fundamentalmente están controlados por la ecuación de continuidad. Teniendo en cuenta esta observación puede proponerse una modificación al esquema T-G que consiste en cambiar el término estabilizador en la ecuación de continuidad por una expresión similar, pero definida a partir de la presión, como la que se utiliza en el método CBS. Las ecuaciones de cantidad de movimiento y de energía no se modifican, y se mantienen los términos iterativos, por lo cual este esquema continúa respondiendo a la forma del esquema T-G (no es CBS). Únicamente se modifica el término estabilizador en la ecuación de continuidad. Haciendo esto las ecuaciones de gobierno ya discretizadas en el tiempo, para el esquema T-G modificado, resultan

$$\Delta(\rho)_{I+1}^{n+1} = \Delta t \left[-\frac{\partial(\rho v_i)^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\Delta t}{2} \left[-\frac{\partial \Delta(\rho v_i)_I^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Delta p_I^{n+1}}{\partial x_i} \right) \right] \quad (30)$$

$$\Delta(\rho v_j)_{I+1}^{n+1} = \Delta t \left[-\frac{\partial(\rho v_j v_i + p \delta_{ij})^n}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v_k^n \frac{\partial(\rho v_j v_i + p \delta_{ij})^n}{\partial x_i} \right) \right] + \quad (31)$$

$$+ \frac{\Delta t}{2} \left[-\frac{\partial \Delta(\rho v_j v_i + p \delta_{ij})_I^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial \Delta \tau_{ij}^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v_k^n \frac{\partial \Delta(\rho v_j v_i + p \delta_{ij})_I^{n+1}}{\partial x_i} \right) \right]$$

$$\Delta(\rho e)^{n+1} = \Delta t \left[-\frac{\partial(\rho e v_i + p v_i)^n}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j \tau_{ij}^n}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^n + \frac{\Delta t}{2} v_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial(\rho e v_i + p v_i)^n}{\partial x_i} \right) \right] + \quad (32)$$

$$+ \frac{\Delta t}{2} \left[-\frac{\partial \Delta(\rho e v_i + p v_i)_I^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial \Delta(v_j \tau_{ij})_I^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial \Delta u_I^{n+1}}{\partial x_i} \right) + \frac{\Delta t}{2} v_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \Delta(\rho e v_i + p v_i)_I^{n+1}}{\partial x_i} \right) \right]$$

Nuevamente, se procede a la discretización en el dominio espacial utilizando el método clásico de Bubnov-Galerkin. Lo hacemos aquí sobre la nueva expresión de la ecuación de continuidad, ya que las otras ecuaciones no se modifican con respecto a las expresadas en 5.3. Los términos que involucran derivadas segundas de la posición en las expresiones aproximadas se integran por partes utilizando el teorema de Gauss-Green para relajar las exigencias sobre las funciones de interpolación en términos de continuidad en la frontera entre elementos. Se obtienen las siguientes expresiones:

Ecuación de continuidad

$$\{\Delta \rho\}_{I+1}^{n+1} = \Delta t_{ext} [\mathbf{M}_D]^{-1} \left(-[\mathbf{B}_i] \{F_i^p\}^n - [\mathbf{P}] \{p\}^n - \{h\}^n \right) + \frac{\Delta t_{ext}}{2} [\mathbf{M}_D]^{-1} \left(-[\mathbf{P}] \{\Delta p\}_I^{n+1} \right) \quad (33)$$

Ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento

$$\{\Delta \rho v_j\}_{I+1}^{n+1} = \Delta t_{ext} [\mathbf{M}_D]^{-1} \left(-[\mathbf{BC}_i] \{F_{ij}^{pv}\}^n - [\mathbf{D}_{ij}] \{v_i\}^n + \{f_j\}^n \right) + \quad (34)$$

$$+ \frac{\Delta t_{ext}}{2} [\mathbf{M}_D]^{-1} \left(-[\mathbf{BC}_i] \{\Delta F_{ij}^{pv}\}_I^{n+1} - [\mathbf{D}_{ij}] \{\Delta v_i\}_I^{n+1} \right)$$

Ecuaciones de conservación de energía

$$\{\Delta \rho e\}_{I+1}^{n+1} = \Delta t_{ext} [\mathbf{M}_D]^{-1} \left(-[\mathbf{BC}_i] \{F_i^{pe}\}^n - [\mathbf{E}_i] \{v_i\}^n - [\mathbf{K}] \{u\}^n + \{q\}^n \right) + \quad (35)$$

$$+ \frac{\Delta t_{ext}}{2} [\mathbf{M}_D]^{-1} \left(-[\mathbf{BC}_i] \{\Delta F_i^{pe}\}_I^{n+1} - [\mathbf{E}_i] \{\Delta v_i\}_I^{n+1} - [\mathbf{K}] \{\Delta u\}_I^{n+1} \right)$$

Siendo todas las matrices y vectores los indicados en párrafos precedentes.

6 ASPECTOS COMUNES A AMBOS ESQUEMAS.

Con el objetivo de capturar las fuertes discontinuidades y eliminar oscilaciones de alta frecuencia cerca de las ondas de choque, se utiliza un conocido método que adiciona viscosidad artificial selectivamente sólo en las regiones del dominio con fuertes gradientes de presión (Argyris et. al., 1989). La solución suavizada se obtiene a partir de la solución no suavizada utilizando la siguiente expresión

$$\{\mathbf{U}_s\}^{n+1} = \{\mathbf{U}\}^{n+1} + [\mathbf{M}_D]^{-1} \{\mathbf{D}\}^n \quad (36)$$

donde el vector de amortiguamiento ficticio viene dado por

$$\{\mathbf{D}\}^n = \sum_{E=1}^{NEM} C_E C_{AD} S_E ([\mathbf{M}] - [\mathbf{M}_D])_E \{\mathbf{U}\}^n \quad (37)$$

En (37) NEM es la cantidad de elementos de la malla, $C_E = \Delta t / \Delta t_E$ es el número de Courant local, C_{AD} es un coeficiente de viscosidad artificial dado por el usuario (en este trabajo se adoptaron valores $C_{AD} = 2.0$ para flujos viscosos y $0.2 \leq C_{AD} \leq 0.4$ para flujos no viscosos) y S_E es un sensor de presiones a nivel de elemento obtenido como un promedio de los valores nodales S_N del elemento. Los valores S_N son componentes del siguiente vector global

$$\{\mathbf{S}\}^n = \frac{\sum_E |([\mathbf{M}] - [\mathbf{M}_D])_E \{p\}_E^n|}{\sum_E |([\mathbf{M}] - [\mathbf{M}_D])_E \{p\}_E^n|} \quad (38)$$

donde las barras indican valor absoluto y $[\mathbf{M}]$ es la matriz de masa consistente del elemento

$$[\mathbf{M}] = \int_{\Omega_E} [\Phi]^T [\Phi] d\Omega \quad (39)$$

La convergencia del proceso iterativo es obtenida cuando las siguientes condiciones son satisfechas simultáneamente

$$r_{I+1}^p = \left[\frac{\sum_N |\rho_{I+1} - \rho_I|^2}{\sum_N \rho_I^2} \right]^{\frac{1}{2}} \leq T_o; \quad r_{I+1}^{pv} = \left[\frac{\sum_N |\rho v_{iI+1} - \rho v_{iI}|^2}{\sum_N \rho v_{iI}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \leq T_o; \quad r_{I+1}^{pe} = \left[\frac{\sum_N |\rho e_{I+1} - \rho e_I|^2}{\sum_N \rho e_I^2} \right]^{\frac{1}{2}} \leq T_o$$

donde N es un índice de nodos ($N=1,2,3,\dots,NNODES$) y $NNODES$ es la cantidad total de nodos de la malla de elementos finitos. La tolerancia adoptada en este trabajo es $T_o=1*10^{-3}$, pero la misma puede ser fijada en valores diferentes.

El proceso de solución finaliza cuando la variable t (tiempo) alcanza un valor predeterminado, previamente establecido por el usuario, o cuando se llega al estado estacionario. Esta última condición se considera cumplida cuando la siguiente expresión

$$R^{n+1} = \left[\sum_N |\rho^{n+1} - \rho^n|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq TOL_t \quad (40)$$

se satisface durante un cierto número de pasos de tiempo. En este trabajo se utilizaron valores de $TOL_t = 10^{-3}$, $TOL_t = 10^{-4}$ y $TOL_t = 10^{-5}$

7 INTEGRACIÓN EXPLÍCITA DE LAS MATRICES ELEMENTALES.

En este trabajo se utilizaron elementos hexaédricos isoparamétricos de ocho nodos. En las figuras 1 y 2 se muestra el elemento en el espacio físico y computacional respectivamente. Las funciones de interpolación de este elemento vienen dadas por las siguientes expresiones

$$\Phi_N = \frac{1}{8} (1 + \xi_{1N} \xi_1) (1 + \xi_{2N} \xi_2) (1 + \xi_{3N} \xi_3) \quad (41)$$

donde $N=1,2, \dots, 8$ y ξ_{iN} son las coordenadas naturales del nodo N . Las derivadas de las funciones de interpolación respecto de las coordenadas globales vienen dadas por

$$\frac{\partial[\Phi]}{\partial x_j} = J_{ij}^{-1} \frac{\partial[\Phi]}{\partial \xi_i} \quad (42)$$

siendo J_{ij}^{-1} las componentes de la matriz Jacobiana inversa \mathbf{J} , la cual puede expresarse de la siguiente forma

$$\mathbf{J}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial[\Phi]}{\partial \xi_1}\{x_1\} & \frac{\partial[\Phi]}{\partial \xi_1}\{x_2\} & \frac{\partial[\Phi]}{\partial \xi_1}\{x_3\} \\ \frac{\partial[\Phi]}{\partial \xi_2}\{x_1\} & \frac{\partial[\Phi]}{\partial \xi_2}\{x_2\} & \frac{\partial[\Phi]}{\partial \xi_2}\{x_3\} \\ \frac{\partial[\Phi]}{\partial \xi_3}\{x_1\} & \frac{\partial[\Phi]}{\partial \xi_3}\{x_2\} & \frac{\partial[\Phi]}{\partial \xi_3}\{x_3\} \end{bmatrix} \quad (43)$$

donde $\{x_i\}$ es el vector que contiene las coordenadas globales de los ocho nodos del elemento, y $d\Omega = |\mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ es el diferencial de volumen siendo $|\mathbf{J}|$ el determinante Jacobiano.

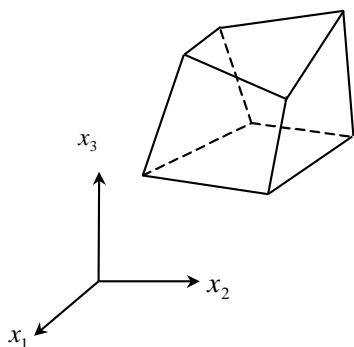


Figura 1: Espacio físico.

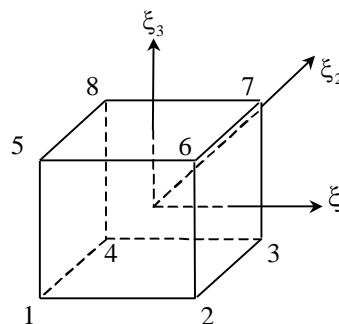


Figura2: Espacio computacional.

Reemplazando las expresiones (41), (42) y (43) en las matrices y vectores de elemento definidas tanto para el esquema T-G como para el algoritmo CBS, se obtienen integrales que pueden resolverse en el dominio computacional. Pero estas integrales requerirían de utilizar un esquema de integración numérica del tipo Gauss-Legendre, para poder obtener los valores de las matrices elementales que luego serán ensambladas. Sin embargo, en este trabajo se evalúan el determinante Jacobiano y la inversa de la matriz Jacobiana en el punto central de elemento donde $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ y, de esta forma, los integrandos se simplifican notablemente pudiendo obtener expresiones analíticas ya integradas que no requieren de integración numérica (ver Molina y Huot, 1992; Burbridge y Awruch, 2000). Esto trae aparejado una ventaja en la eficiencia de los códigos computacionales, pero debe prestarse especial atención a la distorsión de los elementos de la malla así como también a la aplicación de una técnica de control de modos espurios de Hourglass.

8 RESULTADOS COMPARATIVOS.

8.1 Flujo transónico en torno a un perfil aerodinámico.

El siguiente caso corresponde a un perfil aerodinámico NACA 0012 en régimen transónico: $M=0.85$, $Re = 2000$. Para Re mayores debería utilizarse una malla muy refinada y

un modelo de turbulencia. Este problema fue resuelto por varios autores (ver Mittal et. al., 1998) y por lo tanto se cuenta con resultados de referencia para los estudios comparativos.

La geometría y otros parámetros importantes de este problema se muestran en la figura 3. Considerando que la malla utilizada es tridimensional con un único elemento en la dirección x_3 , se impone la condición $v_3 = 0,0$ en los contornos laterales de manera de evitar el flujo de masa a través de dichos contornos, conservando la característica bidimensional del flujo.

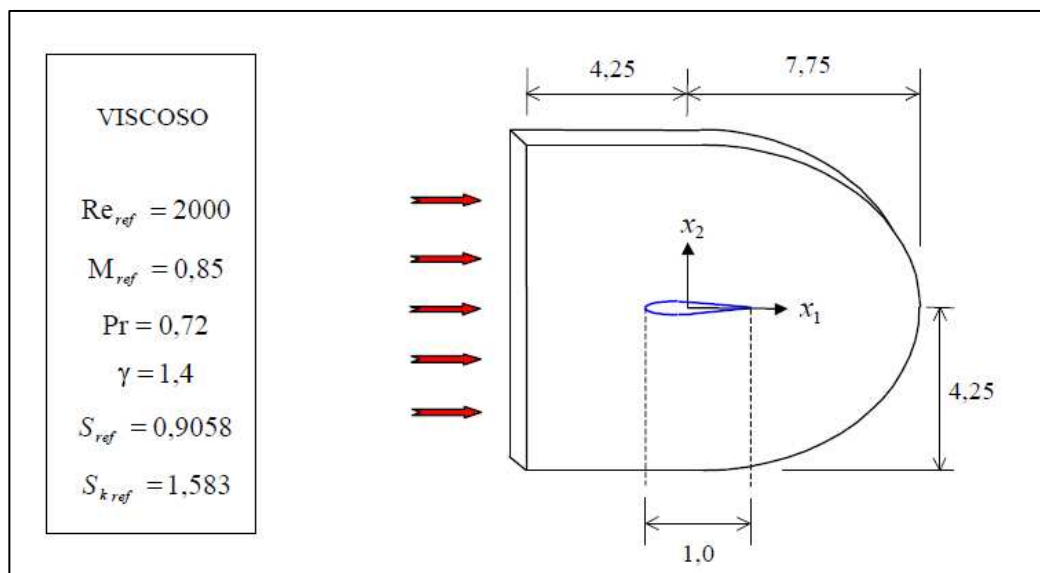


Figura 3 – Vista lateral y características de flujo.

En las figuras 4 y 5 se muestran detalles de la vista lateral de la malla de elementos finitos, la cual cuenta con 23566 elementos hexaédricos y 47616 nodos.

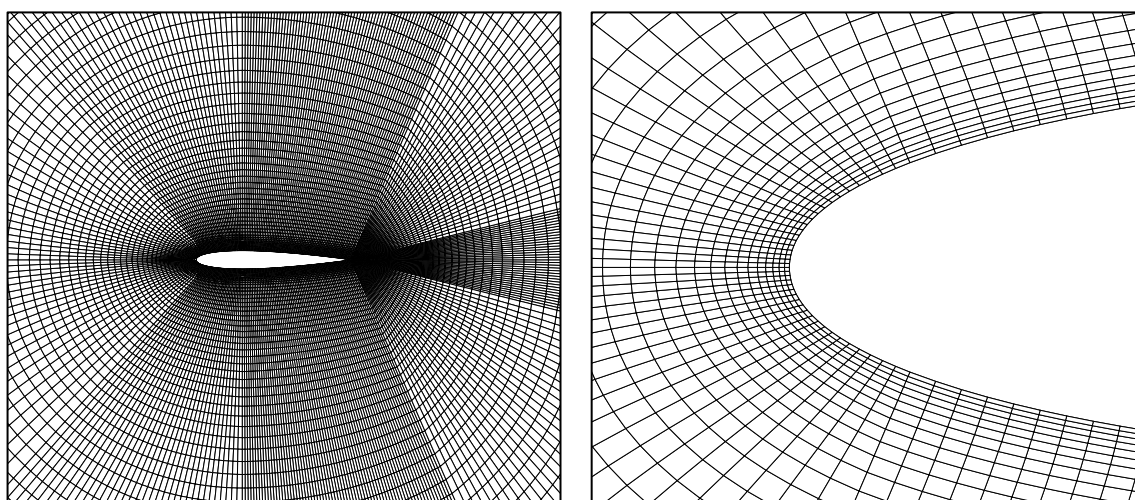


Figura 4 – Vista lateral de la malla: perfil completo. Figura 5: Vista lateral de la malla: borde de ataque.

Las condiciones de contorno en la entrada son

$$v_{1\infty} = 0.85; v_{2\infty} = v_{3\infty} = 0.0; u_{\infty} = 1.7857; \rho_{\infty} = 1.0$$

Sobre los contornos sólidos (sobre el perfil) se aplica la condición de no deslizamiento

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0.0$$

conjuntamente con la temperatura de estancamiento, la cual se especifica utilizando la energía interna específica, según la siguiente expresión

$$u_{stg} = u_{\infty} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{\infty}^2 \right) = 2.0437$$

y las condiciones en los contornos de salida se especifican utilizando los vectores $\{f_j\}$ y $\{q\}$.

Las condiciones iniciales vienen dadas por

$$v_1^0 = 0.85; v_2^0 = v_3^0 = 0.0; u^0 = 1.7857; \rho^0 = 1.0 \text{ y } p^0 = 0.71428$$

Estos valores se definen en toda los nodos de la malla, a excepción de los nodos donde se prescribieron condiciones de contorno de Dirichlet.

Utilizando el factor de seguridad $\beta = 0.3$, definido en (22) el paso de tiempo adimensional efectivo utilizado en este problema resultó $\Delta t = 0.8 \cdot 10^{-4}$. El coeficiente de viscosidad artificial, definido en (37), utilizado en este problema es $C_{AD} = 0.4$.

El coeficiente de fricción superficial (*skin friction*) c_f y el coeficiente de presión c_p fueron calculados utilizando las siguientes expresiones

$$c_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho_{ref} |v_{ref}|^2}; \quad c_p = \frac{p - p_{ref}}{\frac{1}{2} \rho_{ref} |v_{ref}|^2}$$

donde τ y p son las componentes tangencial y normal, respectivamente, de las fuerzas por unidad de área actuando en cada punto de la superficie de contorno sólido.

Las figuras 6 a 10 muestran los contornos de presión obtenidos con los diferentes algoritmos presentados en este trabajo.

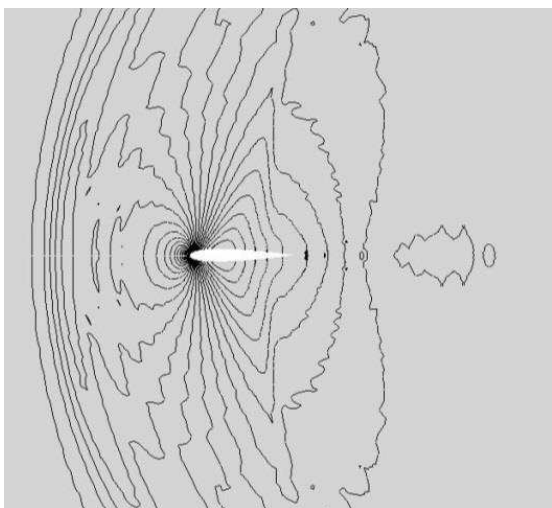


Figura 6 – Contornos de Presión (CBS)

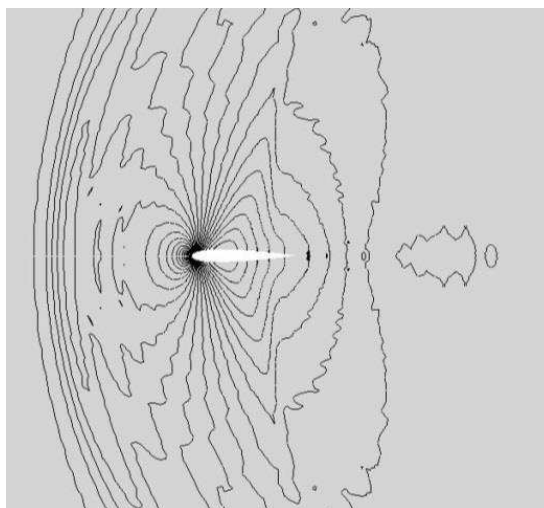


Figura 7 – Contornos de Presión (T-G)

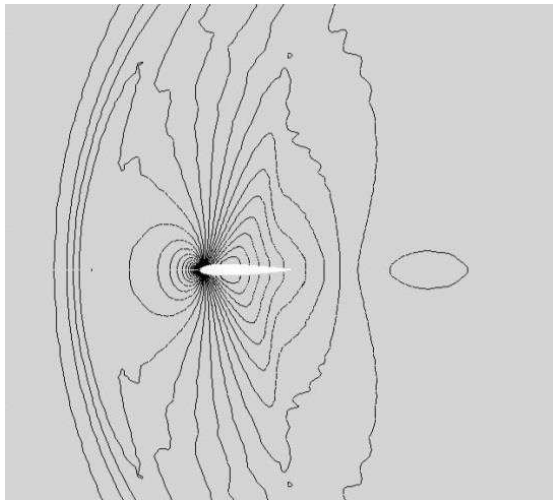


Figura 8 – Contornos de Presión (CBS) con Δt_{int}

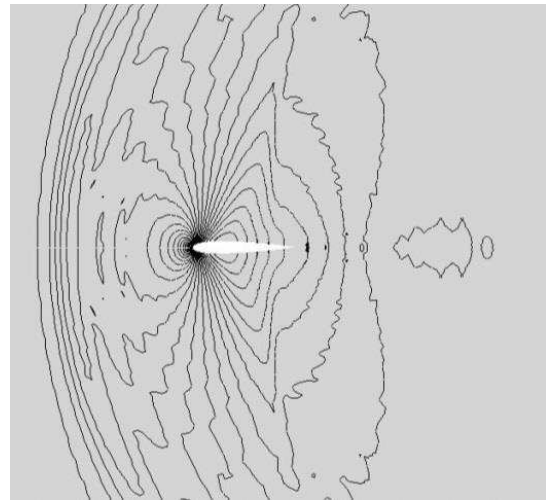


Figura 9 – Contornos de Presión (T-G) con Δt_{int}

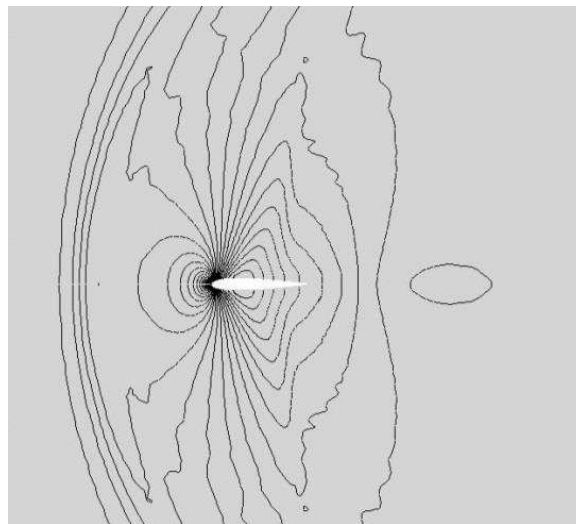


Figura 10 – Contornos de Presión (T-G Modificado) con Δt_{int}

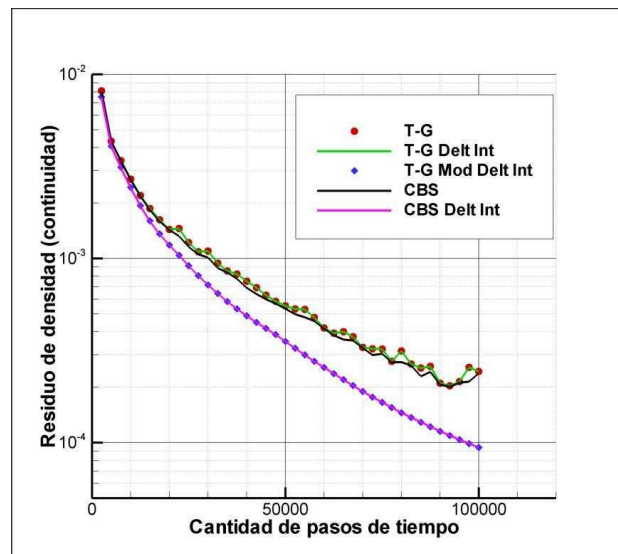


Figura 11 – Residuos mostrando convergencia de los diferentes algoritmos.

En la figura 11 se muestra la convergencia de los esquemas considerados. El análisis de los contornos de presión y de los residuos de densidad arroja una clara determinación. El método CBS sólo presenta una mejora sustantiva en la convergencia de densidad (y presión) cuando se lo utiliza con un paso de tiempo interior local. De lo contrario la curva del residuo se coloca apenas por debajo de la curva obtenida con el esquema T-G. También se observa que la utilización de un paso de tiempo interno con el método original T-G no ofrece ninguna ventaja comparativa con respecto al esquema original tomando un paso de tiempo único. Por el contrario, la performance del método T-G modificado con paso de tiempo interno local, es equivalente a la obtenida con el algoritmo CBS con paso de tiempo interno local.

En la figura 12 se muestra una imagen del coeficiente de fricción c_f calculado con el método T-G modificado, comparando con valores obtenidos numéricamente por Mittal et. al. (1998), que muestran la buena concordancia con los resultados provistos en dicha referencia para el coeficiente de fricción.

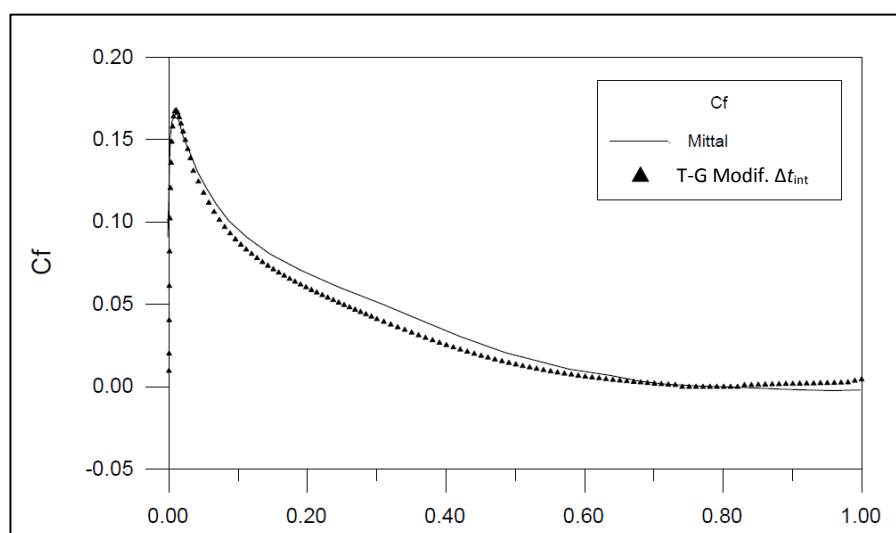


Figura 12 – Coeficiente de fricción sobre el perfil simétrico.

La figura 13 muestra los resultados numéricos obtenidos por Cambier (1987) y con el esquema T-G modificado, para el coeficiente de presión sobre el perfil simétrico NACA 0012.

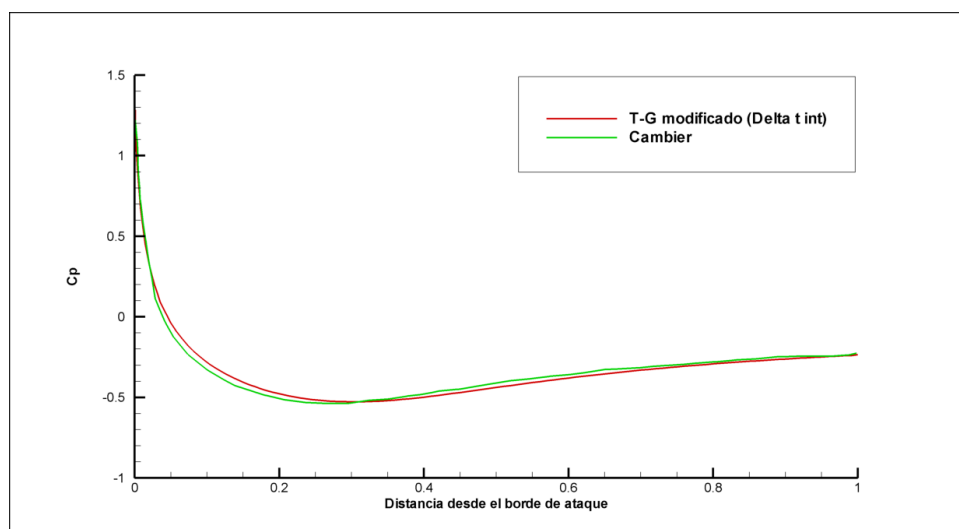


Figura 13 – Coeficiente de presión según Cambier y T-G Modificado (Δt_{int})

Como puede verse los resultados obtenidos para este coeficiente con el método T-G modificado aplicando un paso de tiempo interior resultan muy próximos a los valores de la referencia citada.

9 CONCLUSIONES

Comparando los residuos puede observarse que el método CBS apenas si presenta mejor convergencia que el esquema T-G. Pero la mejor convergencia se obtiene usando CBS con Δt_{in} local, el cual muestra contornos de presión mucho menos oscilatorios. Aunque no se presenta aquí, lo mismo puede decirse para los contornos de densidad y temperatura. En particular, el método de T-G además presenta un comportamiento oscilatorio en los elementos cercanos al contorno sólido (capa límite) que no aparece con el método CBS.

Utilizando un paso de tiempo interno local con el método original de T-G, no se observa ninguna mejor en términos de convergencia de densidad y de oscilación de presión. Sin embargo, realizando una modificación en el término estabilizador de la ecuación de continuidad y utilizando un paso de tiempo interno local, el método de T-G así modificado presenta una convergencia comparable con la del método CBS con paso de tiempo interior local.

Si bien el método CBS no requiere de un proceso iterativo como sí lo requiere T-G, en la práctica estos términos iterativos sólo se calculan en pocos pasos de tiempo, por lo cual el método T-G resulta más eficiente que el método CBS, ya que no requiere hacer el “split” que implica calcular una variable auxiliar de cantidad de movimiento para luego utilizarla para calcular la densidad y, posteriormente, actualizar los valores de cantidad de movimiento. De esta forma, con la convergencia mejorada que presenta el método T-G modificado, se tiene un esquema eficiente y que presenta la mejor convergencia posible.

REFERENCIAS

- Argyris, J., Doltsinis, I. S., and Friz, H., Hermes space shuttle: exploration of reentry aerodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 73, pp. 1-51, 1989.
- Boonmarlert, P., Phongthanapanich, S., and Dechaumpai, P., High-Speed Compressible Flow by Combined Characteristic-Based Split Method and Adaptive Meshing Technique, *Proceedings of the 18th ME-NETT Conference*. Khon Kaen, Thailand, 2004.
- Burbridge, H.P. and Awruch A.M., A Finite Element Taylor-Galerkin Scheme for 3-D Numerical Simulation of High Compressible Flow with Analytical Evaluation of Element Matrices. *Hybrid Methods in Engineering*. Vol. 2 '2000. Begell House Inc. N.Y.
- Burbridge, H.P., O esquema explícito de Taylor-Galerkin na simulação numérica de escoamentos compressíveis tridimensionais utilizando elementos finitos hexaédricos de oito nós, *Tese de mestrado. Programa de pós-graduação em Engenharia Civil*. UFRGS, Porto Alegre. 1999.
- Cambier, L., Computation of Viscous Transonic Flows Using an Unsteady Type Method and a Zonal Grid Refinement Technique. *Numerical Simulation of Compressible Navier-Stokes Flow. Volume 18 of the series Notes on Numerical Fluid Mechanics* pp 105-122, 1987.
- Donea, J., A Taylor-Galerkin method for convective transport problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, pp. 101-119, 1984.
- Huebner, K. H., Thornton, E. A., Byrom, T.G., The Finite Element Method for Engineers. Third Edition. *John Wiley and Sons, Inc.*, pp 237-243, 1995.
- Massarotti, N., Arpino, F., Lewis, R.W., and Nithiarasu, P., Explicit and semi-implicit CBS procedures for incompressible viscous flows. *International journal for numerical methods*

- in engineering*, vol. 66, pp 1618-1640, 2006.
- Mittal, S., Finite element computation of unsteady viscous compressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 157, pp. 151-175, 1998.
- Molina R. C., and Huot, J. P., A one-point integration finite element solver for the fast solution of the compressible Euler equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 95, pp. 37-48, 1992.
- Nithiarasu, P., and Zienkiewicz, O.C., On stabilization of the CBS algorithm: Internal and external time steps, *International journal for numerical methods in engineering*, 48, pp 875-880, 2000.
- White, F., *Viscous Fluid Flow*. McGraw Hill Book Co, (First edition). N.Y., 1974.
- Yoon, K. T., Moon S. Y., et. al., Flowfield-dependent mixed explicit-implicit (FDMEI) methods for high and low speed and compressible and incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 151, pp. 75-104, 1998.
- Zienkiewicz, O.C. and Codina, R., A general algorithm for compressible and incompressible flow-Part I: The Split, Characteristic-Based Scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 20, pp. 869-885, 1995.
- Zienkiewicz, O.C., Satya Sai, B.V.K., Morgan, K., Codina R., and Vázquez, M., A general algorithm for compressible and incompressible flow-Part II: Tests on the Explicit Form. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 20, pp. 887-913, 1995.