

MODELO CONDENSADO PARA EL ESTUDIO DE FLUJOS CONVECTIVOS EN UNA CAVIDAD

Paola A. Córdoba^a y Enzo A. Dari^a

^a*Departamento de Mecánica Computacional, Centro Atómico Bariloche-CNEA, Instituto Balseiro-UNCU, CONICET, Av. Bustillo 9500, S.C. de Bariloche, Río Negro, Argentina, paolaco@cab.cnea.gov.ar*

Palabras Clave: Convección natural, costo computacional, fluido-dinámica computacional, transformador de distribución de potencia media, ONAN.

Resumen. Una de las motivaciones principales de este trabajo es el estudio del comportamiento termo-hidráulico del fluido refrigerante en un transformador de potencia tipo ONAN (Oil Natural Air Natural). El modelado numérico tridimensional que permite estudiar este dispositivo basado en una sección representativa del mismo, presenta una geometría particular que puede a su vez ser simplificada. En este trabajo se propone un modelo condensado que se obtiene mediante la integración de las ecuaciones de conservación de continuidad, momento y energía, reduciendo la dimensionalidad del problema a uno 2D. Esta integración se realiza considerando conocidas las dependencias de la velocidad y temperatura en función de la tercera coordenada (coordenada de integración). Este tipo de enfoque ha sido empleado por otros autores (A. Nakayama et.al., *Int J Comput Fluid Dyn*, 20(2):99–104 (2006)) y con esta herramienta se busca extender este procedimiento a la ecuación de transporte de energía acoplada a la de momento para el estudio de flujos convectivos con la intención de obtener una herramienta de optimización que permita realizar modificaciones de diseño (geometría, parámetros materiales y relacionados con la transferencia térmica) y reducir los largos tiempos de cálculo asociados al modelado 3D de este problema. Este costo computacional puede ser considerable dependiendo de la complejidad de la geometría y de las escalas características involucradas. En este trabajo se presentan resultados comparativos entre el modelo 3D y el obtenido con el modelo numérico condensado cuyo costo computacional es significativamente menor.

1. INTRODUCCIÓN

Modelar computacionalmente todos los detalles de la estructura de un transformador sigue siendo costoso (Gastelurrutia et al., 2011a; Sitar et al., 2015), principalmente por la complejidad del problema. Es así como se estudian casos más sencillos para aislar algún aspecto del problema físico de interés, como los efectos de las propiedades variables del fluido (Cordoba et al. (2015)), convección natural a altos números de Rayleigh (Arpino et al. (2010)), efectos de la radiación (Hajidavalloo y Mohamadianfard (2010)), entre otros. O se hace uso de diversas simplificaciones geométricas como las presentadas por (Gastelurrutia et al., 2011a,b; Córdoba, 2016).

El objetivo principal del presente trabajo es proponer un modelo condensado a partir de un modelo 3D del proceso de refrigeración de un transformador de distribución tipo ONAN. El modelado numérico de este dispositivo, descrito en detalle en Córdoba (2016), se reduce a una sección 3D representativa y simplificada de este dispositivo. Esta sección representativa (SR) es el punto de partida para el modelo propuesto en el presente trabajo. El objetivo es reducir los largos tiempos de cálculo y complementar el análisis del proceso de refrigeración en el dispositivo de interés facilitando el proceso de diseño. Con este fin, se aprovecha la geometría de la SR para obtener un modelo 2D que reproduzca los fenómenos más relevantes del proceso de refrigeración, como por ejemplo, una región de calentamiento, otra de refrigeración e inclusive, zonas con diferentes espesores. Con esta herramienta se busca además, realizar pruebas rápidas con diferentes modificaciones geométricas que permitan maximizar la transferencia térmica en estos dispositivos. Como se muestra en Córdoba (2016), los resultados numéricos y experimentales muestran una clara deficiencia en el proceso de refrigeración. Realizar pruebas o experimentos numéricos relacionados con la geometría en el modelo 3D resultaría poco práctico, teniendo en cuenta que una simulación del modelo 3D tarda aproximadamente 15 días. El modelo que se propone en este trabajo, se obtiene mediante la integración de las ecuaciones de conservación de continuidad, momento y energía. Esta integración se realiza considerando conocidas las dependencias de la velocidad y temperatura en función de la tercera coordenada (coordenada de integración). Este tipo de enfoque ha sido empleado por otros autores como Nakayama et al. (2006), donde se considera la profundidad como una función continua y se propone un perfil de velocidades conocido que depende a su vez de esta función. Este proceso de homogeneización lo realizan en la ecuación de momento. Con la herramienta que presentamos buscamos extender este procedimiento a la ecuación de transporte de energía acoplada a la de momento para el estudio de flujos convectivos. En este trabajo se presenta un modelo condensado para el estudio de flujos por convección natural en una cavidad, con características similares a las que se presenta en un transformador de distribución tipo ONAN. Con este modelo se obtienen campos de velocidades y temperaturas similares a los obtenidos de simulaciones 3D para la misma geometría, así como también, se logró reducir los tiempos de cálculo en un factor aproximado de 60 respecto de las simulaciones 3D.

2. MODELO MATEMÁTICO

Consideremos la geometría mostrada en la Figura 1. El flujo está gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes incompresible acopladas a la ecuación de transporte de energía térmica mediante el término boyante, en donde se considera la aproximación Boussinesq. La forma dimensional de estas ecuaciones se escribe:

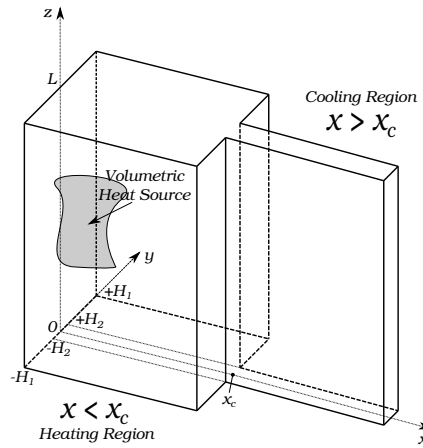


Figura 1: Descripción geométrica de la cavidad y coordenadas del sistema.

$$\begin{aligned} \rho_0[\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] - \nabla \cdot [2\mu(T) \nabla^s \mathbf{u}] + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho_0 C_p [\partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T] - k \nabla^2 T &= S, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathbf{f} = \rho_0 \mathbf{g} [1 - \beta(T - T_0)] - \rho_0 C_f \mathbf{u} \quad (2)$$

en Ω , $t \in (0, T)$ donde \mathbf{u} es el vector velocidad con componentes u_x , u_y y u_z . El primer término de la ecuación (2) es la fuerza boyante, siendo ρ_0 la densidad del fluido a la temperatura T_0 y el segundo, es el término de Darcy. Este término constituye una simplificación hidrodinámica de la región correspondiente a las bobinas, considerándola como una región porosa afectada principalmente por un factor de fricción C_f . $\nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2}[(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T]$ es el operador gradiente simétrico. Ω es el dominio n -dimensional donde se resuelve el problema en el intervalo de tiempo $(0, T)$.

Distinguímos dos regiones en la geometría estudiada: la primera, la región de calentamiento ($x < x_c$), en donde se localiza en una región determinada una fuente volumétrica de calor y la segunda, la región de refrigeración ($x > x_c$), la cual corresponde a la aleta. Estamos interesados en las siguientes condiciones de borde a lo largo de la coordenada y , según las hipótesis del modelo de la SR (ver Córdoba (2016)) (simetría de traslación, condición de convección en las paredes de la aleta, simetría en el plano medio de la SR, etc.):

$$\text{Para } x < x_c \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y} \right)_{H_1} = \left(\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y} \right)_{-H_1} = 0. \\ u_y = 0, \quad \text{en } y = H_1, -H_1 \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{en } y = H_1, -H_1 \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\text{para } x > x_c \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y} \right)_{H_2} = -\frac{h}{k}(T_s(x, H_2, z, t) - T_\infty). \\ \left(\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y} \right)_{-H_2} = \frac{h}{k}(T_s(x, -H_2, z, t) - T_\infty). \\ u_x = u_y = u_z = 0, \quad \text{en } y = H_2, -H_2 \end{array} \right. \quad (4)$$

2.1. Reducción dimensional de la ecuación de momento

Para realizar esta reducción, consideramos que la velocidad la podemos escribir de la siguiente forma:

$$u_x(x, y, z, t) = \bar{u}_x(x, z, t)f(y), \quad (5)$$

$$u_z(x, y, z, t) = \bar{u}_z(x, z, t)f(y), \quad (6)$$

con las siguientes condiciones:

$$f'(0) = 0 \quad \int_{-H}^H f(y)dy = 2H \quad (7)$$

donde H es la profundidad a lo largo de y , medida respecto del origen. Cabe resaltar que tanto H , como $f(y)$ pueden no ser continuas en x_c . $f(y)$ puede tener una forma para $x < x_c$ diferente de su forma en la región $x > x_c$, dependiendo de las condiciones de borde en $y = \pm H$. Del mismo modo, para el caso de la Figura 1, H toma el valor de H_1 para $x < x_c$ y H_2 para $x > x_c$. Estas discontinuidades generan la discontinuidad en el campo de velocidades. Este problema se verá más adelante.

Por otro lado, como $u_y(x, y, z) \simeq 0$, las ecuaciones de continuidad y momento en (1) pueden reescribirse como:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \rho \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \left(u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z, \quad (11)$$

donde p tiene la forma $p = p(x, z, t)$ como resultado de (10). Usando los perfiles de velocidades (5) y (6), las ecuaciones de continuidad y momento integradas sobre la coordenada de profundidad (i.e. sobre la coordenada y , en el rango de integración de $-H$ a H), resultan en

$$\frac{\partial \bar{u}_x(2H)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_z(2H)}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \bar{u}_x(2H)}{\partial t} + \rho \int_{-H}^H f^2(y)dy \left(\bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} \right) = \\ -2H \frac{\partial p}{\partial x} + 2H\mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial z^2} \right) + 2\mu \bar{u}_x f'(H), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \bar{u}_z(2H)}{\partial t} + \rho \int_{-H}^H f^2(y) dy \left(\bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right) = \\ -2H \frac{\partial p}{\partial z} + 2H\mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial z^2} \right) + 2\mu \bar{u}_z f'(H) + 2H \bar{\rho} g_z, \end{aligned} \quad (14)$$

donde el término de fuerza por unidad de volumen $\rho \mathbf{g}$ integrado sobre la coordenada de integración, resulta en $2H \bar{\rho} g_z$, siendo $\bar{\rho}$ una densidad promediada en esta dirección. El acoplamiento térmico entre la ecuación de momento y de energía se detallará más adelante una vez se definan todos los términos involucrados en la aproximación de Boussinesq.

El conjunto de ecuaciones bidimensionales (12)-(14), pueden escribirse en forma compacta como:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (15)$$

$$\rho \frac{\partial \bar{\mathbf{u}} \cdot 2H}{\partial t} + \rho \int_{-H}^H f^2(y) dy (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = -2H \nabla p + 2H\mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + 2\mu f'(H) \bar{\mathbf{u}} + 2H \bar{\rho} \mathbf{g}, \quad (16)$$

donde H podría llegar a ser una función discontinua debido a la contracción repentina de la geometría (ver Fig. 1). De forma similar, la velocidad podría llegar a ser discontinua debido a esta contracción. Por esta razón, es más conveniente escribir las nuevas ecuaciones bidimensionales en términos de una nueva variable, que sí es continua: el caudal (\mathbf{q}). Esta variable está definida como:

$$\mathbf{q}(x, z, t) = \bar{\mathbf{u}}(x, z, t)(2H), \quad (17)$$

Así, las ecuaciones integradas de continuidad y momento pueden escribirse como,

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (18)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \rho \int_{-H}^H \frac{f^2(y)}{4H^2} dy (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q} = -2H \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{q} + \mu \frac{f'(H)}{H} \mathbf{q} + 2H \bar{\rho} \mathbf{g}. \quad (19)$$

Nótese que aparece un nuevo término respecto de la ecuación de momento en (1), i.e. $\mu \frac{f'(H)}{H} \mathbf{q}$. El significado físico de este término es la adición de los efectos de fricción debido a las paredes trasera y frontal de la cavidad. Éste consiste en una resistencia al flujo, lineal con el caudal, afectado por un factor que depende del perfil de velocidades propuesto. Así, para la región $x < x_c$, consideramos un perfil de velocidades uniforme, compatible con las condiciones de borde (3), de la forma:

$$u_x(x, y, z, t) = \bar{u}_x(x, z, t), \quad (20)$$

$$u_z(x, y, z, t) = \bar{u}_z(x, z, t), \quad (21)$$

donde $f(y) = 1$. Y si consideramos un perfil de velocidad local de Poiseuille para la región $x > x_c$, como sigue,

$$u_x(x, y, z, t) = \bar{u}_x(x, z, t) \left(1 - \frac{y^2}{H^2}\right), \quad (22)$$

$$u_z(x, y, z, t) = \bar{u}_z(x, z, t) \left(1 - \frac{y^2}{H^2}\right), \quad (23)$$

donde $f(y) = \left(1 - \frac{y^2}{H^2}\right)$, la ecuación de momento resulta en:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \rho \frac{3}{5H} (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q} = -2H \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{q} - \mu \frac{3}{H^2} \mathbf{q} + 2H \bar{\rho} \mathbf{g}. \quad \text{para } x > x_c \quad (24)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \rho \frac{1}{2H} (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q} = -2H \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{q} + 2H \bar{\rho} \mathbf{g}. \quad \text{para } x < x_c \quad (25)$$

2.2. Reducción dimensional de la ecuación de energía

Por otro lado, debido a que el problema de convección natural involucra un acoplamiento térmico entre las ecuaciones de momento y energía, suponemos un perfil de temperatura general que depende de la profundidad de la cavidad de la siguiente manera,

$$T(x, y, z, t) = T(x, z, t)g(y), \quad (26)$$

con las siguientes observaciones:

$$T(x, 0, z, t) = T(x, z, t)g(0) = T_{max}(x, y, z, t) \Rightarrow g(0) = 1, \quad (27)$$

$$\Rightarrow T(x, y, z, t) = T_{max}(x, z, t)g(y), \quad (28)$$

$$T(x, H, z, t) = T_{max}(x, z, t)g(H) = T_s(x, z, t). \quad (29)$$

Utilizando un procedimiento análogo al empleado en la ecuación de momento, expresamos la ecuación de transporte de energía en términos de la temperatura de mezcla (Bulk Temperature), en lugar de la temperatura máxima. La temperatura de mezcla (T_b) resulta una función continua aún con discontinuidades de H , y está definida como (ver [Incropera y DeWitt \(1996\)](#)):

$$T_b(x, y, z, t) = \frac{\int_{-H}^H uT dy}{\int_{-H}^H u dy}. \quad (30)$$

$$T_b(x, y, z, t) = \frac{T_{max}(x, z, t)}{2H} \int_{-H}^H f(y)g(y) dy. \quad (31)$$

Así, haciendo uso de la ecuación (28) en (31), el perfil de temperatura general se escribe como,

$$T(x, y, z, t) = 2HT_b(x, z, t) \frac{g(y)}{\int_{-H}^H f(y)g(y) dy}. \quad (32)$$

Partiendo de la ecuación de energía en (1) e integrando sobre la tercera coordenada (y) en el rango de $-H$ a H ,

$$\int_{-H}^H \partial_t T dy + \int_{-H}^H (\mathbf{u} \cdot \nabla) T dy - \int_{-H}^H \alpha \nabla^2 T dy = \int_{-H}^H \frac{S}{\rho_0 C_p} dy, \quad (33)$$

donde el término difusivo queda como:

$$\begin{aligned} \int_{-H}^H \alpha \nabla^2 T dy &= \int_{-H}^H \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dy + \int_{-H}^H \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dy, \\ &= \int_{-H}^H \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dy + \alpha \left[\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_H + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{-H} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

Reemplazando los perfiles de velocidad y temperatura propuestos como hipótesis en (33) y (34) y aplicando las condiciones de borde (4) en (34), y realizando la integración, se obtiene la siguiente ecuación de energía bidimensional,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2Hg(y)}{\int_{-H}^H f(y)g(y)dy} \right) \frac{\partial T_b}{\partial t} + 2H(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)T_b = \\ \left(\frac{2Hg(y)}{\int_{-H}^H f(y)g(y)dy} \right) \alpha \nabla^2 T_b - \frac{2h}{\rho C_p} \left(\frac{2Hg(y)}{\int_{-H}^H f(y)g(y)dy} T_b - T_\infty \right) + \frac{2HS}{\rho_0 C_p}. \end{aligned} \quad (35)$$

donde $T_b = T_b(x, z, t)$, $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(x, z, t)$, α es el coeficiente de difusividad térmica y h es el coeficiente de convección. De nuevo, queremos expresar la ecuación de energía en términos del caudal (\mathbf{q}) en lugar de la velocidad, la cual puede llegar a ser discontinua en presencia de una contracción abrupta en la geometría.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2Hg(y)}{\int_{-H}^H f(y)g(y)dy} \right) \frac{\partial T_b}{\partial t} + (\mathbf{q} \cdot \nabla)T_b = \\ \left(\frac{2Hg(y)}{\int_{-H}^H f(y)g(y)dy} \right) \alpha \nabla^2 T_b - \frac{2h}{\rho C_p} \left(\frac{2Hg(y)}{\int_{-H}^H f(y)g(y)dy} T_b - T_\infty \right) + \frac{2HS}{\rho_0 C_p}. \end{aligned} \quad (36)$$

La ecuación general integrada (36) se puede resolver solo si conocemos la dependencia de la velocidad y la temperatura con la coordenada de profundidad " y ", esto es, $f(y)$ y $g(y)$. Podemos obtener una forma particular de la ecuación (36), para ($x > x_c$), si por ejemplo, consideramos el perfil de velocidad local de Poiseuille (22) y un $g(y)$ resolviendo la ecuación del calor para un canal infinito suponiendo flujo completamente desarrollado.

Así, si estamos en la región $x < x_c$, un perfil uniforme de T , cumple las condiciones (3), que $g(y) = 1$ y $T(x, y, z, t) = T_{max}(x, z, t)$ y usando la ecuación (30) obtenemos: $T(x, y, z, t) = T_b(x, z, t)$.

Para la región $x > x_c$, proponemos un perfil $\mathcal{O}(y^4)$, correspondiente a una condición de perfil térmico completamente desarrollado, en flujo Poiseuille, compatible con las condiciones de borde (4) y con las observaciones (27) - (29):

$$T(x, y, z, t) - T_\infty = (T_{max}(x, z, t) - T_\infty) \left[-\frac{3h}{2kH \left(1 + \frac{5}{8} \frac{hH}{k}\right)} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{12H^2} \right) + 1 \right] \quad (37)$$

y en términos de la temperatura de bulk, se tiene

$$T(x, y, z, t) - T_\infty = (T_b(x, z, t) - T_\infty) \frac{1}{\left(1 + \frac{17}{35} \frac{hH}{k}\right)} \left[-\frac{3h}{2kH} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{12H^2} \right) + \left(1 + \frac{5}{8} \frac{hH}{k}\right) \right] \quad (38)$$

Así, la ecuación de energía para las dos regiones se reduce a:

$$(2H) \frac{\partial T_b}{\partial t} + \gamma_1 (\mathbf{q} \cdot \nabla) T_b = \alpha 2H \nabla^2 T_b - \gamma_2 \frac{h}{\rho C_p} (T_b - T_\infty). \quad \text{para } x > x_c \quad (39)$$

$$(2H) \frac{\partial T_b}{\partial t} + (\mathbf{q} \cdot \nabla) T_b = \frac{2HS}{\rho C_p} + \alpha 2H \nabla^2 T_b, \quad \text{para } x < x_c. \quad (40)$$

Como se mencionó en la sección 2 y 2.1, el acoplamiento entre la ecuación de momento y de energía se realiza mediante la aproximación de Boussinesq. En el presente modelo condensado el término $\rho \mathbf{g}$, al integrarse resulta en $2H \bar{\rho} \mathbf{g}$. Usando la aproximación de boussinesq, la fuerza boyante (\mathbf{f}_b) en este modelo, queda expresada en términos de la temperatura de mezcla T_b , y una constante γ , que depende del perfil de temperatura utilizado como hipótesis, así:

$$\mathbf{f}_b = \rho_0 \mathbf{g} [1 - \beta \gamma (T_b - T_0)] \quad (41)$$

Podemos escribir de forma compacta la ecuación de continuidad, momento y energía, así,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \rho \alpha_1 (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q} = -2H \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{q} - \mu \alpha_2 \mathbf{q} + 2H \rho_0 \mathbf{g} [1 - \beta \gamma_1^{-1} (T_b - T_0)] \\ (2H) \frac{\partial T_b}{\partial t} + \gamma_1 (\mathbf{q} \cdot \nabla) T_b = \frac{2HS}{\rho C_p} + \alpha 2H \nabla^2 T_b - \gamma_2 \frac{h}{\rho C_p} (T_b - T_\infty). \end{array} \right. \quad (42)$$

donde,

$$H = \begin{cases} H_1, & \text{si } x < x_c \\ H_2, & \text{si } x > x_c \end{cases} \quad (43)$$

$$\alpha_1 = \begin{cases} \frac{1}{2H}, & \text{si } x < x_c \\ \frac{3}{5H}, & \text{si } x > x_c \end{cases} \quad (44)$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} 0, & \text{si } x < x_c \\ \frac{3}{H^2}, & \text{si } x > x_c \end{cases} \quad (45)$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} 1, & \text{si } x < x_c \\ \gamma_1(h, H, k), & \text{si } x > x_c \end{cases} \quad (46)$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} 0, & \text{si } x < x_c \\ \gamma_2(h, H, k), & \text{si } x > x_c \end{cases} \quad (47)$$

$$S = \begin{cases} s, & \text{en la región de interés} \\ 0, & \text{en cualquier otro lado} \end{cases} \quad (48)$$

El set de ecuaciones (42), obtenido mediante este proceso de integración, se resuelve numéricamente mediante el método de Elementos Finitos, usando el código Par-GPFEP (Lew (1998)). A continuación se presenta la formulación variacional de las ecuaciones integradas.

2.3. Formulación variacional

Ecuación de momento:

La formulación variacional de la ecuación de momento se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} \rho \alpha_1 (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q} \cdot v d\Omega = \\ & - \int_{\Omega} 2H \nabla p \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} \mu \nabla^2 \mathbf{q} \cdot v d\Omega - \int_{\Omega} \mu \alpha_2 \mathbf{q} \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} 2H (\rho_0 \mathbf{g} [1 - \beta \gamma_1^{-1} (T_b - T_0)]) \cdot v d\Omega \end{aligned} \quad (49)$$

donde el primer término del segundo miembro de la ecuación (49), puede integrarse por partes así:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2H \nabla p \cdot v d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla \cdot ((2H)p) \cdot v d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla (2H) \cdot v d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} (2H)p \nabla \cdot v d\Omega - \int_{\Gamma} 2p \Delta H \cdot v d\Gamma \end{aligned} \quad (50)$$

reemplazando en la formulación variacional se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} \rho \alpha_1 (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q} \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{q} \cdot \nabla v d\Omega = \\ & \int_{\Omega} (2H)p \nabla \cdot v d\Omega - \int_{\Omega} \mu \alpha_2 \mathbf{q} \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} 2H \rho \mathbf{g} \cdot v d\Omega - \int_{\Gamma} 2p \Delta H \cdot v d\Gamma \end{aligned} \quad (51)$$

Nótese que aparece de forma natural un nuevo término, al comparar con la ecuación (49), que se resta únicamente en la interfase de la contracción Γ , como consecuencia de la discontinuidad de H . Este término es agregado en el código para garantizar la continuidad de los campos \mathbf{q} y p . Si H no presenta discontinuidad, este término se hace nulo.

Ecuación de energía:

La formulación variacional se puede escribir como:

$$\int_{\Omega} (2H) \frac{\partial T_b}{\partial t} \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_1 (\mathbf{q} \cdot \nabla) T_b \cdot v d\Omega - \int_{\Omega} \alpha 2H \nabla^2 T_b \cdot v d\Omega = \int_{\Omega} \frac{2HS}{\rho C_p} \cdot v d\Omega - \int_{\Omega} \gamma_2 \frac{2h}{\rho C_p} (T_b - T_{\infty}) \cdot v d\Omega. \quad (52)$$

En la siguiente sección, se describen tres casos de estudio para validar nuestro modelo numérico. En el primero, se resuelve un caso sencillo de flujo en un canal, que presenta solución analítica y que permite comprobar la conservación de energía y momento en el modelo condensado en el caso en donde H presenta discontinuidad. En los casos restantes, se resuelven dos problemas con ambos modelos numéricos: con el modelo 3D (definiendo una malla tridimensional y resolviendo mediante el método de Elementos Finitos el problema usando el código Par-GPFEP) y con el modelo 2D (modelo condensado). En ambos problemas se comparan los resultados obtenidos con los dos modelos.

3. CASOS DE PRUEBA DEL MODELO NUMÉRICO

3.1. Caso A: Flujo en un canal con discontinuidad en H

Este caso de prueba consiste en un flujo en un canal de longitud $L = 10\text{m}$ cuya profundidad presenta una contracción brusca como se muestra en la Figura 2 (Vista de arriba). Adicionalmente, se impone fuentes de calor uniformes a cada lado de la contracción: S_1 y S_2 , siendo $S_2 = 2S_1$ y $H_1 = 2H_2$. Las paredes del canal se encuentran aisladas térmicamente. Se imponen condiciones de Dirichlet a la entrada del canal ($x = 0$) de caudal y temperatura constantes.

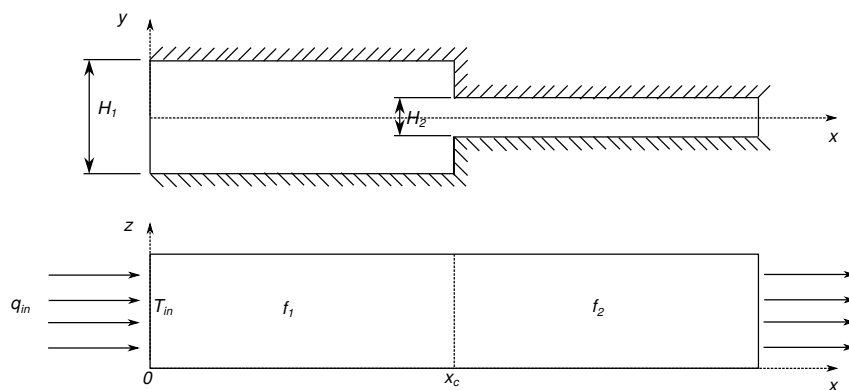


Figura 2: Descripción geométrica del caso A.

3.2. Caso B: Convección forzada en el interior de una aleta y convección natural externa, sin cambio de profundidad

La Figura 3, muestra la geometría estudiada y el sistema de coordenadas para este caso. Este caso de prueba consiste en una cavidad con dos aberturas, una de entrada y otra de salida del fluido que se hace circular por convección forzada en su interior, el fluido que ingresa a mayor temperatura, se refrigera por convección natural a través de las superficies delantera y trasera de la misma (planos correspondientes a las paredes verticales sobre el eje y). A la izquierda

de la figura, se muestra la geometría tridimensional estudiada y a la derecha de la misma, la equivalente para el modelo 2D propuesto.

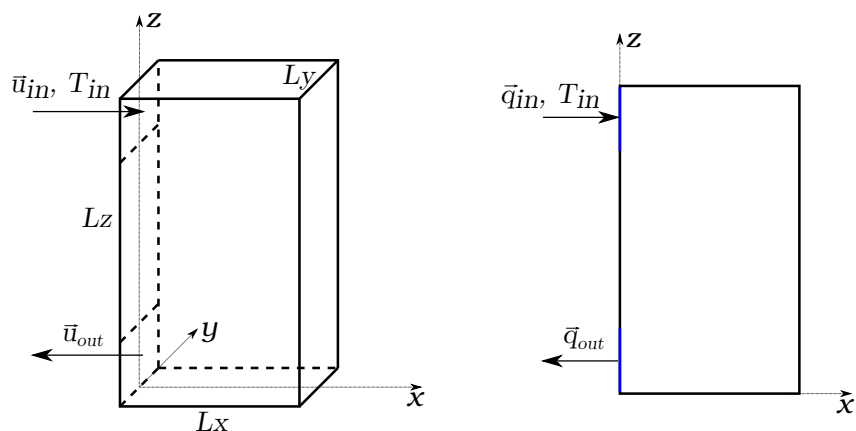


Figura 3: Geometría de los casos 3D y 2D respectivamente y sistemas de coordenadas, para el caso B.

Como condiciones de borde, se impuso en ambos modelos, condiciones de borde de perfil desarrollado de velocidad y temperatura a la entrada de la cavidad. En las paredes se impuso condición de no deslizamiento para la velocidad. En el modelo 3D, se impuso condición de borde de convección, con un coeficiente de convección constante, para caracterizar la transferencia térmica por convección natural hacia el exterior. En ambos casos, se utilizaron los mismos parámetros materiales del fluido. Con este caso sencillo se busca poner a punto el modelo condensado, en una geometría similar a la de una aleta del transformador.

3.3. Caso C: Cavidad de convección natural interna, con región de enfriamiento por convección natural externa de aire, sin cambio de profundidad

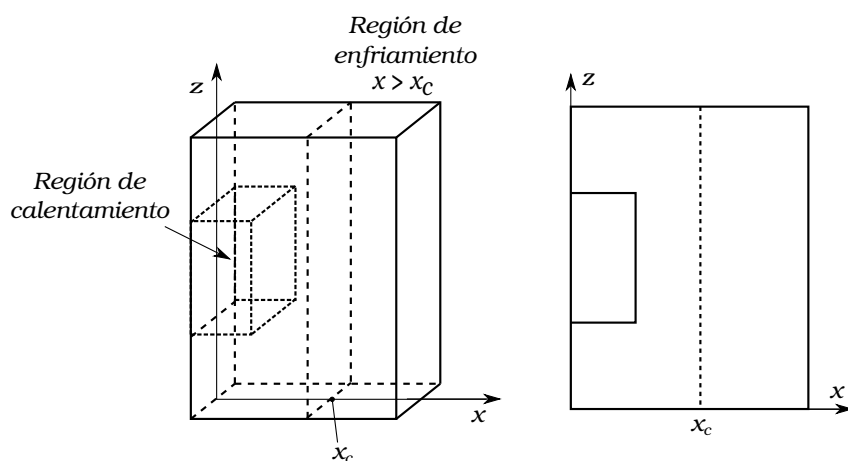


Figura 4: Descripción geométrica del caso C.

Con este caso buscamos acercarnos a las condiciones de la sección representativa de un transformador. Por el momento, el problema de la contracción en la geometría sigue siendo un desafío para la homogenización principalmente de la ecuación de transporte de energía. Sin embargo, como caso de prueba para validar el modelo 2D, un primer paso es estudiar una cavidad de convección natural sin cambio abrupto de profundidad.

La Figura 4 muestra la geometría estudiada para este caso. A la izquierda de la figura, se muestra la geometría tridimensional estudiada y a la derecha de la misma, la equivalente para el modelo condensado, además del sistema de referencia.

Esta cavidad consta de una región de calentamiento en la cual se impuso una fuente volumétrica de calor uniforme. También se definió una región de refrigeración en donde las paredes trasera y frontal para esta región ($x > x_c$) tiene condición de borde de convección con coeficiente de convección constante. Esta cavidad se considera cerrada, en donde todas las paredes tienen condición hidrodinámica de no deslizamiento.

4. RESULTADOS

4.1. Caso A

Este problema 1D puede resolverse analíticamente. En estado estacionario, la ecuación de energía queda reducida a:

$$u_x \frac{dT}{dx} = \begin{cases} \frac{S_1}{\rho C_p}, & \text{para } x < x_c \\ \frac{S_2}{\rho C_p}, & \text{para } x > x_c \end{cases} \quad (53)$$

donde sólo sobrevive el término convectivo y el término fuente. El término difusivo se hace nulo debido a que el perfil de temperatura resulta ser lineal en estado estacionario. x_c es la posición en la cual ocurre el salto de H . Escribiendo (53) en términos del caudal para comparar con el modelo condensado, se obtiene:

$$q_x \frac{dT}{dx} = \begin{cases} \frac{S_1 H_1}{\rho C_p}, & \text{para } x < x_c \\ \frac{S_2 H_2}{\rho C_p}, & \text{para } x > x_c \end{cases} \quad (54)$$

Realizando el balance de energía global, se obtiene:

$$q_x (T_{out} - T_{in}) = \frac{S_1 H_1 L}{\rho C_p} + \frac{S_2 H_2 L}{\rho C_p} \quad (55)$$

Por otro lado, la ecuación de momento para este caso se reduce a:

$$\frac{dP}{dx} = \begin{cases} -3\mu \frac{u_x}{H_1^2} = -3\mu \frac{q_x}{H_1^3}, & \text{para } x < x_c \\ -3\mu \frac{u_x}{H_2^2} = -3\mu \frac{q_x}{H_2^3}, & \text{para } x > x_c \end{cases} \quad (56)$$

usando $q_x = H u_x$. Al integrar a cada lado respecto de x , se obtienen las soluciones de P a cada lado de la contracción:

$$P_1(x) = -\frac{3\mu q_x}{H_1^3} x + P_{in} \quad (57)$$

$$P_2(x) = -\frac{3\mu q_x}{H_2^3} (x - L) \quad (58)$$

Podemos calcular la caída de presión en la contracción como la diferencia entre (57) y (58) en $x = L/2$, siendo:

$$\Delta P_{L/2} = -\frac{3\mu q_x L}{2} \left(\frac{1}{H_1^3} + \frac{1}{H_2^3} \right) + P_{in} \quad (59)$$

Así obtenemos la expresión para calcular P_{in} :

$$P_{in} = \frac{3\mu q_x L}{2} \left(\frac{1}{H_1^3} + \frac{1}{H_2^3} \right) + \Delta P_{L/2} \quad (60)$$

La Figura 5 muestra las soluciones para el caudal, temperatura y presión obtenidas de la simulación usando el modelo condensado. Los valores de los parámetros que se utilizaron son: $H_2 = 0,5$, $H_1 = 1$, $\mu = 1/3$, $q_{in} = 1$, $T_{in} = 0$, $\rho C_p = 10$, $\rho = 1$, $\alpha = k/\rho C_p = 0,01$. Todos los parámetros están en unidades MKS.

Nótese que en La Figura 5, se verifica la continuidad de todos los campos: caudal, temperatura y presión. Además se puede ver que el modelo verifica las soluciones analíticas para la temperatura (55) y presión (60), considerando en ésta última $\Delta P_{L/2} = 0$. Cabe resaltar al respecto que en el modelo condensado no estamos considerando las pérdidas de carga por la contracción. El modelado de estas pérdidas, que hacen parte de la complejidad del problema físico que motiva el desarrollo de este modelo condensado, se deja para un trabajo futuro. Sin embargo, los resultados obtenidos son satisfactorios pues el objetivo principal consistía en comprobar la conservación de masa, energía y momento del modelo, así como garantizar la continuidad de los campos aún con la discontinuidad de H .

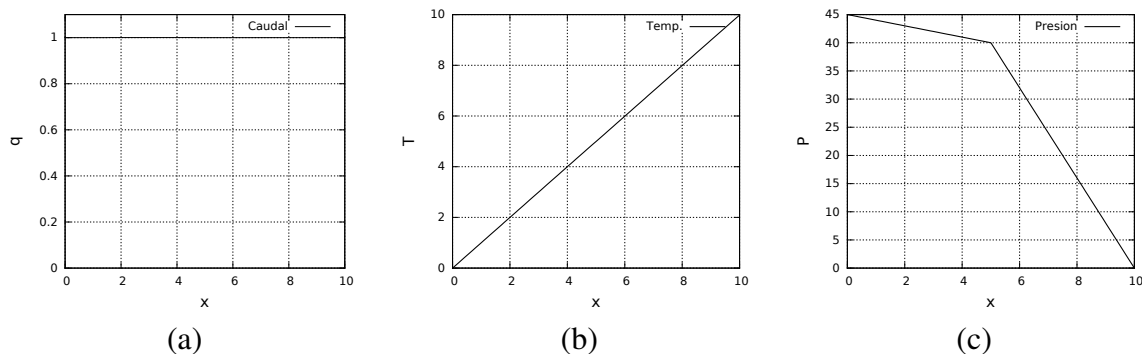


Figura 5: Resultados del caso A obtenidos del modelo condensado: soluciones para el caudal, temperatura y presión a lo largo del eje x .

A continuación se presenta una comparación de resultados entre el problema resuelto con el modelo 3D y el modelo condensado. Para realizar una justa comparación, los resultados del modelo 3D fueron integrados a posteriori sobre la tercera coordenada (coordenada y).

4.2. Caso B

La Figura 6 muestra los campos de temperatura y magnitud de la velocidad, obtenidos con los dos modelos. A la izquierda (ver Fig. 6(a) y 6(c)), se encuentran los campos obtenidos con el modelo condensado. El campo de velocidades que se muestra en Fig. 6(a) se obtiene de

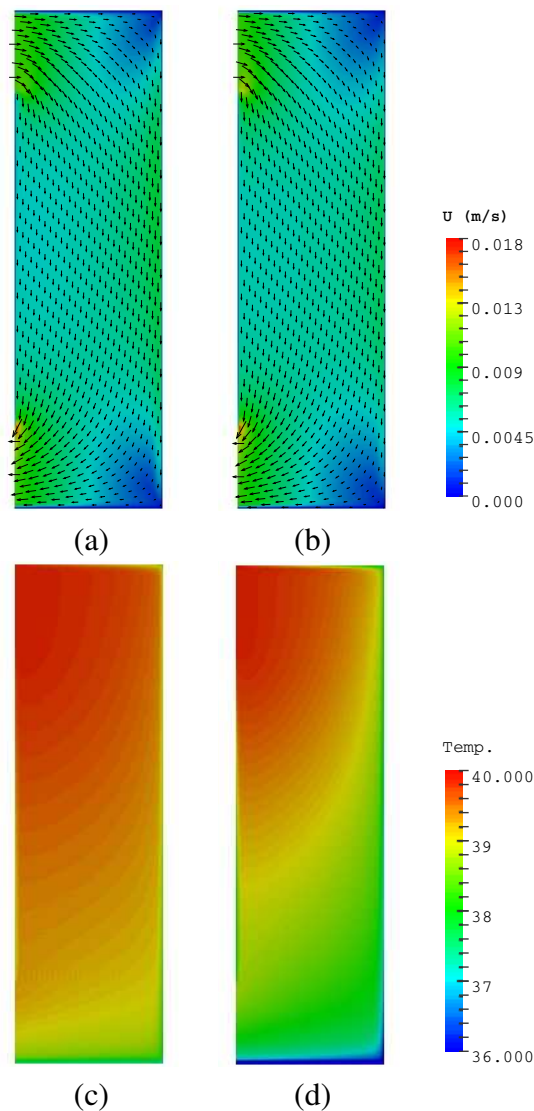


Figura 6: Comparación de campos de temperatura y velocidades obtenidos con los dos modelos 2D y 3D.

dividir el campo de caudal por $2H$, para así obtener un campo de velocidades comparable con el resultante del modelo 3D (campo integrado) que se muestra en 6(b).

Se puede observar un buen acuerdo cualitativo entre los resultados de ambos modelos con ligeras diferencias, principalmente en el campo de temperaturas.

Para observar más detalladamente los resultados de ambos modelos, se realizó una comparación entre las soluciones numéricas de temperatura y velocidad a lo largo de distintos ejes de la geometría: el eje medio horizontal, ubicado en $z = 0,45\text{m}$ y el eje medio vertical localizado en $x = 0,135\text{m}$. Estos resultados se encuentran registrados en la Figura 7. Las mayores diferencias se observan en los perfiles de temperaturas (ver Fig. 7 (a) y (b)). En estas dos gráficas se presentan la temperatura media del modelo 3D en comparación con la temperatura de bulk o mezcla y la temperatura media que resulta del modelo 2D. La máxima diferencia no sobrepasa el 5% respecto de los resultados del modelo 3D. Por el contrario, existe un excelente acuerdo entre los perfiles de velocidades entre ambos modelos (ver Fig. 7 (c) y (d)).

Para entender mejor el origen de las diferencias que hay entre ambos modelos, se compararon perfiles de temperaturas y velocidades transversales (es decir, en la dirección de la coordenada y , en el punto $x = 0,135, z = 0,45$) con el objetivo de validar los perfiles de temperaturas y

velocidades que se emplearon como hipótesis en modelo 2D (ver eq. (22) y (38)). Esta comparación se presenta en la Figura 8. Se puede observar que los perfiles de velocidad presentan un excelente acuerdo (ver Figura 8 (b)), por lo que se puede concluir que la hipótesis de perfil de velocidad local de Poiseuille es válida. Del mismo modo, el perfil transversal de temperatura del modelo 2D, presenta buen acuerdo con el obtenido en la simulación 3D. Así, el perfil de temperaturas transversal tomado como hipótesis, también es válido.

Cabe resaltar que en el modelo condensado 2D, los perfiles de temperatura y velocidad considerados en el proceso de integración, son completamente desarrollados en todo el dominio. Esto no es muy realista, considerando que a la entrada de la cavidad estudiada hay una longitud de desarrollo. A pesar de estas limitaciones inherentes a la reducción dimensional del problema, el modelo condensado reproduce satisfactoriamente las soluciones del modelo 3D, con una diferencia aproximada del 5 % para este caso de estudio.

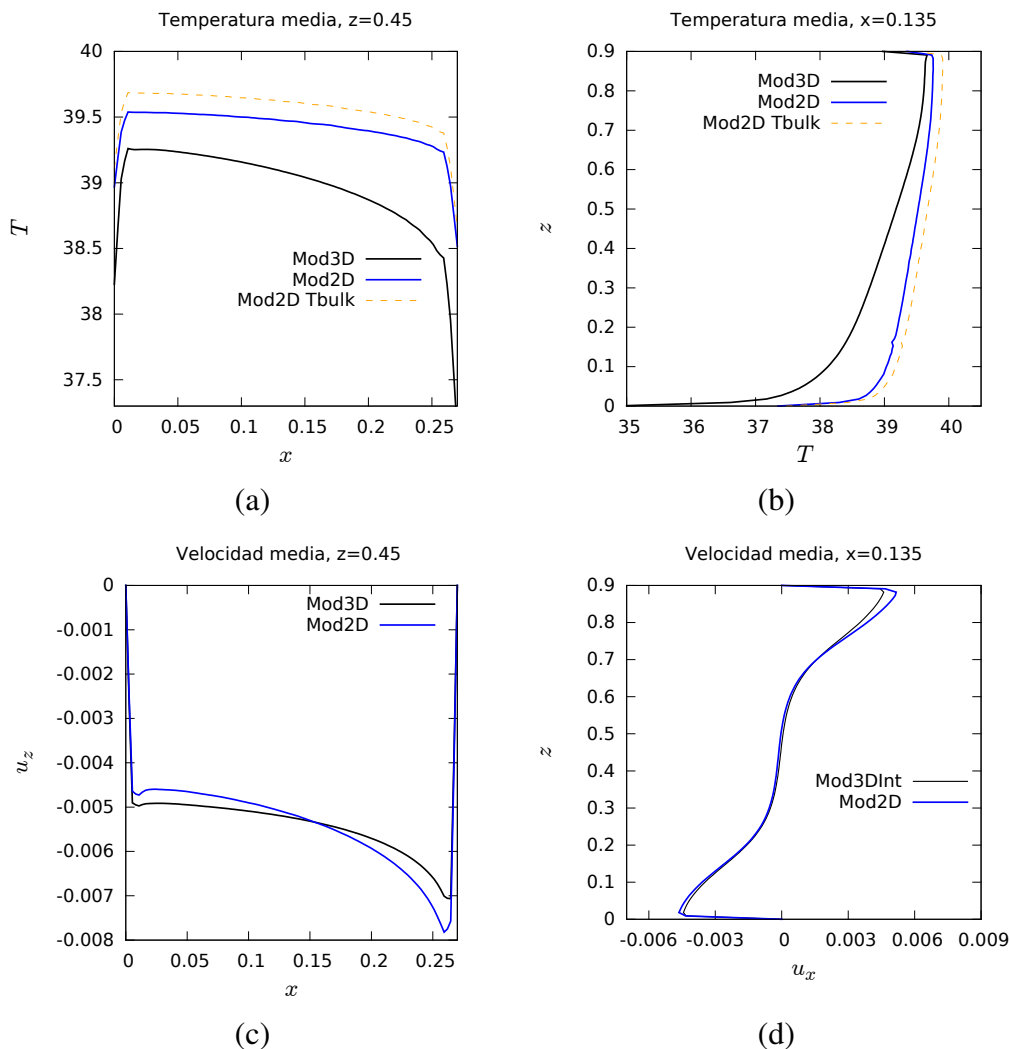


Figura 7: Perfiles horizontales y verticales. Comparación entre los modelos 3D y 2D.

4.3. Caso C

Los resultados de los campos de temperatura y velocidades integrados (i.e. para el caso del modelo 3D) en comparación a los obtenidos con el modelo 2D, se muestran en la Figura 9. A

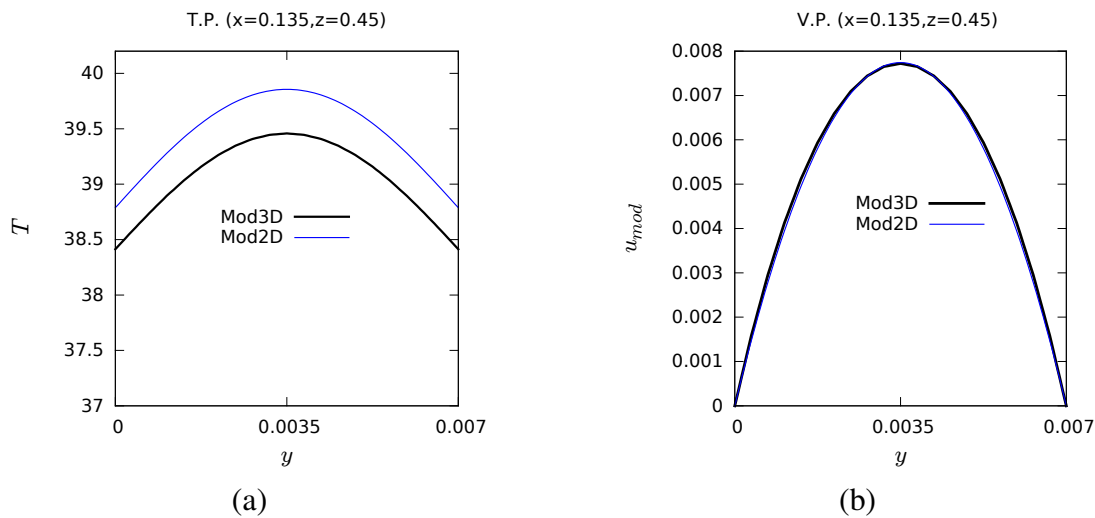


Figura 8: Perfiles transversales horizontales. Comparación de los perfiles usados como hipótesis en el proceso de homogenización y los del modelo 3D. (a) Perfiles de temperaturas, (b) Perfiles de velocidades.

la izquierda, se muestran los campos de velocidades y temperatura (Figuras (a) y (c)) obtenidos del modelo condensado, mientras que a la derecha, se muestran los equivalentes obtenidos con el modelo 3D (Figuras (b) y (d)). Cualitativamente, tanto los campos de velocidades como los de temperaturas son similares en ambos modelos. En ambos, se observa el jet de salida de la zona de calentamiento, el estancamiento del flujo en la parte inferior de la cavidad y el reingreso del flujo en la parte superior e inferior de la zona de calentamiento. En cuanto al campo de temperaturas, en ambos modelos se observan valores más altos dentro de la región de calentamiento y en el jet ascendente a la salida superior de esta misma región. En los dos casos, se obtiene una distribución de temperaturas estratificada y bajas temperaturas en la región de estancamiento.

Cuantitativamente, las mayores diferencias se encuentran en el campo de temperaturas, esto se puede ver de forma más clara mediante la comparación de las soluciones numéricas a lo largo del eje medio vertical de la región de enfriamiento ($x = 0,2m, z$) como se muestra en la Figura 10. De nuevo, se observa una mejor concordancia entre los perfiles de velocidades resultantes de ambos modelos mientras que la diferencia entre las soluciones numéricas de temperatura es de aproximadamente el 38 % respecto del modelo 3D. Cabe resaltar que en este modelo condensado, la forma de los perfiles de temperatura respecto de la coordenada y , que se toman como hipótesis, cambian abruptamente en $x = x_c$, siendo ambos perfiles térmicos completamente desarrollados. En el caso real, estos cambios no son abruptos y los perfiles respecto a y no son constantes en todo el dominio. De este modo, es esperable observar diferencias con respecto al modelo 3D. Sin embargo, a pesar de estas diferencias y de las limitaciones del modelo condensado, el perfil de temperatura que se muestra en la figura 10 (a) presenta la misma tendencia que el modelo 3D. En cuanto a los perfiles de velocidades, se observa que el modelo condensado predice mayores velocidades de reingreso del flujo desde la zona de enfriamiento a la parte superior de la zona de calentamiento, que las que presenta el modelo 3D.

En cuanto a tiempos de cálculo, la simulación con el modelo 3D requirió de aproximadamente 367 horas de cálculo, corriendo en 4 nodos con procesador core i7 3820, mientras que el modelo 2D requirió de aproximadamente 6 horas de tiempo de cálculo en un solo procesador core i7 950.

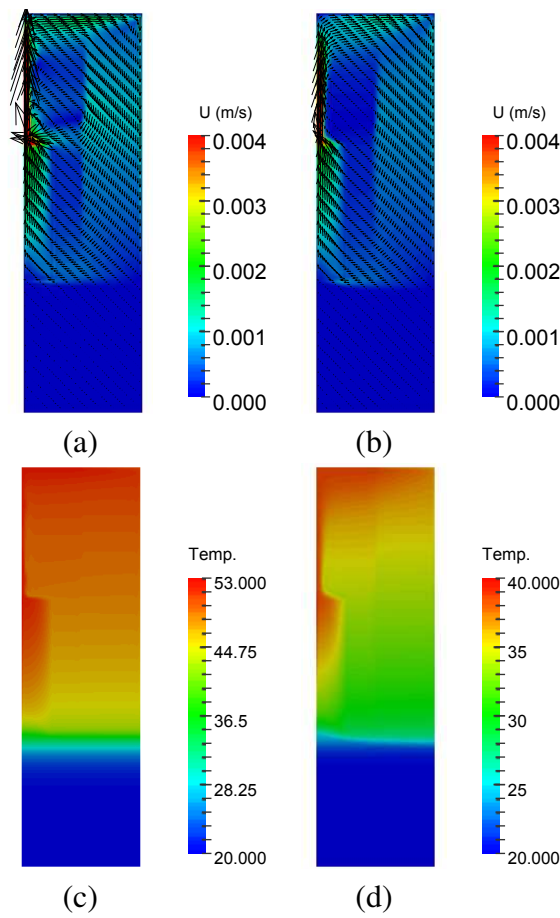


Figura 9: Comparación de campos de temperatura y velocidades entre el Modelo 3D y 2D. (derecha) Campos de temperatura y velocidades integrados en la tercera coordenada. (izquierda) Campos de temperatura media y velocidad media obtenidos con el modelo de homogenización 2D

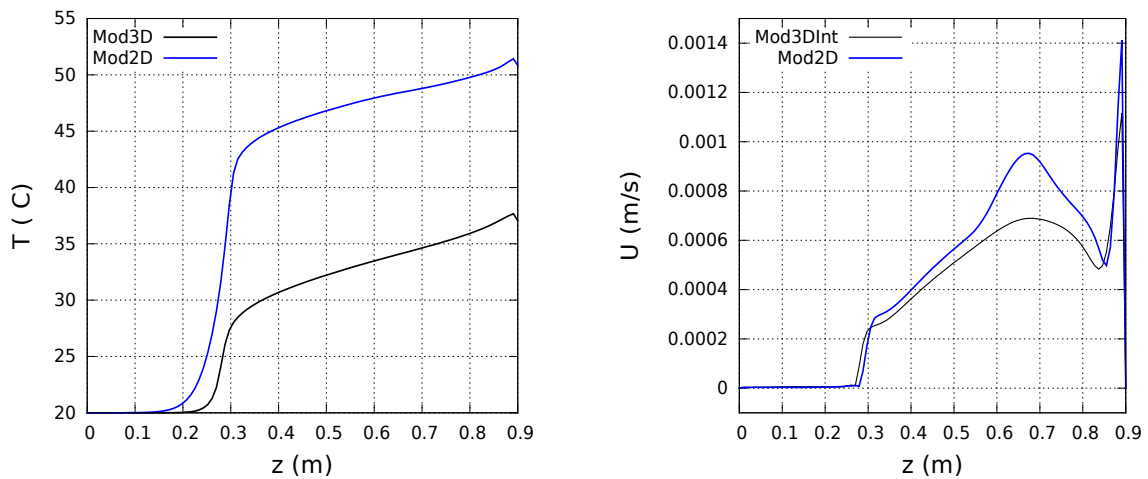


Figura 10: Comparación de perfiles verticales a $x=0.2m$ de temperatura y velocidad en los modelos 3D y de homogenización 2D.

5. CONCLUSIONES

Este trabajo presenta un modelo condensado para el estudio de flujos por convección natural en una cavidad, con características similares a las que se presenta en un transformador de distribución tipo ONAN. Con este modelo se obtienen campos de velocidades y temperaturas similares a los obtenidos de simulaciones 3D para la misma geometría, obteniéndose una diferencia de aproximadamente el 5 % para el caso B y del 38 % para el caso C, respecto de los resultados del modelo 3D. Las diferencias Con este modelo es posible reducir en un factor del orden de las decenas (60 para el caso C), los tiempos de cálculo de las simulaciones 3D.

REFERENCIAS

- Arpino F., Massarotti N., y Mauro A. High rayleigh number laminar-free convection in cavities: New benchmark solutions. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 58(2):73–97, 2010.
- Córdoba P. *Estudio Numérico y Experimental para la optimización Termo-Fluido-Dinámica de transformadores de distribución tipo ONAN*. Tesis de Doctorado, 2016.
- Cordoba P.A., Silin N., y Dari E.A. Natural convection in a cubical cavity filled with a fluid showing temperature-dependent viscosity. *International Journal of Thermal Science*, 98:255–265, 2015.
- Gastelurrutia J., Ramos J.C., y Larraona G.S. Numerical modelling of natural convection of oil inside distribution transformers. *Applied Thermal Engineering*, 31(4):493–505, 2011a.
- Gastelurrutia J., Ramos J.C., Rivas A., Larraona G.S., Izagirre J., y del Río L. Zonal thermal model of distribution transformer cooling. *Applied Thermal Engineering*, 31(17–18):4024 – 4035, 2011b.
- Hajidavalloo E. y Mohamadianfard M. Effect of sun radiation on the thermal behavior of distribution transformer. *Applied Thermal Engineering*, 30(10):1133 – 1139, 2010.
- Incropera F. y DeWitt D. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley and Sons, 1996.
- Lew A. *El metodo de elementos finitos en entornos de alta performance*. Tesis de Maestría, 1998.
- Nakayama A., Kuwahara F., y Liu W. An integrated 2-d navier–stokes equation and its application to 3-d internal flows. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 20(2):99–104, 2006.
- Sitar R., Janic Z., y Stih Z. Improvement of thermal performance of generator step-up. *Applied Thermal Engineering*, 78, 2015.