

MODELO NUMÉRICO DE UNA JUNTA DE REVOLUCIÓN TRIDIMENSIONAL CON JUEGO EN SISTEMAS DINÁMICOS MULTICUERPOS

Federico J. Cavalieri^a, Martín Pucheta^b y Alberto Cardona^a

^a*Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC). Universidad Nacional del Litoral-CONICET, Predio Conicet "Dr Alberto Cassano", Colectora Ruta 168 s/n, Paraje "El Pozo", 3000 Santa Fe, Argentina fcavalieri@santafe-conicet.gov.ar <http://www.cimec.org.ar>*

^b*Centro de Investigación en Informática para la Ingeniería (CIII) y CONICET, Facultad Regional Córdoba de la Universidad Tecnológica Nacional, Maestro López esq. Cruz Roja Argentina, X5016ZAA Córdoba, Argentina, mpucheta@frc.utn.edu.ar, <http://cii.frc.utn.edu.ar>*

Palabras Clave: mecanismos flexibles, alfa generalizado, impacto, contacto.

Resumen. Los defectos en las juntas cinemáticas influyen notablemente en el posicionamiento preciso de los cuerpos que conectan y en la respuesta dinámica de un sistema mecánico. Por ejemplo, el juego en una junta produce impactos que generan mecanismos de desgaste o vibraciones que pueden ocasionar la rotura de algún componente o una reducción drástica de la vida útil de un sistema. En este trabajo, se propone una formulación para incorporar el juego a un modelo de junta de revolución tridimensional. Las ecuaciones de la dinámica se resuelven con un integrador temporal alpha-generalizado no suave, por lo que se garantiza el cumplimiento exacto de las restricciones unilaterales y bilaterales en posición y velocidad. El comportamiento numérico del modelo de junta propuesto es analizado a través de un mecanismo de biela-manivela tridimensional.

1. INTRODUCCION

Las juntas cinemáticas son comúnmente utilizadas para representar diversos tipos de mecanismos complejos. Comúnmente, las juntas se representan con modelos idealizados que condicionan el movimiento de los componentes de un sistema mecánico mediante un conjunto de restricciones cinemáticas. En este tipo de formulaciones las juntas suelen considerarse formadas por cuerpos rígidos perfectos. De esta forma, se generan modelos relativamente simples de ser implementados y computacionalmente eficientes. Sin embargo, en los mecanismos reales, es inevitable que haya desalineamientos, juegos entre partes y errores de ensamblaje entre otros factores que pueden influenciar fuertemente en la respuesta dinámica de las juntas y, por lo tanto, en la de todo el mecanismo. Estos defectos pueden generar cargas variables en el tiempo de muy alta frecuencia, con el consiguiente incremento de la posibilidad de producir roturas por fatiga o desgaste, reduciendo considerablemente la vida útil del sistema e incrementando los costos de operación.

Durante los últimos años, varios modelos de juntas que incluyen distintos tipo de imperfecciones han sido propuestos por diferentes autores. Una forma de representar una junta cinemática es considerando la geometría detallada y la flexibilidad de los cuerpos que la componen, lo cual resulta en un modelo muy preciso, pero al mismo tiempo complejo y computacionalmente demandante (Ambrósio y Verissimo, 2009). Otra alternativa consiste en formular modelos de juntas globales, capaces de introducir defectos como los mencionados, evitando al mismo tiempo el incremento de los grados de libertad del sistema a resolver. Por ejemplo, en el trabajo de Bauchau y Rodriguez (2002) se propone un modelo de junta cilíndrica y otra del tipo esférica, donde se tienen en cuenta los huelgos y la lubricación entre partes. Otra propuesta es la que presenta Flores (2010), donde se describe un modelo de junta con huelgo basado en la teoría elástica de contacto de Hertz. Otras alternativas pueden encontrarse en los siguientes trabajos: Bachau y Ju (2006); Flores et al. (2004); Flores y Ambrósio (2010); Virlez et al. (2013); Flores et al. (2006); Yan et al. (2015); Marques et al. (2016); Sadeq et al. (2016), donde los autores proponen juntas con huelgo y donde el contacto/impacto es modelado con el método de penalidad. Este último método agrega un término al funcional de energía, el cual regulariza las restricciones. En este caso, el desplazamiento es la única variable primaria en la formulación y, consecuentemente, la implementación computacional es relativamente sencilla. La principal desventaja es que el método admite penetración entre los cuerpos y el usuario debe elegir en una forma algo arbitraria el correcto valor de un parámetro denominado factor de penalidad. La solución exacta es únicamente obtenida cuando el factor de penalidad toma un valor infinito; sin embargo, en términos computacionales, valores elevados de penalidad producen matrices mal condicionadas (Kikuchi y Oden, 1988). Por otra parte, el paso de tiempo debe ser suficientemente pequeño para resolver el tiempo en que los cuerpos están en contactos.

El juego en una junta produce impactos en períodos de tiempo muy corto, entonces, la selección del esquema de integración temporal como así también su paso de tiempo condicionan sustancialmente el cálculo de la respuesta del sistema. Estas características se acentúan cuando los cuerpos involucrados son rígidos. En estos casos, los esquemas de integración temporal estándares, tales como la familia Newmark, HHT o α generalizados, fallan completamente en la representación de fenómenos de impacto, ya que la respuesta numérica puede generar artificialmente energía en el instante de contacto, vea por ejemplo Stewart (2000). Para analizar estos casos se han propuesto distintos integradores temporales de la ecuación de movimiento que permiten el tratamiento de problemas de impacto (Chawla y Laursen, 1998; Laursen y Chawla, 1997; Laursen, 2002; Lens, 2006; García Orden y Goicolea, 2005). Sin embargo, el uso de este

tipo de integradores tiene el inconveniente de requerir el desarrollo de elementos finitos especiales, adaptados específicamente al integrador temporal. Como alternativa, se encuentran los integradores temporales *no suaves* que han sido desarrollados para el tratamiento de sistemas mecánicos compuestos por cuerpos rígidos. Este tipo de integradores alcanzan como máximo una precisión de primer orden, siendo ésta su principal limitación (Jean, 1999; Acary, 2013). Un ejemplo de uso de estos integradores temporales en mecanismos compuestos por cuerpos rígidos y juntas con huelgo es el que presenta Flores et al. (2011).

En el trabajo publicado por Brüls et al. (2013), se ha desarrollado un nuevo algoritmo para el tratamiento de problemas de impacto de manera sencilla y eficiente. El integrador temporal propuesto logra combinar la capacidad de resolver las ecuaciones de movimiento con precisión de segundo orden en casi todo momento, salvo en aquellos instantes en los cuales se producen impactos, donde el algoritmo predice con precisión de primer orden. Además, por su formulación, el sistema de ecuaciones resultante puede ser resuelto con una estrategia monolítica iterativa estándar como Newton Raphson, lo que facilita su implementación en programas de elementos finitos no lineales estándar.

En este trabajo se propone un nuevo modelo global y tridimensional de una junta de revolución, donde los efectos del juego y de la desalineación entre sus componentes son tenidos en cuenta en la formulación. Para la integración de las ecuaciones del movimiento se utiliza un integrador temporal α Generalizado No Suave (AGNS) como el propuesto por Brüls et al. (2014), el que garantiza la satisfacción exacta de las restricciones bilaterales y unilaterales, tanto para la posición como para la velocidad, evitando así la penetración entre los cuerpos, algo que físicamente es inaceptable. Finalmente, se propone como ejemplo numérico de validación un mecanismo espacial en donde se analiza la aplicabilidad del modelo de junta propuesto y su influencia en la dinámica de todo el sistema.

2. ECUACION DE MOVIMIENTO

En este trabajo se utilizará el método de elementos finitos no lineal ya que permite modelar mecanismos complejos compuestos por cuerpos rígidos, flexibles, juntas cinemáticas, con distintos tipos de solicitaciones. Por lo tanto, no se hace distinción entre las coordenadas de un cuerpo rígido o elástico y, entonces, es natural la incorporación de los efectos no lineales y de grandes deformaciones en la formulación de un sistema dinámico multicuerpo (Géradin y Cardona, 2001). Luego, para la integración de la ecuación de movimiento de la junta de revolución propuesta, se utilizará un integrador temporal AGNS como el propuesto por Brüls et al. (2014). No obstante, no se pondrá énfasis en el esquema algorítmico, sino que sólo se presentarán las ecuaciones y comentarios necesarios para presentar en forma clara las ecuaciones que gobiernan el problema. Para obtener más detalles acerca del integrador temporal referirse a los trabajos de Brüls et al. (2013, 2014).

El integrador temporal AGNS se obtiene en dos pasos principales. En primer lugar, se utiliza un método de separación o “splitting” para aislar las contribuciones debido a los impactos, las cuales se integran con una precisión de primer orden, en tanto que las otras contribuciones, contribuciones suaves, se integran mediante un esquema de orden superior. En segundo lugar, la ecuación de movimiento se reformula de manera que las restricciones bilaterales y unilaterales aparezcan tanto en los niveles de posición como en los de velocidad (Gear et al., 1985). Con estas consideraciones, la ecuación de movimiento de un sistema multi-cuerpo que incluye

restricciones bilaterales y unilaterales puede ser expresado de la siguiente manera,

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \mathbf{v}^+ \quad (1a)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) d\mathbf{v} - \mathbf{g}_q^T d\mathbf{i} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) dt \quad (1b)$$

$$\mathbf{g}^{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (1c)$$

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{g}^{\mathcal{U}}(\mathbf{q}) \perp d\mathbf{i}^{\mathcal{U}} \geq \mathbf{0} \quad (1d)$$

donde

- \mathbf{q} es el vector de coordenadas, por ejemplo, las coordenadas globales absolutas;
- $\dot{\mathbf{q}}^+(t) = \lim_{\tau \rightarrow t, \tau > t} \dot{\mathbf{q}}(\tau)$, y $\mathbf{v}^+(t) = \lim_{\tau \rightarrow t, \tau > t} \mathbf{v}(\tau)$ son los límites derechos de la velocidad;
- $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{ext}(t) - \mathbf{f}^{damp}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) - \mathbf{f}^{int}(\mathbf{q})$, es el vector que reúne las fuerzas externas, de amortiguamiento e internas;
- \mathbf{M} es la matriz de masas que en general, depende de las coordenadas;
- $d\mathbf{v}$ es la medida diferencial asociada con la velocidad \mathbf{v} , la cual se asume de variación acotada;
- t es el tiempo y dt , es el diferencial de tiempo;
- \mathbf{g} es el conjunto que combina las restricciones unilaterales y bilaterales, y $\mathbf{g}_q(\mathbf{q})$ corresponde a la matriz de gradientes de restricciones;
- $d\mathbf{i}$ es la medida del impulso de las reacciones de contacto y de las fuerzas bilaterales;
- \mathcal{U} indica el conjunto de restricciones unilaterales, $\bar{\mathcal{U}}$ su conjunto complementario, por ejemplo, el conjunto de restricciones bilaterales.

Para simplificar la notación, a continuación utilizaremos la siguiente convención $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}^+(t)$ y $\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{q}}^+(t)$. La forma general del algoritmo de integración AGNS resulta:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_{n+1}) \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_{n+1} - \mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{g}_{\mathbf{q}, n+1}^{\bar{\mathcal{U}}, T} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{n+1}^{\bar{\mathcal{U}}} = \mathbf{0} \quad (2a)$$

$$\mathbf{g}_{\mathbf{q}, n+1}^{\bar{\mathcal{U}}} \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (2b)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_{n+1}) \mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{g}_{\mathbf{q}, n+1}^T \boldsymbol{\nu}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (2c)$$

$$\mathbf{g}^{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{q}_{n+1}) = \mathbf{0} \quad (2d)$$

$$\boldsymbol{\nu}_{n+1}^{\mathcal{U}} - \text{máx}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{\mathcal{U}} - r \mathbf{g}^{\mathcal{U}}(\mathbf{q}_{n+1})) = \mathbf{0} \quad (2e)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_{n+1}) \mathbf{W}_{n+1} - \mathbf{g}_{\mathbf{q}, n+1}^T \boldsymbol{\Lambda}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (2f)$$

$$\mathbf{g}_{\mathbf{q}, n+1}^{\bar{\mathcal{U}}} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (2g)$$

$$\text{Si } g^j(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}) \leq 0 \text{ luego } \Lambda^j - \text{máx}(0, \Lambda^j - r(g_{\mathbf{q}, n+1}^j \mathbf{v}_{n+1} + e g_{\mathbf{q}, n}^j \mathbf{v}_n)) = 0, \forall j \in \mathcal{U} \quad (2h)$$

donde \mathbf{U}_{n+1} y \mathbf{W}_{n+1} corresponden al salto de posición y velocidad respectivamente, r es un coeficiente numérico mayor que cero y e es el coeficiente de restitución que define la energía disipada durante el impacto; $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ es un multiplicador de Lagrange asociado a las restricciones bilaterales; $\tilde{\mathbf{v}}$ es la velocidad libre, por ejemplo, la velocidad del sistema cuando las fuerzas de

las restricciones unilaterales están cerradas y, $\tilde{\mathbf{v}}$ es una aceleración, todas estas cantidades están asociadas a las contribuciones suaves del problema, Ecs.(2)-a-b. Luego, ν es un multiplicador de Lagrange asociado a las restricciones unilaterales y bilaterales de las contribuciones en posición, Ecs.(2)-c-d-e. Finalmente, Λ es un multiplicador de Lagrange asociado a las contribuciones de velocidad, Ecs.(2)-f-g-h. Λ puede ser interpretado como la integral de las reacciones en el paso de tiempo $(t_n, t_{n+1}]$. El algoritmo de integración se completa con las siguientes expresiones,

$$\tilde{\mathbf{q}}_{n+1} = \mathbf{q}_n + h\mathbf{v}_n + h^2(0,5 - \beta)\mathbf{a}_n + h^2\beta\mathbf{a}_{n+1} \quad (3a)$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \tilde{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{U}_{n+1} \quad (3b)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + h\gamma\mathbf{a}_{n+1} \quad (3c)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} + \mathbf{W}_{n+1} \quad (3d)$$

$$(1 - \alpha_m)\mathbf{a}_{n+1} + \alpha_m\mathbf{a}_n = (1 - \alpha_f)\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_{n+1} + \alpha_f\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_n \quad (3e)$$

donde \mathbf{a}_{n+1} es una pseudo aceleración que surge de la utilización del esquema de integración temporal α generalizado (Chung y Hulbert, 1993). Luego, los coeficientes numéricos γ , β , α_m , y α_f pueden ser seleccionados a partir del radio espectral deseado $\rho_\infty \in [0, 1]$ (Chung y Hulbert, 1993),

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}, \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}, \quad \gamma = 0,5 + \alpha_f - \alpha_m, \quad \beta = 0,25(\gamma + 0,5)^2 \quad (4)$$

El conjunto de restricciones unilaterales y bilaterales activas \mathcal{A}_{n+1} y \mathcal{B}_{n+1} y, sus correspondientes conjuntos complementarios $\bar{\mathcal{A}}_{n+1}$ y $\bar{\mathcal{B}}_{n+1}$, se definen de la siguiente manera

$$\mathcal{A}_{n+1} = \bar{\mathcal{U}} \cup \{j \in \mathcal{U} : \nu_{n+1}^j - r g^j(\mathbf{q}_{n+1}) \geq 0\} \quad (5a)$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{n+1} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{A}_{n+1} \quad (5b)$$

$$\mathcal{B}_{n+1} = \bar{\mathcal{U}} \cup \{j \in \mathcal{U} : g^j(\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}) \leq 0 \text{ y } \Lambda_{n+1}^j - r(g_{\mathbf{q},n+1}^j \mathbf{v}_{n+1} + e g_{\mathbf{q},n}^j \mathbf{v}_n) \geq 0\} \quad (5c)$$

$$\bar{\mathcal{B}}_{n+1} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{B}_{n+1} \quad (5d)$$

$$\mathcal{UB}_{n+1} = \mathcal{U} \cap \mathcal{B}_{n+1} \quad (5e)$$

Los residuos escalados con respecto al paso de tiempo h resultan en los siguientes vectores,

$$\mathbf{r}^s = \begin{bmatrix} M(\mathbf{q}_{n+1})h\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_{n+1} - \mathbf{g}_{\mathbf{q},n+1}^{\bar{\mathcal{U}},T} h\tilde{\lambda}_{n+1}^{\bar{\mathcal{U}}} - h\mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}, t_{n+1}) \\ \mathbf{g}_{\mathbf{q},n+1}^{\bar{\mathcal{U}}} \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{r}^p = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} M(\mathbf{q}_{n+1})\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{g}_{\mathbf{q},n+1}^{\mathcal{A},T} \nu_{n+1}^{\mathcal{A}} \\ \mathbf{g}^{\mathcal{A}}(\mathbf{q}_{n+1}) \\ \nu_{n+1}^{\mathcal{A}} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{r}^v = \begin{bmatrix} M(\mathbf{q}_{n+1})\mathbf{W}_{n+1} - \mathbf{g}_{\mathbf{q},n+1}^{\mathcal{B},T} \Lambda_{n+1}^{\mathcal{B}} \\ \mathbf{g}_{\mathbf{q},n+1}^{\bar{\mathcal{U}}} \mathbf{v}_{n+1} \\ \mathbf{g}_{\mathbf{q},n+1}^{\mathcal{UB}} \mathbf{v}_{n+1} + e \mathbf{g}_{\mathbf{q},n}^{\mathcal{UB}} \mathbf{v}_n \\ \Lambda^{\bar{\mathcal{B}}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{r} = [\mathbf{r}^s \quad \mathbf{r}^p \quad \mathbf{r}^v]^T \quad (9)$$

Luego, introduciendo el vector de correcciones

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{v}} & -h\Delta \tilde{\lambda}^{\bar{\mathcal{U}}} & \Delta \mathbf{U}/h & -\Delta \nu^{\mathcal{A}}/h & -\Delta \nu^{\bar{\mathcal{A}}}/h & \Delta \mathbf{W} & -\Delta \Lambda^{\mathcal{B}} & -\Delta \Lambda^{\bar{\mathcal{B}}} \end{bmatrix}^T \quad (10)$$

la ecuación de corrección se obtiene como

$$\mathbf{S}_t \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{r} \quad (11)$$

donde la matriz de iteración \mathbf{S}_t se define como

$$\mathbf{S}_t = \left[\begin{array}{cc|ccc|ccc} \mathbf{S}_t^* & \mathbf{g}_q^{\bar{u},T} & h^2 \mathbf{K}_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & h \mathbf{C}_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_q^{\bar{u}} + \frac{h\beta}{\gamma} \mathbf{G}^{*s} & \mathbf{0} & h \mathbf{G}^{*s} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\beta}{\gamma} \mathbf{G}^p & \mathbf{0} & \mathbf{M} + \mathbf{G}^p & \mathbf{g}_q^{A,T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\beta}{\gamma} \mathbf{g}_q^A & \mathbf{0} & \mathbf{g}_q^A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}^{\bar{A}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{h\beta}{\gamma} \mathbf{G}^v & \mathbf{0} & h \mathbf{G}^v & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{g}_q^{\bar{b},T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_q^{\bar{b}} + \frac{h\beta}{\gamma} \mathbf{G}^{*v} & \mathbf{0} & h \mathbf{G}^{*v} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{g}_q^{\bar{b}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}^{\bar{B}} \end{array} \right] \quad (12)$$

donde $\mathbf{I}^{\bar{A}}$ y $\mathbf{I}^{\bar{B}}$ son matrices identidad y

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_t^* &= \frac{1 - \alpha_m}{(1 - \alpha_f)\gamma} \mathbf{M} + h \mathbf{C}_t + \frac{\beta h^2}{\gamma} \mathbf{K}_t, & \mathbf{K}_t &= \frac{\partial(M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) - \mathbf{g}_q^{\bar{u},T} \tilde{\lambda}^{\bar{u}})}{\partial \mathbf{q}}, \\ \mathbf{C}_t &= -\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}}, & \mathbf{G}^p &= -\frac{\partial(M(\mathbf{q})\mathbf{U} - \mathbf{g}_q^{\bar{a},T} \nu^A)}{\partial \mathbf{q}}, & \mathbf{G}^v &= -\frac{\partial(M(\mathbf{q})\mathbf{W} - \mathbf{g}_q^{\bar{b},T} \Lambda^B)}{\partial \mathbf{q}}, \\ \mathbf{G}^{*s} &= \frac{\partial(\mathbf{g}_q^{\bar{u}} \tilde{\mathbf{v}})}{\partial \mathbf{q}}, & \mathbf{G}^{*v} &= \frac{\partial(\mathbf{g}_q^{\bar{b}} \mathbf{v})}{\partial \mathbf{q}} \end{aligned} \quad (13)$$

con \mathbf{K}_t y \mathbf{C}_t , las matrices tangentes de rigidez y de amortiguamiento, respectivamente. La gran ventaja de esta formulación es que la solución se obtiene en un esquema monolítico sin introducir grandes modificaciones en la estructura de un código de elementos finitos no lineal previamente desarrollado.

3. FORMULACION DE LA JUNTA

El modelo de junta que se propone en este trabajo está formada por un cilindro interior, o muñón, y un cilindro exterior, o cojinete, ver Fig. 1. Ambos cuerpos son considerados rígidos y sin propiedades másicas. Luego, si no se tiene en cuenta el desplazamiento axial relativo entre el cojinete y el muñón, existen cuatro movimientos admisibles diferentes

- vuelo libre: no hay contacto entre los elementos, ver Fig. 2-a.
- el muñón entra en contacto con el cojinete a lo largo de una línea, ver Fig. 2-b.
- el muñón entra en contacto simultáneamente con el cojinete en dos puntos, ver Fig. 2-c.
- el muñón entra en contacto en un punto del cojinete, ver Fig. 2-d.

Por lo tanto, el comportamiento de la junta y de todo el sistema depende de estas cuatro configuraciones, las que se encuentran relacionadas geoméricamente con la longitud del muñón y con el huelgo. En la condición de no contacto, la junta no introduce fuerzas al sistema, ya que el muñón se mueve libremente dentro del cojinete. Cuando el muñón y el cojinete entran

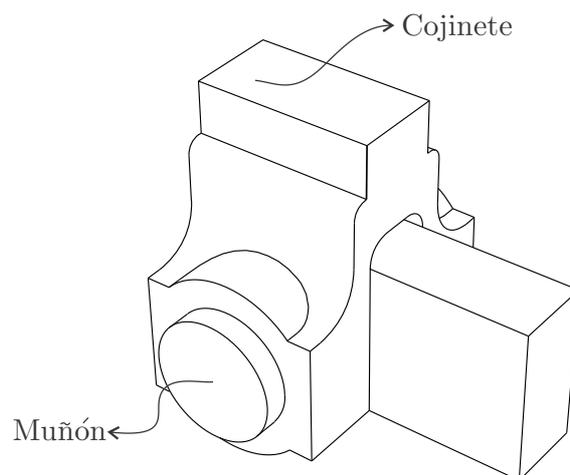


Figura 1: Esquema de una junta de revolución.

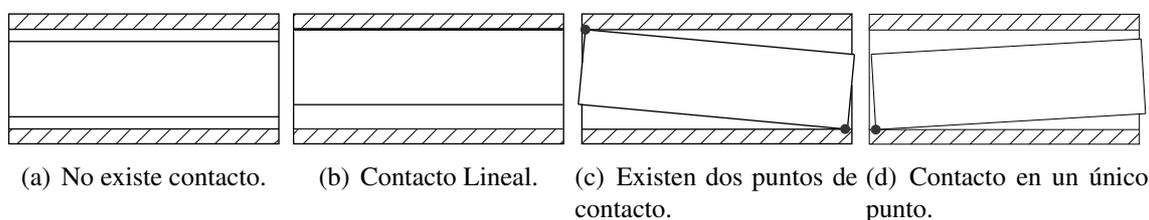


Figura 2: Cuatro posibilidades para el movimiento relativo entre el muñón y el cojinete.

en contacto, se introducen fuerzas de contacto/impacto y entonces se generan cambios en las velocidades y aceleraciones que afectan a todo el sistema.

El modelo de junta propuesto tiene dos nodos, el A y el B , ver Fig. 3. El nodo A se ubica sobre el eje del cojinete, mientras que, el nodo B se ubica en la mitad de la longitud del muñón. Utilizando un sistema cartesiano inercial definido por los vectores \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 y \mathbf{E}_3 , ver Fig.3, la posición de los nodos A y B en la configuración de referencia es descrita por los vectores \mathbf{X}_A y \mathbf{X}_B , respectivamente, en tanto que en la configuración actual, la posición de los nodos A y B está dada por los vectores \mathbf{x}_A y \mathbf{x}_B , respectivamente.

La junta que aquí se propone asume que el contacto ocurre entre la superficie cilíndrica interior del cojinete y los extremos del muñón. Cabe destacar que la dirección de la fuerza de contacto depende de la geometría del muñón en el punto de contacto, por ejemplo, el muñón podría tener bordes filosos o bordes redondeados con un radio muy pequeño. Sin embargo, como el objetivo del trabajo no es analizar en detalle las tensiones que se generan en los puntos de contacto, una aproximación razonable para una formulación 3D es considerar a los extremos del muñón con forma esférica, ver Fig. 3. Esta aproximación es razonable para aquellas situaciones prácticas donde el ángulo de inclinación del muñón con respecto al cojinete resulta pequeño. Como el modelo de junta que se presenta es global, esto es, no se tiene en cuenta la flexibilidad, masa y inercia de los elementos que la componen, el muñón es modelado por medio de un cuerpo rígido que vincula a las dos esferas ideales de contacto ubicadas en los extremos, como se esquematiza en la Fig. 3. Este cuerpo rígido tiene una longitud L que puede ser calculada en la configuración inicial a partir de la posición de los puntos C_1 y C_2 que refieren a los centros de las dos esferas de contacto, es decir

$$L = \|\mathbf{X}_{C_1} - \mathbf{X}_{C_2}\| = 2d \quad (14)$$

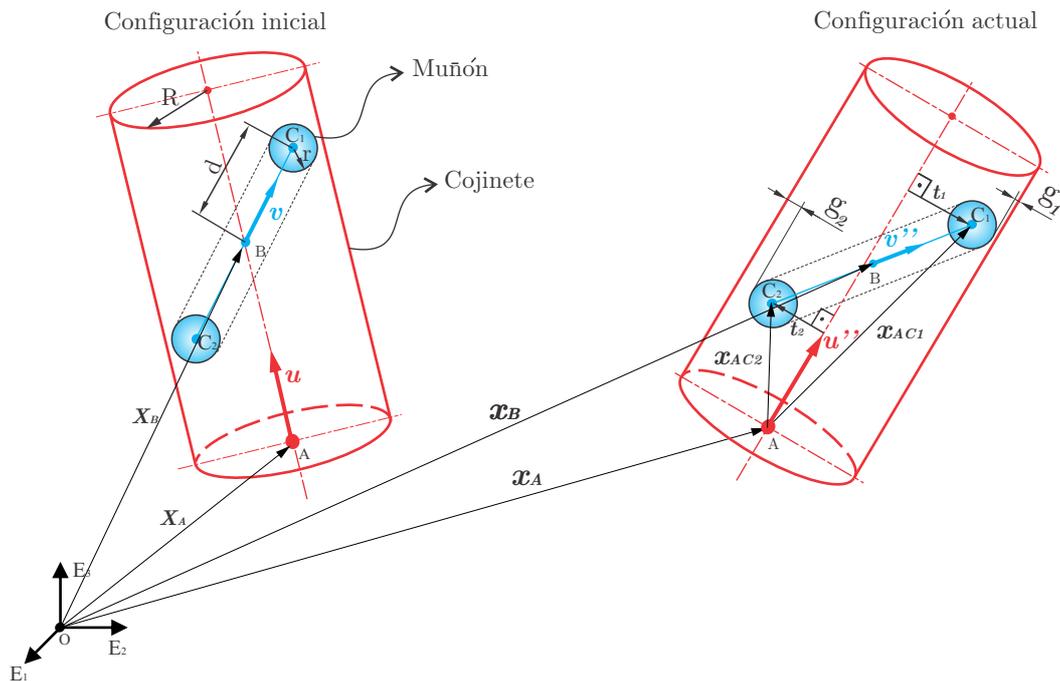


Figura 3: Configuración general de una junta de revolución tridimensional con juego.

donde $d = \|X_{C_\alpha} - X_B\|$ y X_{C_α} es el vector posición del punto C_α con $\alpha = 1$ ó 2 . En la configuración inicial, se distinguen dos vectores unitarios u y v que se encuentran alineados con los ejes del cojinete y del muñón, respectivamente, ver Fig. 3. Estos dos vectores tienen una dirección arbitraria, por lo tanto, el modelo de junta cuenta con la posibilidad de introducir una desalineación inicial entre el muñón y el cojinete. Luego, en la configuración actual, estos vectores se transforman como:

$$u'' = R_A u \quad v'' = R_B v \tag{15}$$

donde R_A y R_B son operadores de rotación definidos por $R = \exp(\tilde{\Psi})$, donde Ψ es el vector de rotación cartesiano (Gérardin y Cardona, 2001).

Se denomina vector excentricidad t_α al vector que conecta el eje de revolución del cojinete con el centro C_α de las esferas de contacto; es normal al eje del cojinete y por lo tanto, puede ser calculado como la proyección ortogonal del vector x_{AC_α} ,

$$t_\alpha = (I - u'' \otimes u'') x_{AC_\alpha} \tag{16}$$

aquí, el vector $x_{AC1} = x_{C1} - x_A = x_B + dv'' - x_A$ y en forma similar el vector $x_{AC2} = x_{C2} - x_A = x_B - dv'' - x_A$. Luego, si R es el radio del cojinete y r el radio del muñón, a partir de la Fig. 3 se puede establecer la siguiente relación para el contacto

$$R = \|t_\alpha\| + g_\alpha + r \Rightarrow R - r = \|t_\alpha\| + g_\alpha \Rightarrow g_\alpha = c - \|t_\alpha\| \tag{17}$$

donde g_α representa la distancia que separa los puntos de contacto entre el muñón y el cojinete, en tanto que c es el huelgo, esto es, la diferencia entre el radio del cojinete y del muñón. Por lo tanto, el modelo de junta que aquí se propone requiere de los siguientes parámetros para su definición:

1. Dirección de los vectores u y v , que definen la dirección inicial del eje del cojinete y del muñón, respectivamente;

2. el huelgo c ;
3. la longitud L del muñón;
4. coeficiente de restitución e .

Por hipótesis del modelo, la masa y los momentos de inercia del muñón y del cojinete no se consideran en la junta (no obstante, el modelo podría adquirirlos suponiendo un cuerpo rígido con propiedades de inercia) y entonces, únicamente las restricciones unilaterales o restricciones de contacto, afectarán a los vectores residuos de posición \mathbf{r}^p y de velocidad \mathbf{r}^v por medio del gradiente de restricción \mathbf{g}_q , ver Ecs.(7,8). Con estas consideraciones, el gradiente de la restricción para el contacto α resulta,

$$g_{\alpha q} = \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial(c - \|\mathbf{t}_{\alpha}\|)}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial \|\mathbf{t}_{\alpha}\|}{\partial \mathbf{q}} \quad (18)$$

donde $\mathbf{q}^T = [\mathbf{x}_A \ \Psi_A \ \mathbf{x}_B \ \Psi_B]^T$. Realizando las derivadas de g_{1q} y g_{2q} se obtienen los siguientes vectores necesarios para los cálculos de los residuos \mathbf{r}^p y \mathbf{r}^v , como así también para la matriz de iteración \mathbf{S}_t ,

$$g_{1q} = \begin{bmatrix} \nu_1 \mathbf{e}_{t1} \\ \nu_1 (\mathbf{u}'' \cdot \mathbf{x}_{AC1}) \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{R}_A^T \mathbf{e}_{t1} \\ -\nu_1 \mathbf{e}_{t1} \\ -\nu_1 d \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{R}_B^T \mathbf{e}_{t1} \end{bmatrix}; \quad g_{2q} = \begin{bmatrix} \nu_2 \mathbf{e}_{t2} \\ \nu_2 (\mathbf{u}'' \cdot \mathbf{x}_{AC2}) \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{R}_A^T \mathbf{e}_{t2} \\ -\nu_2 \mathbf{e}_{t2} \\ \nu_2 d \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{R}_B^T \mathbf{e}_{t2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

donde

$$\mathbf{e}_{t1} = \frac{\mathbf{t}_1}{\|\mathbf{t}_1\|}; \quad \mathbf{e}_{t2} = \frac{\mathbf{t}_2}{\|\mathbf{t}_2\|} \quad (20)$$

$\tilde{\mathbf{u}}$ y $\tilde{\mathbf{v}}$ son matrices antisimétricas de spin tal que $\mathbf{v} = \text{vect}(\tilde{\mathbf{v}})$ y $\mathbf{u} = \text{vect}(\tilde{\mathbf{u}})$.

4. EJEMPLO DE APLICACION

Para evaluar el comportamiento de la junta propuesta se propone un mecanismo espacial como el que se muestra en la Fig. 4, sin consideración de los efectos de fricción. El modelo numérico fue implementado en el código de elementos finitos Oofelie (2014). La junta de revolución con juego se ubica entre la manivela y el marco fijo. El muñón se une a la manivela, mientras que el cojinete se conecta al marco fijo. Las longitudes y las propiedades geométricas de cada cuerpo se presentan en la Tabla 1. La manivela y la biela son modeladas como cuerpos rígidos vinculados por una junta universal. Luego, una junta deslizante y una junta universal restringen el movimiento de un extremo de la biela para que pueda deslizarse únicamente a lo largo del eje Y .

Las condiciones iniciales para el mecanismo son las siguientes: la manivela se encuentra en posición vertical con una velocidad inicial de 2π rad/s en la dirección negativa del eje Y . Luego, el carro deslizante se encuentra a: $(0; 0, 14; -0, 154)$ [m]. Las restantes velocidades y desplazamientos quedan determinados por las restricciones cinemáticas del mecanismo. Para las simulaciones, se han tenido en cuenta las fuerzas de inercia, las reacciones de vínculo y las fuerzas gravitacionales, estas últimas aplicadas en la dirección Z negativa ($g=9.81$ m/s²). Las propiedades geométricas de la junta se presentan en la Tabla 2.

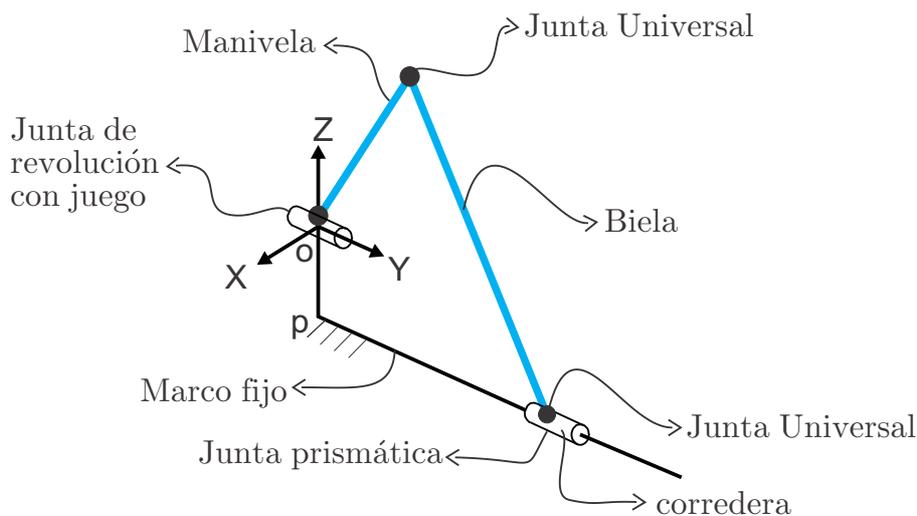


Figura 4: Configuración del mecanismo espacial

Cuerpo	Longitud [m]	Masa [kg]	$I_{\xi\xi}$ [kg m ²]	$I_{\eta\eta}$ [kg m ²]	$I_{\zeta\zeta}$ [kg m ²]
Manivela	0,1	0,12	0,0001	0,0001	0,00001
Biela	0,29	0,5	0,004	0,0004	0,004
Carro deslizante	-	0,5	0,0001	0,0001	0,0001

Tabla 1: Dimensiones, propiedades másicas y momentos de inercia de cada cuerpo.

El comportamiento dinámico del sistema se analiza a través del movimiento del carro deslizante y del muñón. Los resultados son comparados con los de un mecanismo con una junta ideal, es decir sin juego. El valor del coeficiente de restitución propuesto para la simulación $e = 0,9$, valor frecuentemente utilizado para simular el contacto entre cuerpos constituidos por materiales metálicos. El tiempo de simulación fue 1 seg., el paso de tiempo 1×10^{-5} seg. y el radio espectral $\rho_{\infty} = 0,8$.

La Fig. 5 muestra la posición del carro deslizante a lo largo del tiempo. En el mecanismo formado por la junta con huelgo se puede apreciar una disminución de la amplitud por efecto de la utilización de un coeficiente de restitución menor que 1 y un aumento del período producto de los impactos en la junta. Estos efectos se ven magnificados en la respuesta de la velocidad, tal como se muestra en la Fig. 6.

La Fig. 7 muestra la trayectoria de los puntos de contacto del muñón. En el instante inicial, el muñón se encuentra localizado en el centro y luego, una vez aplicada la velocidad inicial, el muñón comienza a rebotar contra la pared interna del cojinete.

Parámetro	Valor
Huelgo	0,5 [mm]
Longitud del muñón	20 [mm]
Dirección inicial \mathbf{u}	[0, 1, 0]
Dirección inicial \mathbf{v}	[0, 1, 0]

Tabla 2: Propiedades geométricas de la junta de revolución.

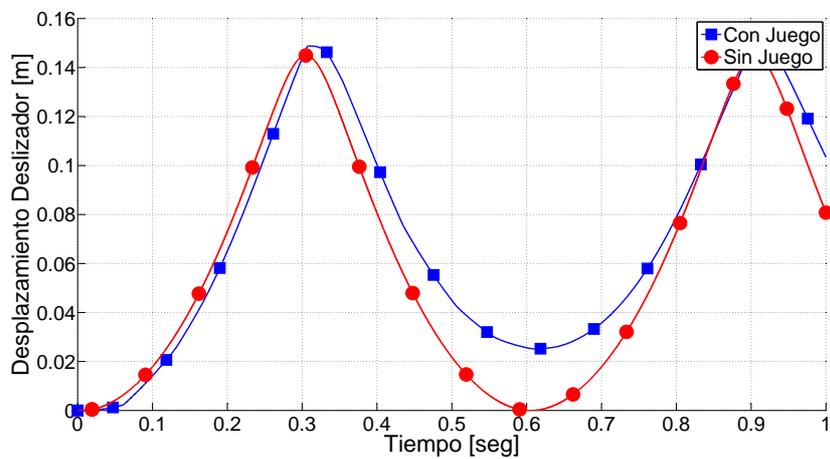


Figura 5: Desplazamiento del carro deslizante.

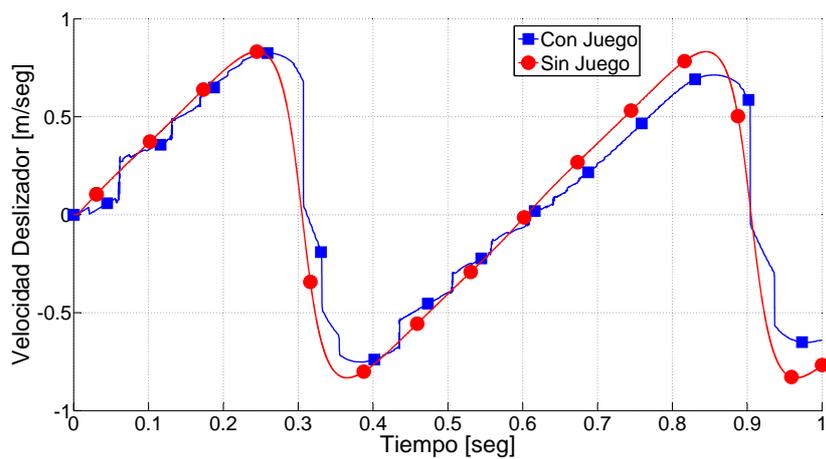


Figura 6: Velocidad del carro deslizante.

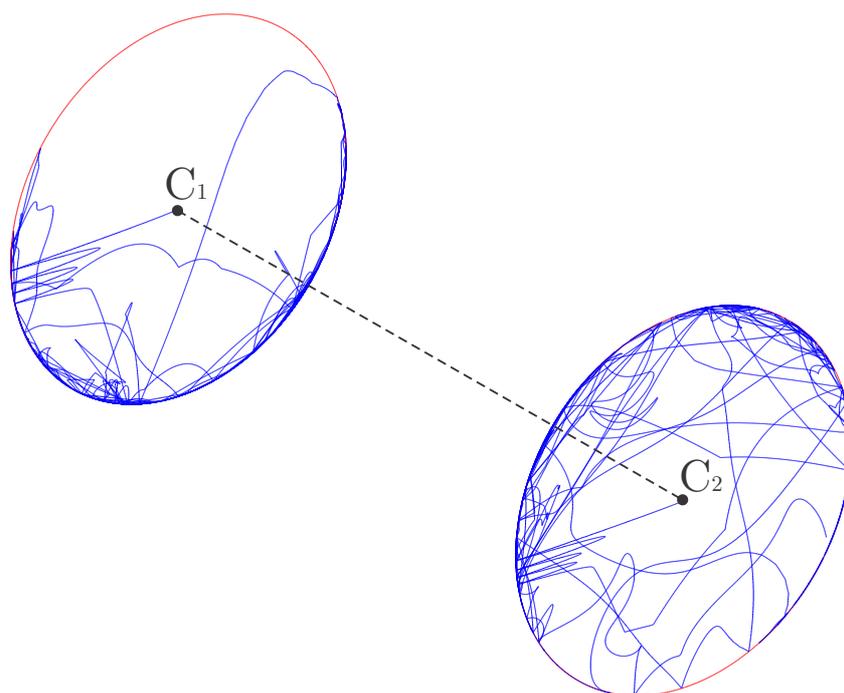


Figura 7: Órbitas del muñón.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado una junta de revolución tridimensional con juego aplicable a sistemas dinámicos multicuerpos. La integración de las ecuaciones de movimiento se realiza por medio de un integrador temporal α generalizado no suave. El modelo de junta propuesto incluye dos tipos de imperfecciones, el huelgo y la desalineación entre el muñón y el cojinete. El modelo propuesto puede resultar útil para predecir las magnitudes máximas de velocidad, fuerzas de contacto y aceleraciones en mecanismos compuestos por cuerpos rígidos o flexibles.

Se propuso como ejemplo de aplicación para el análisis del efecto del huelgo un mecanismo tridimensional de biela manivela. Las soluciones numéricas muestran que la presencia del huelgo en la junta cinemática influye drásticamente en el incremento de las velocidades de todo el sistema.

La presencia de flexibilidad de los cuerpos, o la lubricación en las juntas cambian el comportamiento del sistema. La inclusión de efectos de fricción en distintas juntas, resulta en una tarea que se deja como trabajo futuro.

6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha recibido financiamiento del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) PIP 1105, Universidad Nacional del Litoral (CAI+D 2011-503201602000 87LI) y la Agencia Nacional de Promoción Científica y Técnica PICT 2013-28-94.

REFERENCIAS

- V. Acary. Projected event-capturing time-stepping schemes for nonsmooth mechanical systems with unilateral contact and Coulomb's friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 256(10):224–250, 2013.

- J. Ambrósio y P. Verissimo. Improved bushing models for general multibody systems and vehicle dynamics. *Multibody System Dynamics*, 22(4):341–365, 2009.
- O. Bachau y C. Ju. Modeling friction phenomena in flexible multibody dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(50-51):6909–6924, 2006.
- O. Bauchau y J. Rodriguez. Modeling of joints with clearance in flexible multibody systems. *International Journal of Solids and Structures*, 39(1):41 – 63, 2002.
- O. Brüls, V. Acary, y A. Cardona. Simultaneous enforcement of constraints at position and velocity levels in the nonsmooth generalized alpha scheme. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 281:131–161, 2014.
- O. Brüls, Acary V., Cavalieri F., Virlez G., y Cardona A. An augmented Lagrangian and reduced index formulation for the analysis of multibody systems with impacts. In Zdravko Terze, editor, *Multibody Dynamics 2013, ECCOMAS Thematic Conference*, Zagreb, Croatia, July 2013.
- V. Chawla y T. Laursen. Energy consistent algorithms for frictional contact problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42(5):799–827, 1998.
- J. Chung y G. Hulbert. Time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- alpha method. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 60(2):371–375, 1993.
- P. Flores. A parametric study on the dynamic response of planar multibody systems with multiple clearance joints. *Nonlinear Dynamics*, 61(4), 2010.
- P. Flores y J. Ambrósio. On the contact detection for contact-impact analysis in multibody systems. *Multibody System Dynamics*, 24(1):103–122, 2010.
- P. Flores, J. Ambrósio, J.C.P. Claro, y H.M. Lankarani. Spatial revolute joints with clearances for dynamic analysis of multi-body systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, 220(1):257–271, 2006.
- P. Flores, J. Ambrósio, y J.P. Claro. Dynamic analysis for planar multibody mechanical systems with lubricated joints. *Multibody System Dynamics*, 12(1):47–74, 2004.
- P. Flores, R. Leine, y C. Glocker. *Modeling and Analysis of Rigid Multibody Systems with Translational Clearance Joints Based on the Nonsmooth Dynamics Approach*. 2011.
- J.C. García Orden y J.M. Goicolea. *Robust analysis of flexible multibody systems and joint clearances in an energy conserving framework*, pages 205–237. Springer Netherlands, Dordrecht, 2005. ISBN 978-1-4020-3393-3.
- C. Gear, B. Leimkuhler, y G. Gupta. Automatic integration of euler-lagrange equations with constraints. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 12-13:77–90, 1985.
- M. Géradin y A. Cardona. *Flexible Multibody Dynamics*. John Wiley and Sons, 2001.
- M. Jean. The non-smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177(34):235–257, 1999.
- N. Kikuchi y J.T. Oden. *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. SIAM, 1988.
- T. Laursen y V. Chawla. Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:863–886, 1997.
- T.A. Laursen. *Computational Contact and Impact Mechanics*. Springer: Berlin, Heidelberg, 2002.
- E. Lens. *Energy Preserving/Decaying Time Integration Schemes for Multibody Systems Dynamics*. Phd thesis, Universidad Nacional del Litoral, 2006.
- F. Marques, D. Rycheký, F. Isaac, M. Hajžman, P. Polach, y P. Flores. Spatial revolute joints

- with clearance and friction for dynamic analysis of multibody mechanical systems. In *The 4th Joint International Conference on Multibody System Dynamics*, Montréal, Canada, May 29- June 2 2016.
- Y. Sadeq, M. Dardel, H.M. Daniali, y M.H. Ghasemi. Modeling and control of crank–slider mechanism with multiple clearance joints. *Multibody System Dynamics*, 36(2):143–167, 2016.
- D. Stewart. Rigid-body dynamics with friction and impact. *SIAM Review*, 39:3–39, 2000.
- G. Virlez, O. Brüls, E. Tromme, y P. Duysinx. Modeling joints with clearance and friction in multibody dynamic simulation of automotive differentials. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 3(1):013003–, 2013.
- S. Yan, W. Xiang, y L. Zhang. A comprehensive model for 3D revolute joints with clearances in mechanical systems. *Nonlinear Dynamics*, 80(1):309–328, 2015.