

## ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE UN CONCEPTO DE AERONAVE X-HALE-UAV: UN ENFOQUE MULTICUERPO

Luciano M. Nitardi<sup>a</sup>, Bruno A. Rocca<sup>a,b</sup>, Sergio Preidikman<sup>b</sup> y Fernando G. Flores<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Grupo de Matemática Aplicada, Facultad de Ingeniería, Universidad de Río Cuarto, Campus Universitario, Ruta Nacional 36 Km. 601, Río Cuarto, Argentina. [luciano.nitardi@gmail.com](mailto:luciano.nitardi@gmail.com)*

<sup>b</sup> *Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT) UNC-CONICET, y Departamento de Estructuras, FCEFYN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Velez Sarsfield 1611, 5016 Córdoba, Argentina*

**Palabras clave:** X-HALE-UAV, Dinámica multicuerpo, DAEs, Simulaciones numéricas, Esquemas de integración.

**Resumen.** El estudio y diseño de vehículos aéreos no tripulados (UAVs), extremadamente flexibles (X), que pueden volar a gran altitud y con gran autonomía (HALE), son destructores de antiguos paradigmas, ya que han sido concebidos como plataformas espaciales, flexibles y móviles, resultando una alternativa viable a los actuales satélites de comunicaciones. En este trabajo se presenta una plataforma numérica que permite estudiar el comportamiento dinámico del concepto simplificado de un X-HALE-UAV. La aeronave se modela como una colección de cuerpos rígidos, conectados entre sí por articulaciones flexibles. Las ecuaciones que gobiernan la dinámica del UAV se derivan mediante un enfoque energético basado en las ecuaciones de Lagrange para sistemas con restricciones. Las ecuaciones de movimiento obtenidas mediante este enfoque son del tipo diferenciales-algebraicas (DAEs) de índice 3. Estas ecuaciones de restricción son incluidas en la formulación de las ecuaciones de movimiento por medio de multiplicadores de Lagrange. La integración de todas las ecuaciones gobernantes, resultantes, se realiza en forma numérica, simultánea e interactiva en el dominio del tiempo mediante diferentes esquemas de integración, tales como el algoritmo predictor-corrector de 4to orden de Hamming y el algoritmo de Newmark, entre otros. Con el objetivo de evaluar la eficiencia y robustez de la herramienta de simulación desarrollada, se comparan resultados con problemas bien documentados, en la literatura. Finalmente, se presenta el desarrollo de simulaciones numéricas, para estudiar el comportamiento dinámico de un concepto simplificado de X-HALE-UAV, considerando el efecto de ráfagas ascendentes y/o laterales sobre la aeronave. Adicionalmente, se estudia la influencia de una forma sencilla de daño estructural en el ala, el cual se modela como un cambio brusco de la rigidez asociada a una de las conexiones flexibles entre tramos de alas sobre la dinámica del sistema.

## 1 INTRODUCCIÓN

Durante la década de los 80's se entendió que la energía solar podría utilizarse como fuente de alimentación para aviones que vuelen a gran altitud y operen con gran autonomía. Bajo estos supuestos, AeroVironment diseñó y construyó el HALSOL (*High-Altitude Solar vehicle*) (Colella and Wenneker, 1994; Scheiman *et al.*, 1994). Una década más tarde esta aeronave fue rediseñada dando lugar al vehículo llamado Pathfinder. Con el objetivo de continuar con el desarrollo de este tipo especial de sistemas aeronáuticos, NASA fundó el programa ERAST (*Environment Research Aircraft and Sensor*); marco en el cual los vehículos Pathfinder y Centurión evolucionaron en el prototipo Helios HP03 (*Long Endurance Configuration*) (Gibbs, 2015) (ver Figura 1).



Figura 1: Prototipo HP03 Helios (<http://www.nasa.gov/centers/armstrong/news>)

En el marco del programa de investigación ERAST se realizaron grandes avances relacionados a los conceptos de diseño HALE-UAVs. Sin embargo, la ausencia de herramientas de análisis apropiadas, contribuyó a que NASA aprobara el primer vuelo del HP03 el 7 de junio de 2003, a pesar de que los márgenes de seguridad estructural, de estabilidad, control y aeroelástico eran mucho más bajos que los de su predecesor, el HP01. Este primer ensayo debió ser abortado 15 horas luego del despegue, debido a una fuga detectada en el sistema de refrigeración. Luego de una serie de modificaciones, el 26 de junio de 2003:

*“...El HP03-2 despegó a las 10:06 am hora local del PMRF (Navy Pacific Missile Range Facility). A unos 30 minutos de vuelo, el avión encontró nuevamente turbulencia y experimentó un cambio drástico (inesperado y persistente) hacia una configuración con un gran ángulo de diedro. Como resultado, aparecieron oscilaciones de cabeceo divergentes. La velocidad de diseño de la aeronave fue posteriormente superada y las altas presiones dinámicas resultantes causaron la falla de los paneles estructurales localizados sobre el borde de ataque de las alas externas produciendo el desprendimiento de los paneles solares y el recubrimiento del extradós de las alas. El avión impactó en el océano dentro de los límites del rango de prueba PMRF destruyéndose completamente... Las principales causas del accidente incluyen: [La] falta de métodos adecuados de análisis llevó a una evaluación incorrecta del riesgo asociada a los efectos de los cambios de configuración en la aeronave que condujo a una decisión inapropiada de volar un avión altamente sensible a perturbaciones externas... [y] los cambios de configuración en la aeronave, debidas a limitaciones programáticas y tecnológicos, alteraron la distribución de masa sobre la estructura del vehículo reduciendo significativamente la robustez del diseño y los márgenes de seguridad...”* (Cesnik *et al.*, 2010).

Este incidente catastrófico llevó a la NASA a reconocer el poco entendimiento y las limitadas herramientas analíticas con las que se cuenta para diseñar aeronaves HALE muy flexibles. La recomendación principal de NASA fue:

*“...[que] es necesario el desarrollo de nuevos métodos y herramientas de análisis en el dominio del tiempo y multidisciplinarios (estructurales, aeroelásticas, aerodinámicas, atmosféricas, de propulsión, de control, etc.) cada vez más avanzados para el análisis de aeronaves extremadamente flexibles...”* (Cesnik *et al.*, 2010; Galante, 2003; Noll *et al.*, 2004).

A pesar de una larga historia de estudios relacionados a la dinámica del vuelo de aviones flexibles, la mayoría de estos consideran modelos lineales, o a lo sumo, una dinámica de cuerpo

rígido no lineal para el vehículo, acoplada con modelos estructurales lineales. Tales métodos, basados en teorías lineales, han sido utilizados exitosamente, para el diseño de aeronaves convencionales (Crimaldi *et al.*, 1993; Reschke, 2005; Schmidt and Raney, 2001). Friedmann (1999), en su exhaustiva revisión sobre aeroelasticidad, señaló la importancia de los problemas aero-servo-elásticos, asociados con vehículos tipo HALE. Particularmente, destacó que el carácter autónomo de estos vehículos requiere un sistema de control que interactúe con la dinámica de cuerpo rígido y la dinámica estructural. Livne y Weishaar (2003) presentaron una descripción detallada de los diseños no convencionales de los últimos 100 años, que han impulsado el desarrollo de teorías y herramientas aeroelásticas hasta la fecha.

Respecto a la dinámica de HALE-UAVs, una revisión del estado del arte, para los distintos enfoques utilizados en deducir las ecuaciones de movimiento, de éstas aeronaves extremadamente flexibles, se puede encontrar en las referencias (Patil *et al.*, 2000; Cesnik and Su, 2005; Wang *et al.*, 2010).

Recientemente, Arguello *et al.* (2014) desarrollaron un modelo dinámico de un concepto simplificado de un X-HALE-UAV. Para ello utilizaron una formulación híbrida basada en las ecuaciones de Newton-Euler en conjunto con las ecuaciones de Lagrange. La aeronave se modeló como una colección de cuerpos rígidos interconectados por medio de articulaciones flexibles, y la integración numérica de las ecuaciones de movimiento resultantes se realizó simultánea e interactivamente en el dominio del tiempo por medio del esquema de cuarto orden de Hamming. Arguello y su equipo se concentró en el estudio de la respuesta dinámica del sistema cuando se permiten grandes deflexiones alares.

Todos estos estudios han contribuido de diferentes maneras en la carrera por comprender el comportamiento no lineal y la estabilidad de vehículos aéreos, caracterizados por estructuras altamente deformables. Sin embargo, éste problema está aún muy lejos de ser definitivamente entendido, debido a la compleja naturaleza asociada al acoplamiento entre la dinámica de cuerpo rígido y la dinámica estructural de la aeronave.

Sobre la base de lo mencionado anteriormente, en este trabajo se presenta el desarrollo de una plataforma de simulación numérica, que permite estudiar el comportamiento dinámico de un vehículo X-HALE-UAV conceptual. La aeronave se modela como una colección de cuerpos rígidos conectados elásticamente entre sí, y soportado mediante una plataforma flexible que simula el anclaje al túnel de viento (Arguello *et al.*, 2014). En esta primera etapa no se consideran las cargas no conservativas provenientes de la aerodinámica. Sin embargo el marco de trabajo propuesto permite introducir: *i*) diferentes modelos de ráfagas con el objetivo de analizar la respuesta de la aeronave a perturbaciones externas; y *ii*) un modelo de daño simple, basado en el cambio de rigidez torsional, que vinculan las diferentes superficies sustentadoras que componen la aeronave. Las ecuaciones de movimiento se obtuvieron por medio de un enfoque energético basado en la dinámica de sistemas multicuerpo, las cuales se implementaron en un código computacional interactivo y estructurado desarrollado íntegramente en MATLAB®.

Además, la herramienta computacional permite elegir diferentes esquemas de integración numérica para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas-diferenciales (DAEs) resultantes, tales como: Runge-Kutta, Hamming, Newmark, Newmark con amortiguamiento, y diferencia central, entre otros.

## 2 MODELO DINÁMICO DEL X-HALE-UAV

La aeronave se modela como una colección de cuerpos rígidos (fuselaje, alas, trenes de aterrizaje y motores) conectados entre sí rígidamente o por articulaciones flexibles (ver Figura 2a).

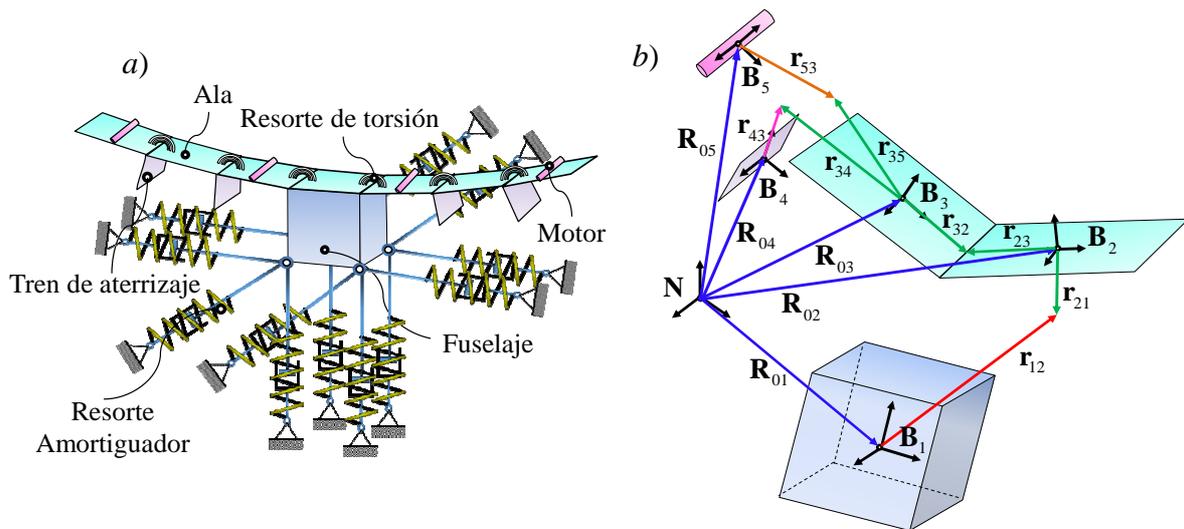


Figura 2: (a) esquema de un modelo conceptual X-HALE-UAV (b) Definición de sistemas de referencias;

Las ecuaciones de movimiento (EOM) de la aeronave UAV, se deducen mediante un enfoque energético basado en las ecuaciones de Lagrange para sistemas con restricciones holonómicas.

El fuselaje (representado por un cubo) se vincula a la superficie del túnel de viento por medio de 12 resortes y 12 amortiguadores lineales (tres por cada vértice de la base del cubo). Los motores se representan mediante cuerpos cilíndricos, y las alas y trenes de aterrizaje como placas planas rectangulares; asunciones éstas que permiten simplificar la etapa de modelado matemático. En este trabajo se utiliza un conjunto de coordenadas redundantes para describir el espacio de configuración del sistema multicuerpo; es decir, el número de coordenadas es superior al número de grados de libertad. Como consecuencia, tales coordenadas no son independientes, sino que están relacionadas entre sí por medio de ecuaciones de restricción, las cuales son introducidas en las EOM mediante los multiplicadores de Lagrange (Nikravesh, 1988).

Para llevar a cabo de una manera ordenada la deducción de las ecuaciones que gobiernan la evolución temporal del UAV se utilizaron  $N_M + N_A + N_T + 2$  sistemas de referencias, donde  $N_M$  es el número de cuerpos que simulan los motores,  $N_A$  el número de cuerpos que representan las alas y  $N_T$  el número de cuerpos que representan los trenes de aterrizaje (ver Figura 2b). Esto es: *i*) un marco de referencia inercial o Newtoniano,  $\mathbf{N} = \{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$ ; y *ii*) un marco de referencia fijo al centro de masa de cada cuerpo que compone el sistema dinámico, denotado  $\mathbf{B}^i = \{\hat{\mathbf{b}}_1^i, \hat{\mathbf{b}}_2^i, \hat{\mathbf{b}}_3^i\}$  para  $i = 1, \dots, N_M + N_A + N_T + 1$ .

Los vectores que conforman cada uno de los marcos de referencia descritos anteriormente, son vectores unitarios que cumplen con la siguiente condición:

$$[\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3] = \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot (\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3) = +1. \quad (1)$$

Las condiciones impuestas por la ecuación (1) indican que el conjunto de vectores que forman los marcos de referencias  $\mathbf{N}$ , y  $\mathbf{B}^i$ , generan bases ortonormales y dextrógiras (cumplen con la regla de la mano derecha) (Shuster *et al.*, 1993).

La configuración de cada componente del sistema multicuerpo se describe por medio de 7 coordenadas absolutas. Tres coordenadas para definir la posición de un punto fijo del cuerpo y cuatro para definir su orientación. El número total de coordenadas es  $n_{coord} = 7n_b$  (donde  $n_b = N_T + N_A + N_M + 1$  es el número de cuerpos). Sin embargo, éstas no son independientes, sino que están relacionadas a través de  $n_c$  ecuaciones de restricción, resultando un sistema de  $n_{DOF} = 7n_b -$

$n_c$  grados de libertad. Para orientar cada cuerpo con respecto al marco de referencia inercial,  $\mathbf{N}$ , se utilizó una parametrización por cuaterniones unitarios; hecho que introduce una ecuación de restricción adicional por cada cuerpo.

El conjunto de coordenadas para el cuerpo  $i$  se define como,

$$\mathbf{q}_i = \{q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}, q_{i4}, q_{i5}, q_{i6}, q_{i7}\}^T, \quad \text{para } i = 1, \dots, n_b. \quad (2)$$

Finalmente, el vector de coordenadas para todo el sistema multicuerpo se define como,

$$\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \dots, \mathbf{q}_{n_b}\}^T. \quad (3)$$

## 2.1 Ecuaciones de restricción

Para cada cuerpo del sistema se especifican tres tipos de restricción:

- 1) **Restricción de posición:** especifica la conexión entre los diferentes componentes del sistema, tales como: ala-fuselaje, ala-ala, ala-tren de aterrizaje y ala-motor;
- 2) **Restricción de orientación:** especifica la orientación relativa ala-fuselaje, ala-tren de aterrizaje y ala-motor; y
- 3) **Restricción U-Q (Unitary Quaternions):** se debe a la restricción adicional que surge por la utilización de una parametrización por cuaterniones unitarios para especificar la orientación de cada componente del sistema multicuerpo.

Todas las restricciones se escriben con respecto al marco de referencia inercial,  $\mathbf{N}$ , y son del tipo holónomas esclerónomas. La ecuación (4) presenta la forma matemática general de cada clase de restricción mencionada anteriormente.

$$\begin{aligned} \text{Con } \phi_{ij}^r &= \left( [\mathbf{R}_{0i} + \mathbf{A}_i \mathbf{r}_{ij}] - [\mathbf{R}_{0j} + \mathbf{A}_j \mathbf{r}_{ji}] \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_r = 0, \\ \text{Ort } \phi_{ij}^1 &= \left( \hat{\mathbf{b}}_1^j \right)^T [\mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_i] \hat{\mathbf{b}}_2^i = 0, \\ \text{Ort } \phi_{ij}^2 &= \left( \hat{\mathbf{b}}_2^j \right)^T [\mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_i] \hat{\mathbf{b}}_3^i = 0, \\ \text{Ort } \phi_{ij}^3 &= \left( \hat{\mathbf{b}}_3^j \right)^T [\mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_i] \hat{\mathbf{b}}_1^i = 0, \text{ y} \\ \text{U-Q } \phi_k &= \sum_{s=4}^7 q_{ks}^2 - 1 = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

donde los superíndices *Con*, *Ort* y *U-Q* indican la naturaleza de la restricción, es decir, de posición, orientación, y debida a la parametrización de rotación adoptada, respectivamente.  $\mathbf{R}_{0i}$  ( $\mathbf{R}_{0j}$ ) es el vector posición del centro de masa del cuerpo  $i$  ( $j$ ) respecto al marco inercial  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{r}_{ij}$  ( $\mathbf{r}_{ji}$ ) es el vector posición del punto de conexión entre el cuerpo  $i$  ( $j$ ) y el cuerpo  $j$  ( $i$ ) medido respecto del marco de referencia  $\mathbf{B}^i$  ( $\mathbf{B}^j$ ),  $\mathbf{A}_i$  ( $\mathbf{A}_j$ ) es la matriz de rotación (en término de parámetros de Euler) que orienta el marco  $\mathbf{B}^i$  ( $\mathbf{B}^j$ ) con respecto a  $\mathbf{N}$ ,  $\{\hat{\mathbf{b}}_1^i, \hat{\mathbf{b}}_2^i, \hat{\mathbf{b}}_3^i\}$  es el conjunto de vectores unitarios ortogonales fijo a  $\mathbf{B}^i$ , y  $\{\hat{\mathbf{b}}_1^j, \hat{\mathbf{b}}_2^j, \hat{\mathbf{b}}_3^j\}$  es el conjunto de vectores unitarios ortogonales fijo a  $\mathbf{B}^j$ .

El conjunto de restricciones de orientación expuestas en la Ec. (4) establecen que las bases  $\{\hat{\mathbf{b}}_1^i, \hat{\mathbf{b}}_2^i, \hat{\mathbf{b}}_3^i\}$  y  $\{\hat{\mathbf{b}}_1^j, \hat{\mathbf{b}}_2^j, \hat{\mathbf{b}}_3^j\}$  son coincidentes durante toda la simulación. Sin embargo, el sistema estudiado en este trabajo contiene vínculos que permiten el giro en una dirección, llamadas juntas de revolución (*hinge joint*). Las ecuaciones de restricción para este tipo de juntas son una

versión levemente modificada de las ecuaciones presentadas en (4) (Géradin and Cardona, 2001). Tal modificación radica fundamentalmente en no restringir el giro alrededor del eje de rotación de la junta. Si se adopta como eje de rotación de la junta de revolución el eje  $\hat{\mathbf{b}}_3$ , se obtiene la restricción  $\hat{\mathbf{b}}_3^j = \hat{\mathbf{b}}_3^i$ , con lo cual las ecuaciones de restricción a nivel de la orientación expresadas en (4) se reducen a las siguientes,

$$\begin{aligned} {}^{Ort}\phi_{ij}^1 &= (\hat{\mathbf{b}}_2^j)^T [\mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_i] \hat{\mathbf{b}}_3^i = 0, \quad y \\ {}^{Ort}\phi_{ij}^2 &= (\hat{\mathbf{b}}_3^j)^T [\mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_i] \hat{\mathbf{b}}_1^i = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

Finalmente, el vector de restricciones holonómicas para el sistema dinámico es,

$$\Phi(\mathbf{q}) = \{ \dots, {}^{Con}\phi_{ij}^r, \dots, {}^{Ort}\phi_{ij}^1, {}^{Ort}\phi_{ij}^2, {}^{Ort}\phi_{ij}^3, \dots, {}^{U-Q}\phi_1, \dots, {}^{U-Q}\phi_{n_b} \}. \quad (6)$$

## 2.2 Fuerzas generalizadas

Las fuerzas generalizadas asociadas al conjunto de coordenadas absolutas, que describen la configuración de cada componente del sistema multicuerpo, se calculan por medio del principio de trabajos virtuales, (Nikravesh 1988). En este trabajo se consideran fuerzas no conservativas, originadas por amortiguadores y fuerzas conservativas que provienen del campo gravitacional terrestre y las ejercidas por los resortes lineales y de torsión. El trabajo virtual de una fuerza externa  $\mathbf{F}_{pj}$  aplicada en el punto  $P$  perteneciente al  $j$ -ésimo cuerpo en el sistema dinámico se puede expresar como:

$$\delta W_{pj} = \mathbf{F}_{pj} \cdot \delta \mathbf{R}_{pj}, \quad (7)$$

donde  $\delta \mathbf{R}_{pj}$  es el desplazamiento virtual de un punto arbitrario  $P$  perteneciente al cuerpo  $j$  del sistema multicuerpo, esto es:

$$\delta \mathbf{R}_{pj} = \delta \mathbf{R}_{0j} + \delta(\mathbf{A}_j \mathbf{r}_{pj}) = \delta \mathbf{R}_{0j} + \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{q}}_j} (\mathbf{A}_j \mathbf{r}_{pj}) \delta \bar{\mathbf{q}}_j. \quad (8)$$

Donde  $\mathbf{r}_{pj}$  es el vector posición de un punto arbitrario  $P$  en el cuerpo  $j$  medido respecto al marco de referencia fijo a dicho cuerpo,  $\mathbf{B}^j$ , y  $\bar{\mathbf{q}}_j = \{q_{j4}, q_{j5}, q_{j6}, q_{j7}\}^T$  es el conjunto de parámetros de Euler asociados al cuerpo  $j$ .

Siguiendo el procedimiento expuesto por Nikravesh (1988) se puede demostrar que,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{q}}_j} (\mathbf{A}_j \mathbf{r}_{pj}) \delta \bar{\mathbf{q}}_j = -2\tilde{\mathbf{r}}_{pj} \mathbf{G}_j \delta \bar{\mathbf{q}}_j. \quad (9)$$

Donde  $\tilde{\mathbf{r}}_{pj}$  es un tensor antisimétrico cuyo vector axial es  $\mathbf{r}_{pj}$  y su acción sobre un vector arbitrario es similar al producto vectorial, y

$$\mathbf{G}_j = \begin{bmatrix} -q_{j5} & q_{j4} & -q_{j7} & q_{j6} \\ -q_{j6} & q_{j7} & q_{j4} & -q_{j5} \\ -q_{j7} & -q_{j5} & q_{j5} & q_{j4} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

### 2.2.1 Resorte lineal

El fuselaje (modelado como un cubo) es el único componente del sistema dinámico que está conectado a resortes lineales. Como se mencionó anteriormente, a cada uno de los cuatro vértices ubicados en la base del cubo, concurren tres resortes (ver Figura 2a). Tales resortes tienen longitudes naturales  $l_{0s}$  para  $s = 1, \dots, 12$ , donde el subíndice  $s$  identifica el resorte en consideración.

La fuerza debida al  $s$ -ésimo resorte vinculado al vértice  $u$  ( $u = 1, \dots, 4$ ) se puede expresar como,

$$\mathbf{F}_{us}^R = -k_s \Delta l_s \hat{\mathbf{e}}_s, \quad (11)$$

donde  $k_s$  es la constante elástica del resorte,  $\Delta l_s$  es la elongación del resorte y  $\hat{\mathbf{e}}_s$  un vector unitario que indica la recta de acción del mismo (ver Figura 3).

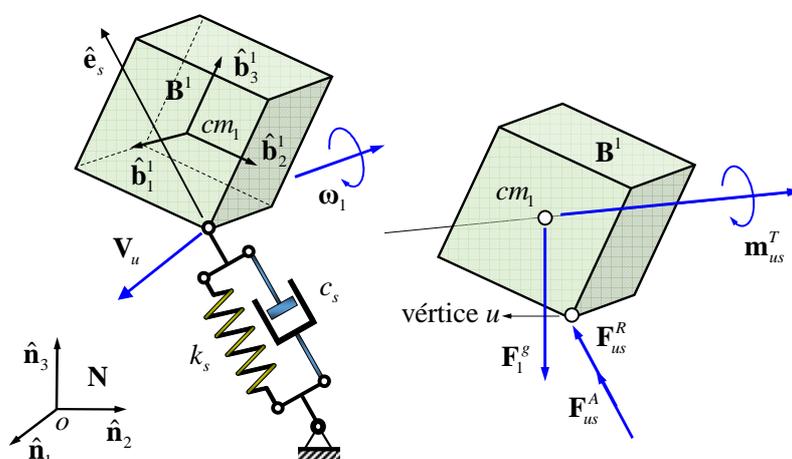


Figura 3: Definición de la fuerza ejercida por el  $s$ -ésimo resorte y  $s$ -ésimo amortiguador sobre el vértice  $u$  del fuselaje.

Utilizando la ecuación (11) y luego de manipulaciones algebraicas, la carga generalizada del resorte “ $s$ ” vinculado al vértice “ $u$ ” y asociada al conjunto de coordenadas absolutas del fuselaje ( $\mathbf{q}_1$ ) es,

$$\mathbf{Q}_{1s}^R = \left[ \left( \mathbf{F}_{us}^R \right)^T \quad 2\mathbf{m}_{us}^T \mathbf{G}_1 \right], \quad (12)$$

donde,  $\mathbf{m}_{us}^T = \left( \tilde{\mathbf{r}}_{u1} \mathbf{F}_{us}^R \right)^T$ .

### 2.2.2 Amortiguadores

Al igual que los resortes, los amortiguadores se encuentran conectados solo al fuselaje. A cada vértice  $u$  localizado en la base del cubo concurren tres amortiguadores. Se debe notar que los vértices donde concurren los resortes y amortiguadores son puntos pertenecientes al fuselaje del sistema dinámico, y por lo tanto, a medida que el cubo se mueve, el punto  $u$  experimenta una velocidad,  $\mathbf{V}_u$  (ver Figura 3). La fuerza del amortiguador  $s$  ( $s = 1, \dots, 12$ ) que concurre al vértice  $u$  está dado por:

$$\mathbf{F}_{us}^A = -c_s \left( \mathbf{V}_u \cdot \hat{\mathbf{e}}_s \right) \hat{\mathbf{e}}_s, \quad (13)$$

donde  $c_s$  es la constante del  $s$ -ésimo amortiguador que concurre al vértice  $u$ , y  $\hat{\mathbf{e}}_s$  es un vector unitario que indica la recta de acción del amortiguador.

Luego de manipulaciones algebraicas, la carga generalizada del amortiguador “s” vinculado al vértice “u” y asociada al conjunto de coordenadas absolutas del fuselaje es,

$$\mathbf{Q}_{1s}^A = \left[ \left( \mathbf{F}_{us}^A \right)^T \quad 2\mathbf{m}_{us}^T \mathbf{G}_1 \right], \quad (14)$$

donde,  $\mathbf{m}_{us}^T = \left( \tilde{\mathbf{r}}_{u1} \mathbf{F}_{us}^A \right)^T$ .

### 2.2.3 Resortes de torsión.

Estos resortes, se ubican solamente en las juntas del tipo de revolución (ala-ala), donde se genera un momento puro sobre cada una de las alas que intervienen en la unión. Esto es,

$$\mathbf{T}_s = -k_{Ts} \theta_{sr} \hat{\mathbf{u}}_s, \quad (15)$$

donde  $k_{Ts}$  es la constante de rigidez del s-ésimo resorte de torsión,  $\theta_{sr}$  es el ángulo relativo entre el ala  $s$  y el ala  $r$ , y  $\hat{\mathbf{u}}_s$  es el vector unitario que indica la dirección del vector momento  $\mathbf{T}_s$  en el marco de referencia inercial  $\mathbf{N}$  (ver Figura 4). Es claro que el subíndice  $s$  depende del número de juntas de revolución, presentes en el sistema multicuerpo.

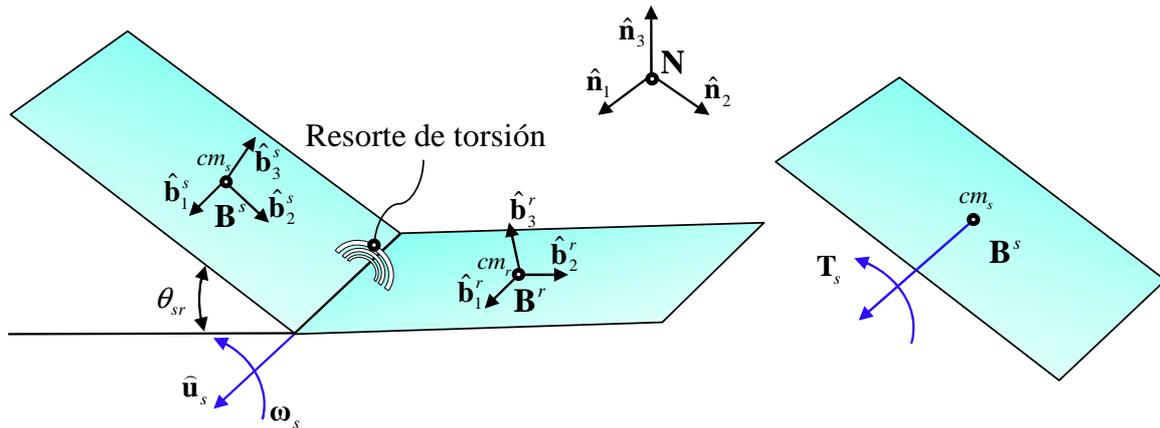


Figura 4: Definición de momento por el resorte de torsión  $s$ -ésimo sobre la  $s$ -ésima ala.

Finalmente, la carga generalizada asociada al momento  $\mathbf{T}_s$  y al conjunto de coordenadas  $\mathbf{q}_s$  que describe la configuración del ala “s” es,

$$\mathbf{Q}_s^{Tor} = \left[ \mathbf{0}_{1 \times 3} \quad 2\mathbf{T}_s^T \mathbf{G}_s \right]. \quad (16)$$

### 2.2.4 Campo gravitacional

Por último, todos los cuerpos que componen el UAV están sujetos a la acción del campo gravitacional terrestre. Debido a la asunción de la hipótesis de cuerpo rígido, tales fuerzas se encuentran aplicadas en el centro de masa de cada cuerpo  $j$ , esto es:

$$\mathbf{F}_j^g = -m_j g \hat{\mathbf{n}}_3, \quad (17)$$

donde  $m_j$  es la masa del cuerpo  $j$ ,  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $\hat{\mathbf{n}}_3$  es el vector unitario que indica la dirección en la cual actúa el campo gravitatorio.

La carga generalizada debido al campo gravitacional actuando sobre el cuerpo  $j$  es,

$$\mathbf{Q}_j^g = \left[ \left( \mathbf{F}_j^g \right)^T \quad \mathbf{0} \right]. \quad (18)$$

### 2.3 Ecuaciones de movimiento

Siguiendo el procedimiento expuesto por Shabana (2010), la forma general de las ecuaciones dinámicas para el cuerpo  $j$  está dada por,

$$\mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{B}_{\mathbf{q}_j}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_j^v + (\mathbf{Q}_j^{nc})^T + (\mathbf{Q}_j^c)^T, \quad (19)$$

donde  $\mathbf{M}_j$  es la matriz generalizada de masa del cuerpo  $j$ ,  $\mathbf{B}_{\mathbf{q}_j}$  es la matriz jacobiana de restricciones para el cuerpo  $j$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$  es el vector de multiplicadores de Lagrange,  $\mathbf{Q}_j^v$  es un vector cuadrático en las velocidades que surge de diferenciar la energía cinética del cuerpo  $j$  con respecto al tiempo, y a las coordenadas  $\mathbf{q}_j$ ,  $\mathbf{Q}_j^{nc}$  comprende todas las cargas generalizadas de origen no conservativas, y  $\mathbf{Q}_j^c$  las cargas generalizadas conservativas.

Finalmente, las ecuaciones de movimiento para el sistema multicuerpo completo se obtiene ensamblando las ecuaciones de movimiento de cada cuerpo, en conjunto con las ecuaciones de restricción, es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{Q}^v + (\mathbf{Q}^{nc})^T + (\mathbf{Q}^c)^T, \\ \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (20)$$

El término  $\mathbf{B}_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda}$  representa las fuerzas generalizadas de restricción. El significado de cada multiplicador de Lagrange depende de la manera en que se especificaron las restricciones (Nikravesh, 1988).

## 3. SIMULACIONES NUMÉRICAS

Las ecuaciones diferenciales y el vector de restricciones cinemáticas en (20) representan un sistema de *ecuaciones diferenciales-algebraicas* (DAEs) de índice 3 para el sistema bajo estudio. En este trabajo, se utilizaron dos enfoques diferentes para resolver numéricamente el sistema expresado en (20). El primero consiste en diferenciar las ecuaciones de restricción con el objetivo de obtener DAEs de índice 2 o 1, llamado *reducción de índice* (Bauchau, 2010). Por otro lado, el segundo método consiste en integrar directamente el sistema de DAEs de índice 3 por medio de diferentes integradores tales como Newmark (Bauchau, 2010; Cardona and Géradin, 2001).

### 3.1. Reducción de índice

Esta técnica consiste en transformar el sistema de DAEs de índice 3 a un sistema de DAEs de índice 1 por medio de la diferenciación de las ecuaciones de restricción dos veces con respecto al tiempo; procedimiento que produce un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODES). El nuevo vector de restricciones,  $\ddot{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{q})$ , se satisface idénticamente a nivel de la aceleración; es decir  $\ddot{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ . Este argumento nos permite reescribir el sistema expresado en (20) como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{B}_{\mathbf{q}}^T \\ \mathbf{B}_{\mathbf{q}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^v + (\mathbf{Q}^{nc})^T + (\mathbf{Q}^c)^T \\ -\partial_{\mathbf{q}}(\mathbf{B}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

donde  $\partial_{\mathbf{q}}$  denota derivada parcial con respecto al vector de coordenadas  $\mathbf{q}$ .

El sistema (21) puede ser integrado por medio de integradores estándares para ODEs (Runge-Kutta, Hamming, etc). Sin embargo, debido a la reducción de índice, las restricciones a nivel de la posición,  $\Phi(\mathbf{q})=\mathbf{0}$ , y a nivel de la velocidad,  $\dot{\Phi}(\mathbf{q})=\mathbf{0}$ , en general no se satisfacen idénticamente, produciéndose una “violación” de las mismas. Este inconveniente se puede suprimir y/o controlar estabilizando la solución por medio de diversas estrategias. En este trabajo se utiliza la técnica de Baumgarte *et al.* (1972), y el método de proyección de coordenadas (Ascher *et al.*, 1995).

### 3.2 Integración directa

La implementación de integradores tales como Newmark, requiere la utilización de una versión linealizada de las ecuaciones dinámicas presentadas en (20) (Gérardin, and Cardona, 2001). Para ello se expresa la solución corregida de manera incremental, es decir,

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_n &= \hat{\mathbf{q}}_n + \Delta\mathbf{q}, \\ \dot{\mathbf{q}}_n &= \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n + \Delta\dot{\mathbf{q}}, \\ \ddot{\mathbf{q}}_n &= \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n + \Delta\ddot{\mathbf{q}}, \text{ y} \\ \lambda_n &= \hat{\lambda}_n + \Delta\lambda,\end{aligned}\tag{22}$$

donde ( $\hat{\quad}$ ) sobre la variable indica cantidad aproximada, y  $\Delta\mathbf{q}$ ,  $\Delta\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\Delta\ddot{\mathbf{q}}$ , y  $\Delta\lambda$  son los incrementos en el vector de coordenadas, velocidades, aceleraciones y multiplicadores de Lagrange, respectivamente.

Adicionalmente, la Ec. (20) se reescribe como,

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \lambda) &= \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_q^T \lambda - \mathbf{Q}^v - (\mathbf{Q}^{nc})^T - (\mathbf{Q}^c)^T = 0, \\ \Phi(\mathbf{q}) &= \mathbf{0},\end{aligned}\tag{23}$$

y se realiza una expansión en series de Taylor alrededor del punto  $(\hat{\mathbf{q}}_n, \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n, \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n, \hat{\lambda}_n)$  truncando la misma en el término lineal (aproximación de primer orden). Luego de algunas manipulaciones algebraicas se obtiene la versión linealizada de las ecuaciones de movimiento y el vector de restricciones,

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_n \Delta\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{T_n} \Delta\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_{T_n} \Delta\mathbf{q} + (\mathbf{B}_q^T)_n \Delta\lambda &= -\mathbf{H}_n, \\ (\mathbf{B}_q)_n \Delta\mathbf{q} &= -\Phi_n.\end{aligned}\tag{24}$$

Donde,

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{T_n}(\dot{\hat{\mathbf{q}}}_n, \hat{\mathbf{q}}_n) &= -\partial_{\dot{\hat{\mathbf{q}}}_n} \left[ \mathbf{Q}^v + (\mathbf{Q}^{nc})^T + (\mathbf{Q}^c)^T \right], \text{ y} \\ \mathbf{K}_{T_n}(\dot{\hat{\mathbf{q}}}_n, \hat{\mathbf{q}}_n, \lambda_n, t_n) &= \partial_{\hat{\mathbf{q}}_n} \left[ \mathbf{M}_n(\hat{\mathbf{q}}_n) \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n \right] + \partial_{\hat{\mathbf{q}}_n} \left[ (\mathbf{B}_q^T)_n(\hat{\mathbf{q}}_n, t_n) \hat{\lambda}_n \right] - \\ &\quad - \partial_{\hat{\mathbf{q}}_n} \left[ \mathbf{Q}^v + (\mathbf{Q}^{nc})^T + (\mathbf{Q}^c)^T \right],\end{aligned}\tag{25}$$

donde  $\partial_{\dot{\hat{\mathbf{q}}}}$  y  $\partial_{\hat{\mathbf{q}}}$  denotan derivada parcial con respecto a los vectores  $\dot{\hat{\mathbf{q}}}$  y  $\hat{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{C}_{T_n}$  es la matriz de amortiguamiento tangente, y  $\mathbf{K}_{T_n}$  es la matriz de rigidez tangente.

Finalmente, la Ec. (24) se puede reescribir como,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \ddot{\mathbf{q}} \\ \Delta \ddot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{T_n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{q}} \\ \Delta \dot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T_n} & (\mathbf{B}_q^T)_n \\ (\mathbf{B}_q)_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_n \\ -\Phi_n \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Donde  $\mathbf{H}_n$  es el residuo.

### 3.3 Implementación computacional

El código computacional, creado íntegramente en MATLAB®, es ordenado como se representa esquemáticamente en la figura 5, donde observan dos divisiones importantes, referentes a la integración por reducción de índice (Bauchau, 2010) y la integración directa (Bauchau, 2010; Cardona and Géradin, 2001).

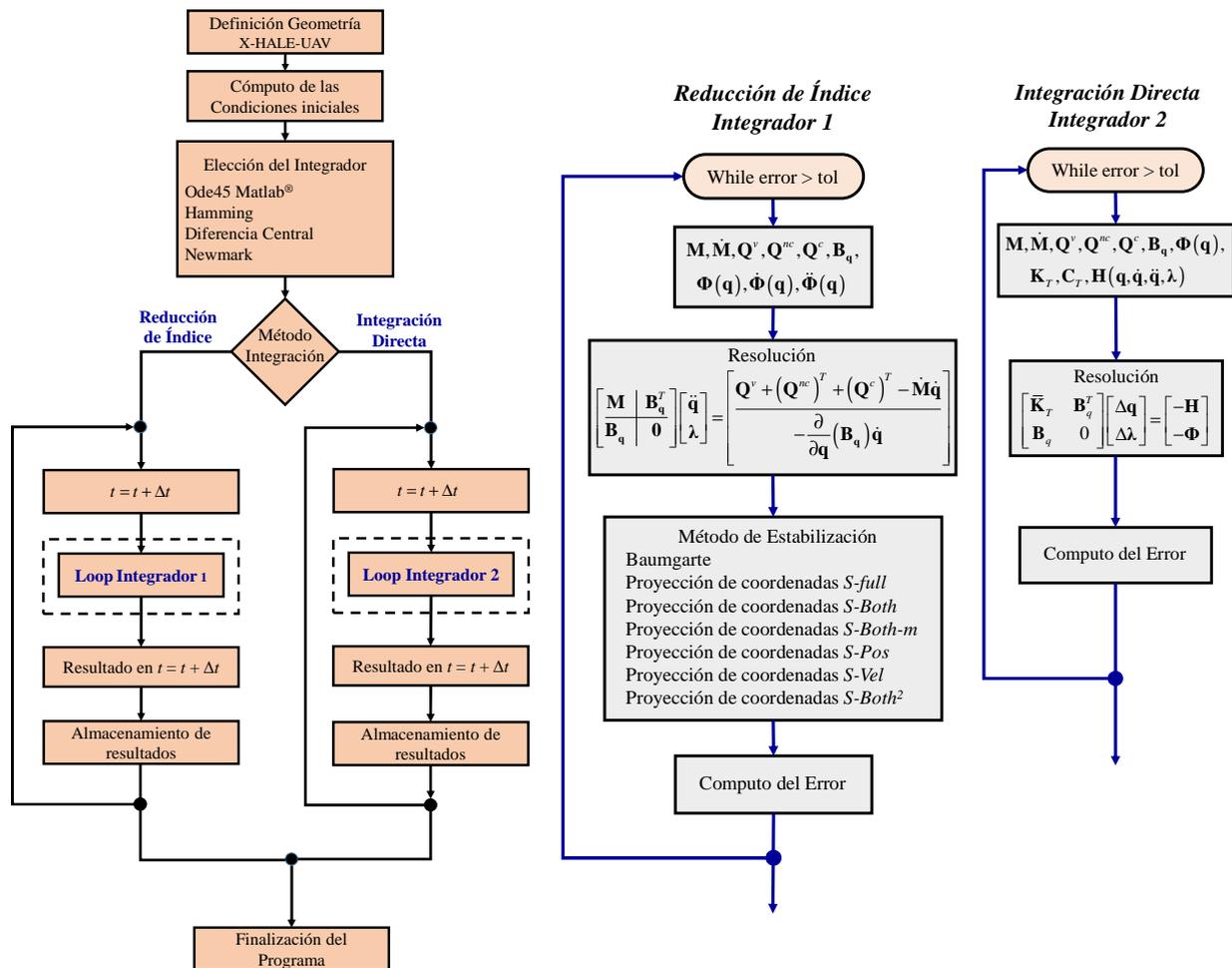


Figura 5: Diagrama de flujo del código computacional desarrollado.

### 3.4 Modelo de ráfaga

En esta subsección se describe un modelo de ráfaga sencillo basado en un movimiento de base. Este desplazamiento de apoyo afecta, en forma directa, solamente al fuselaje (cubo), el cual está vinculado al túnel de viento mediante los resortes lineales (y amortiguadores). Los desplazamientos se ven esquematizados en la figura 6a, denotados por  $u_x(t)$ ,  $u_y(t)$  y  $u_z(t)$ , donde el subíndice marca la dirección de cada desplazamiento, es decir en la dirección cartesiana  $x$ ,  $y$  o  $z$ .

La imposición de un movimiento de base introduce un desplazamiento relativo entre el centro de masa del fuselaje y la base del túnel de viento (ver Figura 6a). Este desplazamiento relativo

es utilizado para reformular la ecuación de movimiento asociada al fuselaje, el cual compone el sistema multicuerpo UAV, en término de cantidades relativas (Rao, 2012), para ello se define el siguiente conjunto de coordenadas,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \{u_x(t), u_y(t), u_z(t), \mathbf{0}_{1 \times 4}\}^T, \\ \bar{\mathbf{q}}_1 &= \mathbf{q}_1 - \mathbf{u}, \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1 &= \dot{\mathbf{q}}_1 - \dot{\mathbf{u}}, \text{ y} \\ \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_1 &= \ddot{\mathbf{q}}_1 - \ddot{\mathbf{u}}, \end{aligned} \quad (27)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el desplazamiento de base, y  $\bar{\mathbf{q}}_1$ ,  $\dot{\bar{\mathbf{q}}}_1$  y  $\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_1$  son los vectores de coordenadas, velocidades y aceleraciones relativos respectivamente. Se debe notar que la transformación de coordenadas es realizada solo para el fuselaje (cuerpo 1); el resto de los componentes experimenta éste fenómeno a través de las ecuaciones de restricción. Luego de manipulaciones algebraicas, la expresión matemática para describir el movimiento del fuselaje es toma la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_1 + \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{q}}_1}^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{Q}^v + (\mathbf{Q}^{nc})^T + (\mathbf{Q}^c)^T - \mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{u}}, \\ \Phi(\bar{\mathbf{q}}_1, \dots, \mathbf{q}_k, \dots) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (28)$$

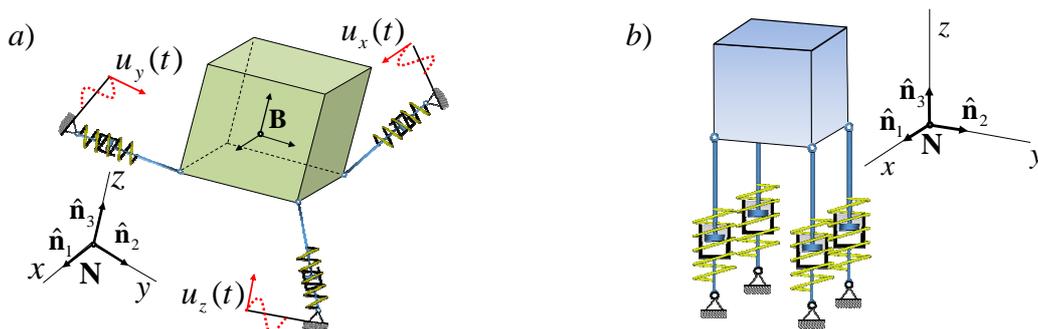


Figura 6: (a) Esquema de desplazamiento de base en las direcciones  $x$ ,  $y$  o  $z$ ; (b) Configuración vertical del fuselaje (sin resortes y amortiguadores laterales).

### 3.5 Validaciones

En esta subsección se valida el código computacional, que implementa la formulación matemática presentada en la Sección 2 y las técnicas de integración detalladas en las Subsecciones 3.1 y 3.2. Adicionalmente, se presentan resultados obtenidos con las dos técnicas de integración propuestas (reducción de índice e integración directa) en conjunto con diferentes integradores numéricos con el objetivo de determinar la opción más adecuada para el sistema dinámico bajo estudio.

#### 3.5.1 Sistema masa resorte.

Este caso de estudio considera solamente el fuselaje montado sobre cuatro resortes verticales (ver Figura 6b). El resto de los resortes lineales (en direcciones normales al eje  $z$ ) y todos los amortiguadores se encuentran deshabilitados.

Esta configuración es equivalente a un sistema masa resorte, con los siguientes valores para los parámetros del sistema:  $k = 1.0$  N/m y  $l_0 = 10.0$  m para cada uno de los cuatro resortes, masa del fuselaje  $m = 1.0$  Kg, y constante de aceleración gravitatoria  $g = 9.81$  m/seg<sup>2</sup>. Las condiciones iniciales del sistema son todas idénticamente igual a cero.

Los esquemas de integración utilizados para resolver el sistema de ecuaciones gobernantes son: *i)* el integrador `ode45` disponible en MATLAB®; *ii)* el algoritmo de Newmark; *iii)* predictor-corrector de cuarto orden desarrollado por Hamming; y *iv)* diferencia central. El paso de tiempo utilizado es  $\Delta t = 0.001$  para Hamming y diferencia central, y  $\Delta t = 0.01$  para el resto de los integradores. El valor del periodo de oscilación y el valor de la posición de equilibrio estático obtenidos con la herramienta desarrollada es  $T = 3.145$  seg y  $z_s = -2.452$  m, para los cuatro integradores investigados (ver Figura 7).

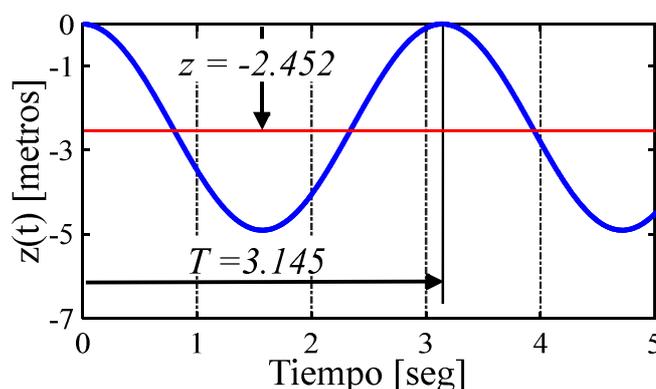


Figura 7: Respuesta sistema fuselaje resortes verticales, donde  $z_0$  indica la posición de equilibrio estático y  $T$  el periodo de oscilación.

Con el objetivo de evaluar la precisión de los resultados numéricos obtenidos, el periodo  $T$  y la posición de equilibrio  $z_0$  son comparados con la solución analítica correspondiente a un oscilador armónico simple (Rao, 2012). El error relativo porcentual obtenido es de 0.095% y 0.02% para el periodo y la posición de equilibrio estática respectivamente.

### 3.5.2 Péndulo físico.

En esta subsección se efectúa un análisis sencillo que pretende validar la porción del modelo multicuerpo que considera el acoplamiento flexible entre las diferentes alas que componen la aeronave. Para ello se considera una versión simplificada del sistema dinámico compuesto solamente por tres cuerpos: *i)* el fuselaje; *ii)* el tramo de ala central vinculada rígidamente al fuselaje; y *iii)* un tramo de ala vinculada al tramo central por medio de un resorte de torsión (ver Fig. 8a). Adicionalmente, el fuselaje (cubo) está vinculado rígidamente a tierra por medio de ecuaciones de restricción adecuadas. Cada uno de los tres cuerpos posee una masa de 1 kg, el resorte de torsión posee una constante de rigidez,  $k_t = 10$  Nm/rad, y todo el sistema se encuentra bajo el efecto del campo gravitatorio. Las alas (representadas por placas rectangulares) son cuadradas cuyos lados tienen una longitud  $L = 1$ .

Las condiciones iniciales para el problema consisten de un ángulo, entre las dos alas, de  $\theta = 10^\circ$  y velocidad angular nula. El periodo y el valor de la posición de equilibrio estática obtenido con la herramienta numérica desarrollada es  $T = 1.051$  seg y  $\theta_s = -24.151^\circ$  (ver Figura 9a). Los integradores utilizados son los mismos que los investigados en la Subsección 3.5.1.

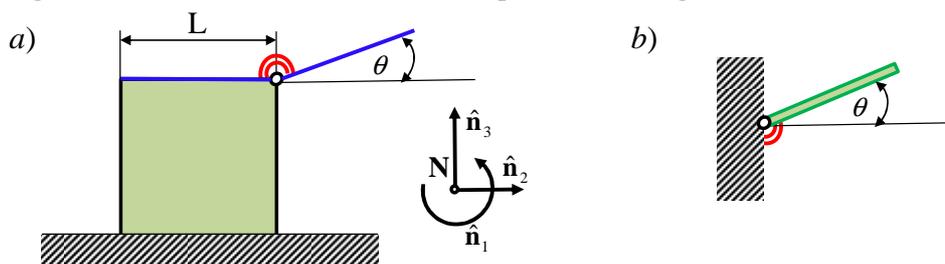


Figura 8: (a) Ala vinculada al fuselaje mediante un resorte de torsión, (b) Modelo simplificado péndulo físico.

El sistema esquematizado en la Figura 8a es comparado contra un sistema dinámico simple consistiendo de una barra rígida en voladizo vinculada a un soporte por medio de un resorte de torsión (ver Figura 8b), denominado Barra-Resorte-Torsión (BRT). La ecuación de movimiento para este sistema se puede encontrar en libros clásicos de mecánica del cuerpo rígido (Tenenbaum, 2004).

En la Figura 9b se presenta la solución del sistema BRT obtenida por medio del integrador `ode45` disponible en MATLAB®. La respuesta de BRT está caracterizada por un periodo de oscilación  $T = 1.052$  seg y valor medio (posición de equilibrio estática)  $\theta_s = -24.152^\circ$ .

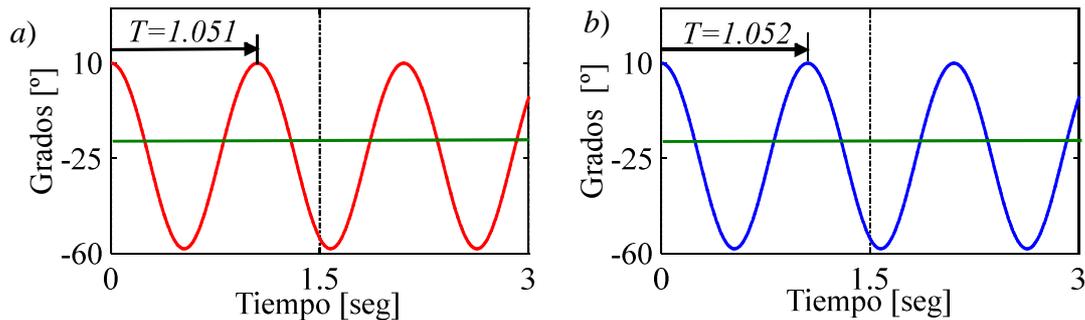


Figura 9: (a) Respuesta de la herramienta numérica con los integradores `ode45`, Newmark, Hamming y Diferencia Central ( $\theta_s$  verde) (b) Respuesta sistema barra en voladizo resorte de torsión ( $\theta_s$  verde)

El error relativo porcentual obtenido entre las respuestas concernientes al sistema multicuerpo simplificado y el modelo BRT es de 0.095% y 0.004% para el periodo de oscilación y la posición de equilibrio estática respectivamente.

### 3.5.3 Ráfaga (desplazamiento de apoyo).

Con el objetivo de validar el modelo de ráfaga implementado se considera el fuselaje conectado a cuatro resortes y cuatro amortiguadores en la dirección vertical (ráfaga ascendente) (ver Figura 10).

La excitación de base utilizada tiene una forma sinusoidal dada por la siguiente expresión,

$$u_z(t) = U \sin \omega t, \quad (29)$$

donde  $u_z(t)$  es el desplazamiento que experimenta el anclaje de los resortes y amortiguadores,  $U$  es la amplitud máxima de la excitación, y  $\omega$  es la frecuencia circular de la excitación.

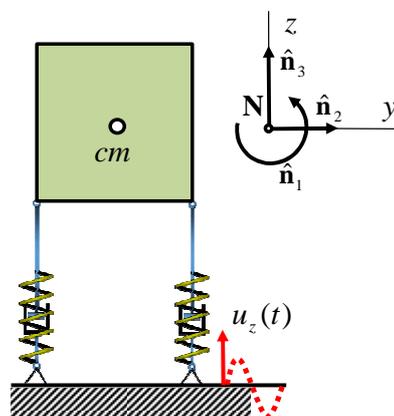


Figura 10: Fuselaje conectado a cuatro resortes en la dirección  $z$ .

Se debe notar que la configuración analizada es equivalente a un sistema masa-resorte-amortiguador (MRA) sometido a un desplazamiento de base. Los valores utilizados para los parámetros del sistema son: rigidez de cada resorte  $k = 0.25$  N/m, longitud no deformada  $l_0 = 10$  m, y masa del fuselaje  $m = 1$  Kg. En la Tabla 1 se especifican las condiciones iniciales y el resto de los parámetros del sistema para dos configuraciones diferentes. Los valores asociados a la velocidad y posición inicial se obtienen de la solución analítica del sistema MRA con movimiento de base (Rao, 2012). El campo gravitacional terrestre no es tenido en cuenta en este análisis.

|                        | $\bar{q}_z$ [m] | $\dot{\bar{q}}_z$ [m/s] | $c$ [Ns/m] | $U$ [m] | $\omega$ [rad/seg] |
|------------------------|-----------------|-------------------------|------------|---------|--------------------|
| <b>Configuración 1</b> | 0               | -5.2083                 | 0          | 1       | 5                  |
| <b>Configuración 2</b> | -0.208          | -4.992                  | 1          | 1       | 5                  |

Tabla 1. Parámetros de la condición inicial

donde  $\bar{q}_z$  es el desplazamiento relativo en metros,  $\dot{\bar{q}}_z$  es la velocidad relativa, y  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento.

Los esquemas de integración evaluados para obtener la respuesta del sistema mostrado en la Figura 10 sujeto a desplazamiento de base (y los pasos de tiempo utilizados) son los mismos que los usados en la Subsección 3.5.1.

En la Tabla 2 se compara el valor del periodo y amplitud de oscilación provenientes de las simulaciones numéricas (para las dos configuraciones detalladas en la Tabla 1) contra la solución analítica desarrollada por Rao (2012).

|                        | $T_{Num}$ [Seg] | $T_{Analit}$ [Seg] | Error % | $Q_{Num}$ [m] | $Q_{Analit}$ [m] | Error % |
|------------------------|-----------------|--------------------|---------|---------------|------------------|---------|
| <b>Configuración 1</b> | 1.26            | 1.256              | 0.315   | 1.041         | 1.0417           | 0.067   |
| <b>Configuración 2</b> | 1.26            | 1.256              | 0.315   | 1.019         | 1.0198           | 0.078   |

Tabla 2. Periodo y Amplitud de oscilación (Numérico y Analítico).

En la Figura 11 se presenta la respuesta del sistema dinámico para las dos configuraciones analizadas. Como se puede observar, las respuestas obtenidas por medio de los integradores investigados no mostraron diferencias significativas. Adicionalmente, en la Tabla 2 se puede notar que el error exhibido por la solución numérica (comparada con la analítica) es mínimo; hecho que permite validar la correcta implementación del modelo de ráfaga basado en un movimiento de apoyo.

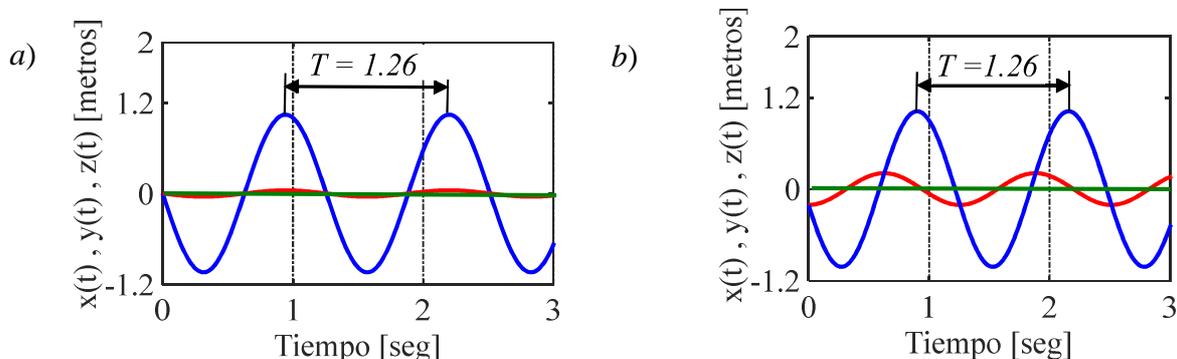


Figura 11: Respuesta de la herramienta numérica con los integradores ode45, Newmark, Hamming y Diferencia Central (rojo desplazamiento absoluto, azul desplazamiento relativo en z, verde desplazamiento en x e y); (a) Configuración 1; (b) Configuración 2.

### 3.6 Dinámica de un modelo conceptual X-HALE-UAV

En esta subsección se estudia el comportamiento dinámico, sometido a distintas sollicitaciones exteriores, de un modelo simplificado de X-HALE-UAV. El UAV está compuesto por 7 alas, 4 trenes de aterrizaje, 4 motores y el fuselaje. Además, los doce resortes y los doce amortiguadores están activados. Los parámetros del sistema tienen los siguientes valores: masa de las alas  $m_A = 1$  Kg, masa de los trenes de aterrizajes  $m_T = 1$  Kg, masa de los motores  $m_M = 0.1$  Kg, masa del fuselaje  $m_F = 0.1$  Kg, longitud característica del cubo que simula el fuselaje  $L_F = 1$  m, alas con forma cuadrada  $L_A = 1$  m, placas que simulan los trenes de aterrizajes con  $L_T = 1$  m y  $h_T = 0.5$  m, motores con una longitud  $L_M = 1$  m y diámetro  $d_M = 0.1$  m, constante de rigidez de los resortes lineales  $k_s = 100$  N/m, constantes de rigidez de los resortes de torsión  $k_T = 100$  N/rad, y constantes de los amortiguadores  $c_s = 0.1$  Ns/m. El UAV posee una configuración simétrica y, en la configuración inicial, las alas externas tienen un ángulo relativo entre sí de  $5^\circ$  (ver Figura 12).

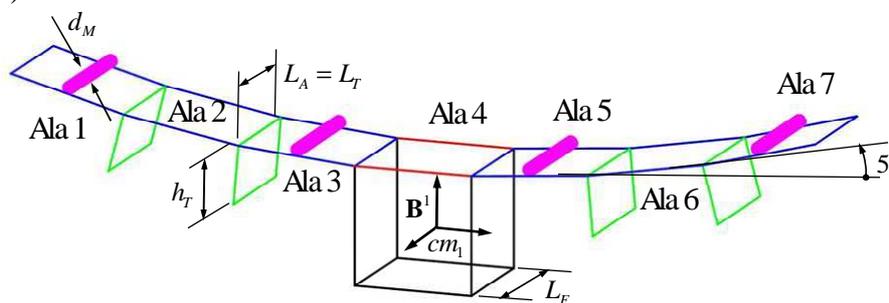


Figura 12: Configuración inicial y definición de los parámetros del sistema.

#### 3.6.1 Análisis libre

El análisis llevado a cabo en esta Subsección consiste en utilizar la configuración del UAV mostrada en la Figura 12 con el campo gravitacional terrestre activado y sin sollicitaciones externas (es decir, sin la imposición de ráfaga ni la disminución de rigidez en los resortes torsionales). Las condiciones iniciales son todas nulas, lo que equivale a liberar la aeronave desde su condición de reposo, en la cual los resortes lineales están indeformados.

Los esquemas de integración utilizados son: *i*) `ode45` de MATLAB® en conjunto con un proceso de estabilización de la solución por Baumgarte con  $\alpha = \beta = 10$ ; *ii*) Hamming de cuarto orden en conjunto con el método de estabilización por proyección de coordenadas *S-Both*<sup>2</sup> (Ascher *et al.*, 1995); *iii*) Diferencia central, estabilizado con *S-Both*<sup>2</sup> (DF+S-Both<sup>2</sup>); y *iv*) Newmark con amortiguamiento numérico ( $\alpha = 0.015$ ). El último algoritmo se obtiene a partir de las fórmulas de Newmark por medio de una simple modificación de las constantes clásicas del método  $\gamma$  y  $\beta$  con el objetivo de mantener la estabilidad del esquema numérico. Sin embargo, esta modificación introduce amortiguamiento numérico en el sistema (Cardona and Géradin, 2001). Cardona y Géradin (2001) expusieron que la mejor manera de introducir tal amortiguamiento es poner las constantes  $\gamma$  y  $\beta$  en término de una tercera constante  $\alpha$ , esto es:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha, \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{4} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \quad \text{para} \quad \alpha > 0 \quad (30)$$

Los pasos de tiempo adoptados son:  $\Delta t = 0.001$  seg para Hamming y diferencia central y  $\Delta t = 0.01$  para Newmark. Como se mencionó anteriormente, `ode45` maneja internamente el paso de tiempo. La integración del sistema HALE-UAV con el método de Newmark clásico ( $\alpha = 0$ ) presenta inestabilidades numéricas que producen un crecimiento en la amplitud de la respuesta haciendo que, finalmente, el método explote a los 5 segundo de simulación. La constante  $\alpha =$

0.015 seleccionada para llevar a cabo las simulaciones numéricas presentadas en ésta Sección corresponde a la constante más chica con la cual no se produce divergencia de la solución.

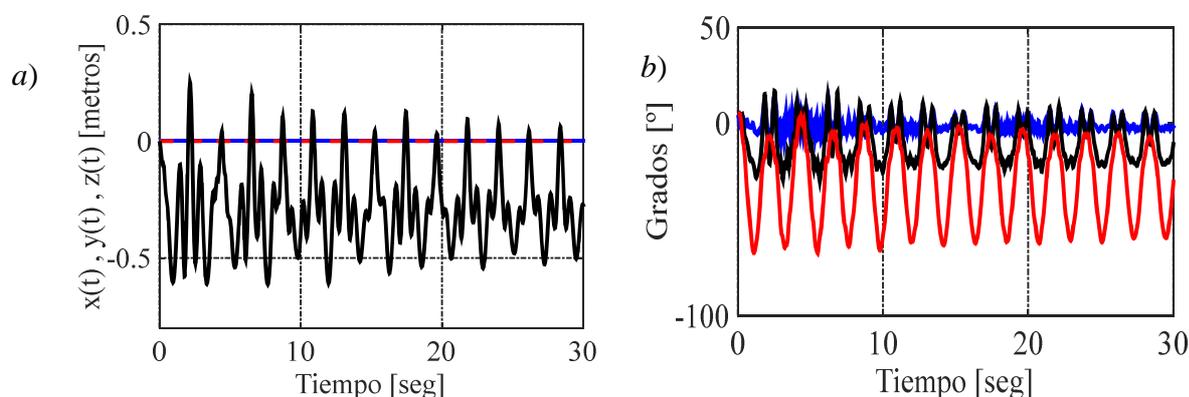


Figura 13: (a) Coordenadas del centro de masa del fuselaje (rojo  $x(t)$ , azul  $y(t)$ , negro  $z(t)$ ); (b) Coordenadas angulares relativas en las uniones de alas (azul ala 1-2, negro ala 2-3, rojo ala 3-4).

En la Figura 13a se puede observar la evolución temporal de las coordenadas cartesianas del centro de masa del fuselaje. Tanto la coordenada  $x(t)$  como la coordenada  $y(t)$  son prácticamente nulas debido a la configuración simétrica adoptada como condición inicial. Como consecuencia del acoplamiento dinámico que existe entre los grados de libertad asociados al fuselaje y los grados de libertad de los tramos de ala externos, el desplazamiento vertical del fuselaje,  $z(t)$ , exhibe un comportamiento oscilatorio que evidencia: *i*) una componente que surge por la liberación del sistema desde una posición distinta a la posición de equilibrio (muy notoria sobre el transitorio de la respuesta) y *ii*) otra componente asociada al movimiento oscilatorio de los tramos de alas. A medida que transcurre el tiempo se puede observar como la primera componente desaparece como consecuencia de la disipación introducida por los amortiguadores.

En la Figura 13b se presentan los valores para las coordenadas angulares que describen la orientación de un ala relativa a la contigua (solo para el conjunto de alas ubicadas a la derecha). El valor del desplazamiento vertical  $z(t)$  del fuselaje es pequeño comparado con la deflexión del centro de masa de los tramos de alas externos, siendo la diferencia máxima de  $\Delta z = 1.63$  m. Se debe destacar además, que para el caso estudiado, todos los integradores implementados produjeron exactamente la misma respuesta.

Con el objetivo de cuantificar la disipación de energía como consecuencia del efecto estabilizante del amortiguamiento numérico introducido en el algoritmo de Newmark, se deshabilitan los amortiguadores lineales que vinculan el fuselaje con el túnel de viento. En la Figura 14a se presenta la evolución temporal de la energía mecánica total obtenidos por los esquemas de Newmark ( $\alpha = 0.015$ ) y diferencial central para el sistema UAV, observándose que el método de Newmark con amortiguamiento numérico produce una pérdida significativa de energía mecánica en 30 seg de simulación. Adicionalmente, en la Figura 14b se muestra la energía mecánica del sistema masa-resorte analizado en la Subsección 3.5.1 para una condición inicial  $z = 0.5$  y  $\dot{z} = 0$ , masa del cubo de 1.0 Kg y rigidez de los resortes verticales  $k = 10$  N/m. Los esquemas de integración utilizados para obtener la respuesta del sistema masa-resorte son: Newmark ( $\alpha = 0$ ), es decir sin amortiguamiento numérico, Newmark ( $\alpha = 0.015$ ) y diferencia central. Como es de esperar, el método clásico de Newmark ( $\alpha = 0$ ) funciona perfectamente para el sistema lineal masa-resorte evidenciando un comportamiento incondicionalmente estable para el tiempo de simulación adoptado. La utilización de Newmark ( $\alpha = 0.015$ ) para el sistema masa-resorte produce, también, una significativa pérdida de energía mecánica total, aproximadamente del 3% cada 5 segundos de simulación (ver Figura 14b). Esta excesiva pérdida de energía por

parte de Newmark ( $\alpha = 0.015$ ) fue evidenciado también por Cardona y G eradin (2001) para el caso de un péndulo doble.

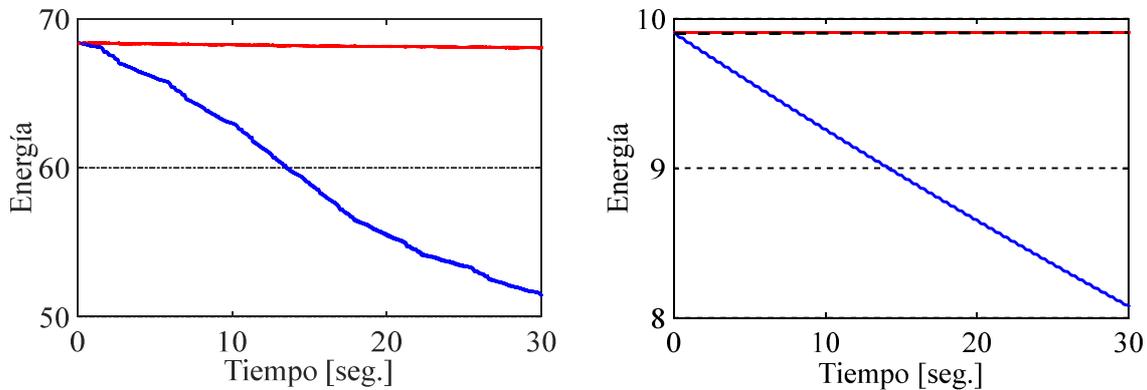


Figura 14: (a) Energía mecánica total sistema X-HALE (Diferencia Central en rojo y Newmark ( $\alpha = 0.015$ ) en azul), (b) Energía mecánica total sistema cubo resortes verticales. (Diferencia Central en rojo y Newmark ( $\alpha = 0$ ) en negro, ( $\alpha = 0.015$ ) en azul).

En las figuras 15 y 16 se muestran las desviaciones numéricas que ocurren en las ecuaciones de restricción de conexión a nivel de la posición y a nivel velocidad para la vinculación del ala 3 con el ala 4. Tales desviaciones se obtuvieron al aplicar el integrador diferencia central en conjunto con el procedimiento de estabilización *S-Both*<sup>2</sup>, concluyendo que, las desviaciones numéricas a nivel de la posición y la velocidad son bien controladas; lo mismo sucede para el resto de las restricciones.

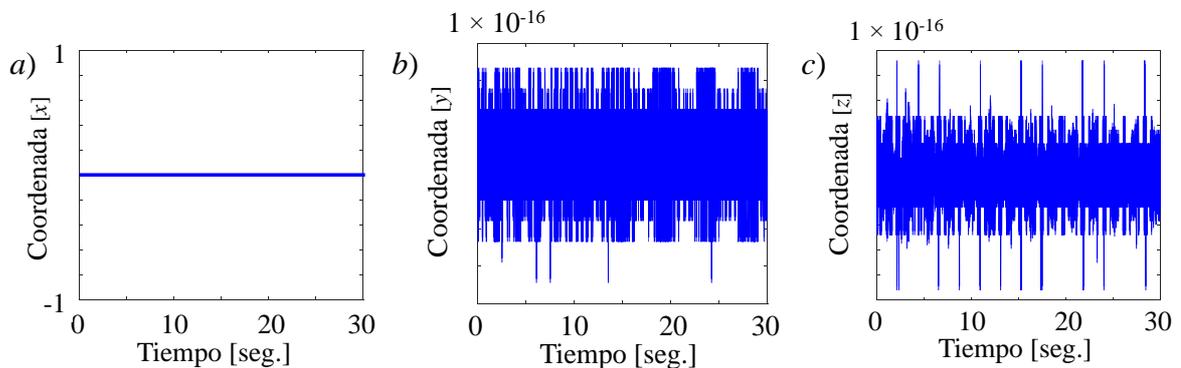


Figura 15: Restricción a nivel de la posición, conexión ala 3-4; (a) coordenada  $x(t)$ ; (b) coordenada  $y(t)$ ; (c) coordenada  $z(t)$ .

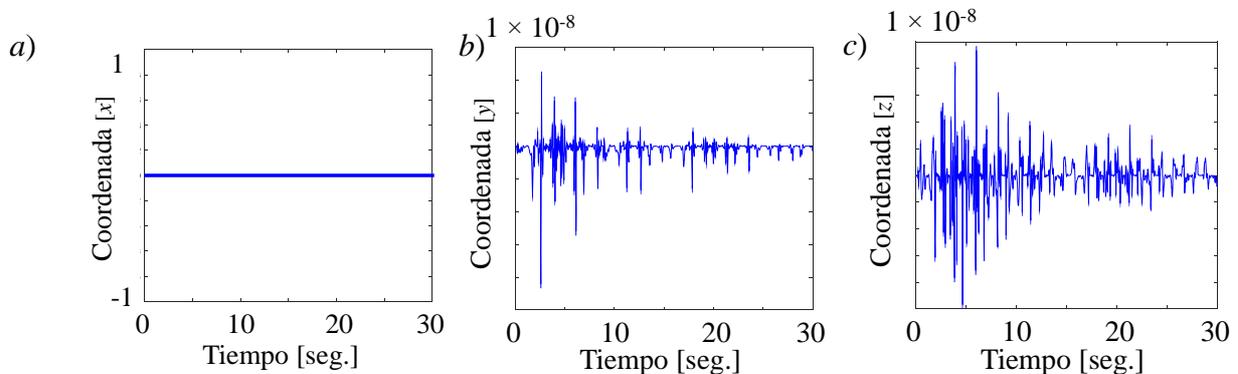


Figura 16: Restricción a nivel de la velocidad, conexión ala 3-4; (a) velocidad  $\dot{x}(t)$ ; (b) velocidad  $\dot{y}(t)$ ; (c) velocidad  $\dot{z}(t)$ .

En la Figura 17 se presenta la evolución temporal de las restricciones a nivel de la orientación. Como se puede observar, éstas son controladas en forma satisfactoria por el esquema diferencia central +  $S$ -both<sup>2</sup>.

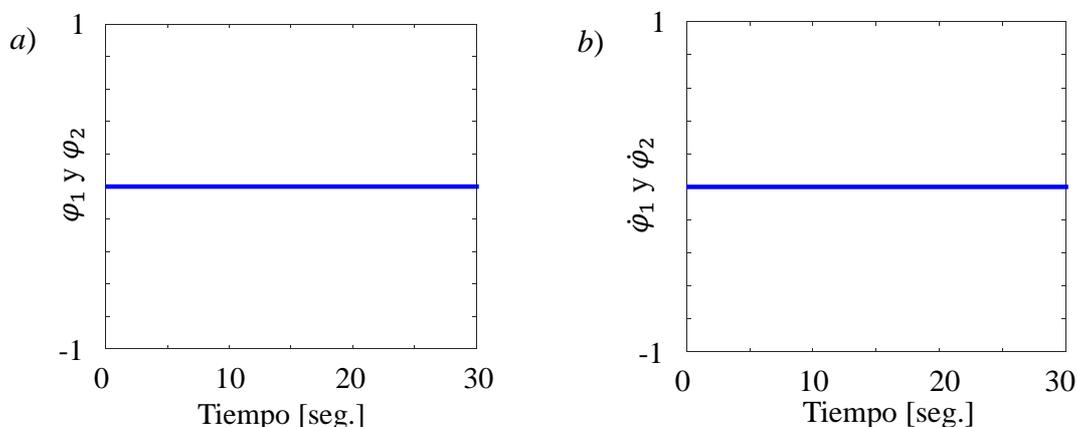


Figura 17: Restricción orientación ala 3-4; (a) a nivel de posición  $\varphi(t)$ ; (b) a nivel de velocidad  $\dot{\varphi}(t)$

El análisis llevado a cabo anteriormente nos permite concluir que: *i*) el código computacional desarrollado (que implementa el modelo dinámico descrito anteriormente) es capaz de simular adecuadamente configuraciones caracterizadas por grandes deflexiones de los tramos de ala sin que se produzca divergencia de la respuesta, y *ii*) los integradores más eficiente para simular la respuesta del sistema son Newmark con disipación ( $\alpha = 0.015$ ) y diferencia central. Sin embargo, la disipación numérica introducida por Newmark produce un decremento de la energía mecánica total mucho más significativa que el decremento producido por diferencia central. Debido al excelente control en las desviaciones numéricas y menor disipación de energía exhibido por el esquema de integración DF+S-both<sup>2</sup>, éste se utilizará como integrador por defecto (a menos que se indique lo contrario) para el resto de los estudios que se presentan a continuación.

### 3.6.2 Efecto de ráfaga ascendente

En ésta Subsección, se somete la aeronave a dos ráfagas ascendentes, caracterizadas por medio de la siguiente función de desplazamiento base,

$$u_z(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_{start}, \\ U (\sin(2\pi ft))^x, & t_{start} < t \leq t_{end}, \\ 0, & t > t_{end}. \end{cases} \quad (31)$$

Donde,  $U = 7.5$  m,  $f = 0.5$  Hz, y  $x = 12$  es el exponente de la función.

En la Figura 18 se muestra el perfil de desplazamiento, velocidad y aceleración obtenido con los datos utilizados. Se debe mencionar que la aeronave es excitada con dos ráfagas similares que actúan una continuación de la otra y separadas temporalmente por 1 seg. La primera perturbación comienza en  $t_{start} = 1.5$  seg y finaliza en  $t_{end} = 2.5$  seg, mientras que la segunda perturbación comienza en  $t_{start} = 3.5$  seg y finaliza en  $t_{end} = 4.5$  seg.

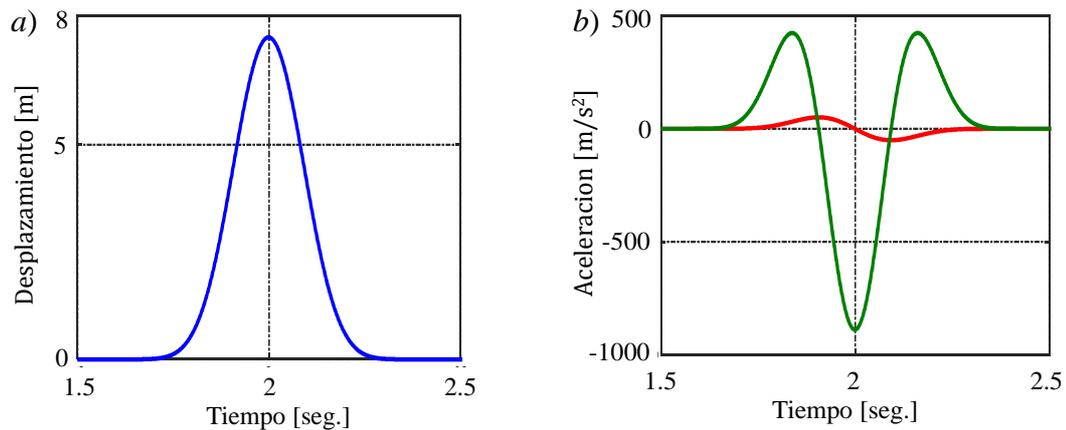


Figura 18: (a) Perfil desplazamiento  $u_z(t)$ ; (b) Perfil velocidad y aceleración ( $\dot{u}_z(t)$  rojo,  $\ddot{u}_z(t)$  verde).

En la Figura 19a se muestran las coordenadas relativas del centro de masa del fuselaje, mientras que en la Figura 19b las coordenadas absolutas. Como consecuencia del movimiento de apoyo, el fuselaje es excitado en la dirección vertical. Debido al acoplamiento que existe, a través de las ecuaciones de restricción, entre el fuselaje y el resto de la estructura, las alas, motores y trenes de aterrizaje experimentan una excitación similar. Como se puede observar, las componentes en las direcciones  $x(t)$  y  $y(t)$  son nulas debido a la simetría del caso de estudio. En la Figura 19a se superponen la respuesta en la dirección vertical del centro de masa del fuselaje presentada en la subsección 3.6.1 (sin perturbación externa) con la respuesta obtenida al aplicar las dos ráfagas.

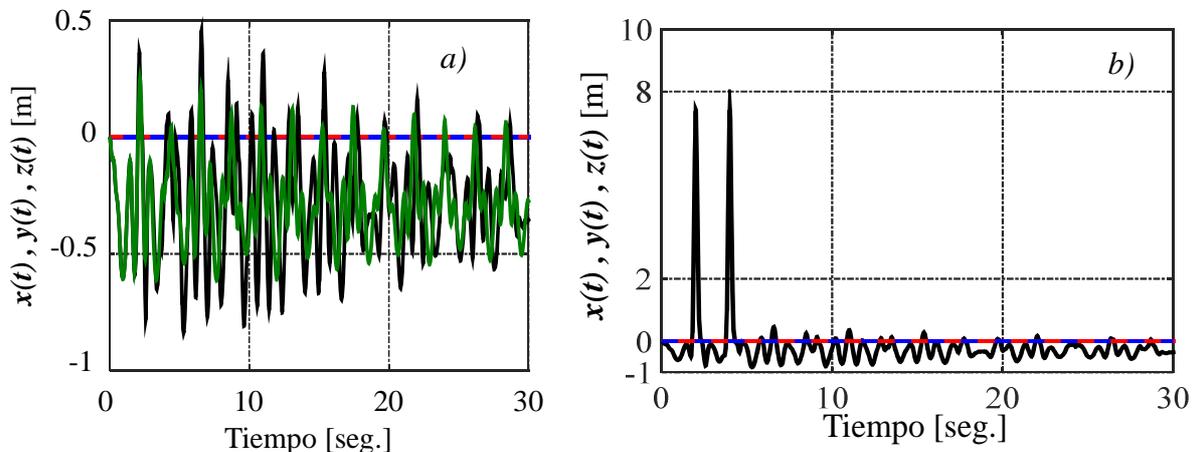


Figura 19: (a) Desplazamiento relativo ( $x(t)$  rojo,  $y(t)$  azul y  $z(t)$  negro) superpuesto con el desplazamiento absoluto  $z(t)$  (verde) obtenido en sección 3.6.1; (b) desplazamiento absoluto ( $x(t)$  rojo,  $y(t)$  azul y  $z(t)$  negro).

En la Fig. 20 se presentan los valores para las coordenadas angulares que describen la orientación de un ala relativa a la contigua (solo para el conjunto de alas ubicadas a la derecha), observándose un aumento de la amplitud y frecuencia en las oscilaciones entre el ala 1-2 y 2-3 comparadas con la respuesta del sistema sin perturbación externa. La respuesta es similar para el tramo de ala localizado a la derecha (articulaciones alares 5-6 y 6-7).

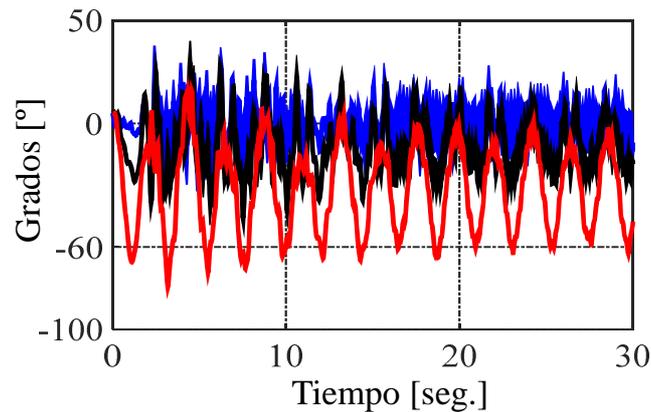
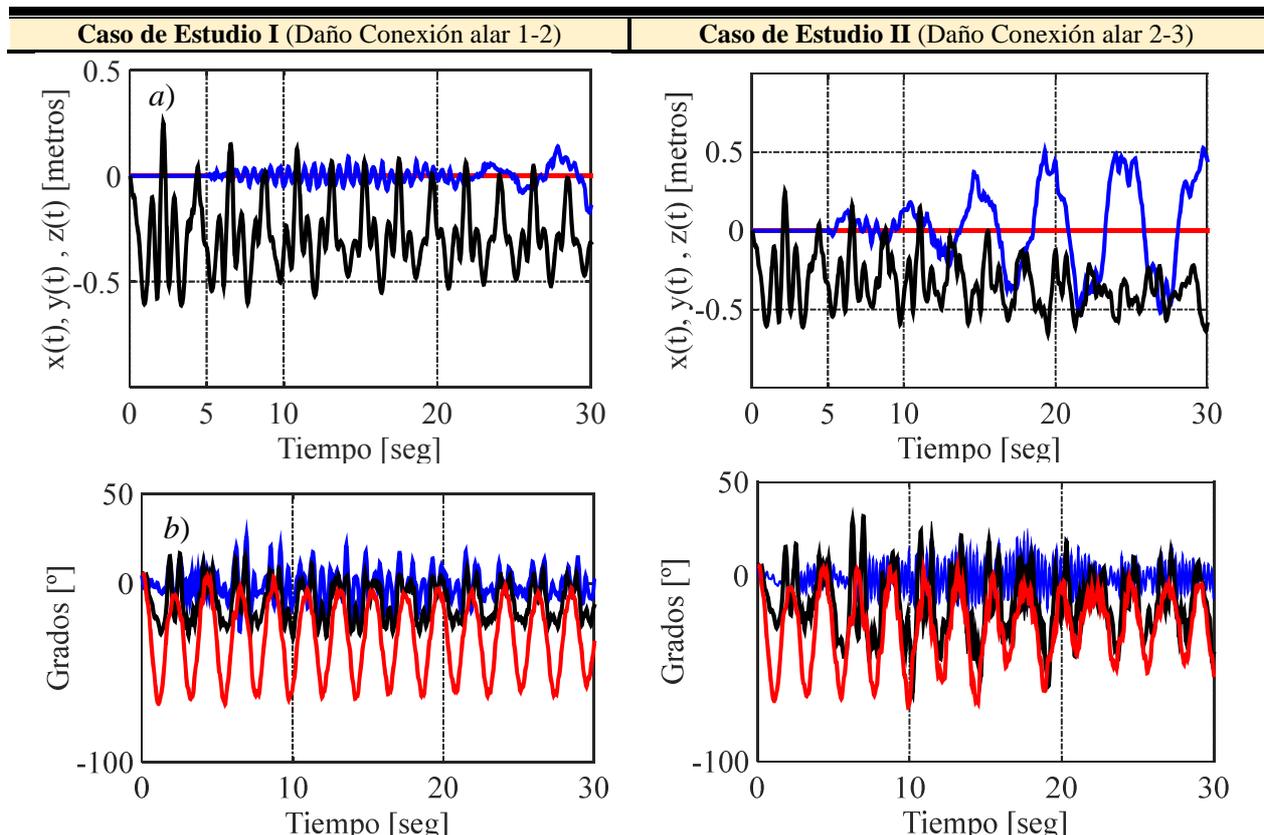


Figura 20: Coordenadas angulares relativas en las uniones de alas (azul ala 1-2, negro ala 2-3, rojo ala 3-4).

### 3.6.3 Daño en conexiones alares

En esta Subsección se presentan resultados numéricos concernientes al comportamiento dinámico del UAV cuando las alas experimentan daño estructural. El modelo de daño adoptado se basa, fundamentalmente, en el decremento de la rigidez torsional asociada a una, o más, conexiones flexibles que vinculan los tramos de alas. Este mecanismo de daño estructural fue implementado en el código computacional por medio de un esquema simple el cual permite configurar el resorte que experimentará el cambio de rigidez y el tiempo en el cual ocurrirá dicho evento.

Con el objetivo de cuantificar la influencia de la disminución de rigidez en las conexiones alares sobre la respuesta de la aeronave, se presentan dos casos de estudios: *i*) daño estructural en la conexión alar 1-2, y *ii*) daño estructural en la conexión alar 2-3. Ambos casos de estudios están caracterizados por un decremento en la rigidez torsional del 50% (es decir de 100 N/rad a 50 N/rad).



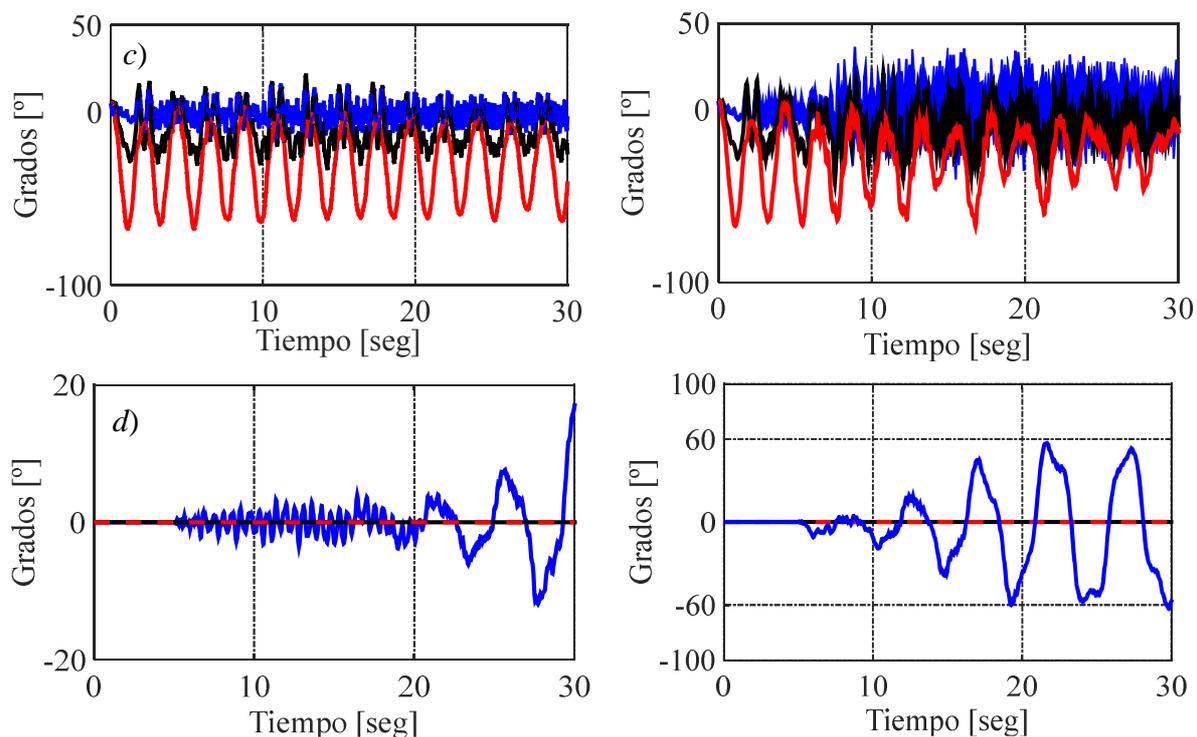


Figura 21: (a) Coordenadas del centro de masa del fuselaje (rojo  $x(t)$ , azul  $y(t)$ , negro  $z(t)$ ); (b) Coordenadas angulares relativas en las uniones de alas (azul ala 1-2, negro ala 2-3, rojo ala 3-4); (c) Coordenadas angulares relativas en las uniones de alas (azul ala 6-7, negro ala 5-6, rojo ala 4-5); (d) Rotaciones del fuselaje (azul  $x(t)$ , negro  $y(t)$ , rojo  $z(t)$ ).

Con respecto al caso de estudio I, se debe notar que la disminución de rigidez ocurre en la conexión alar que se localiza en la articulación más alejada del fuselaje de la aeronave. Esta perturbación se manifiesta por medio de la aparición de una oscilación de pequeña amplitud del fuselaje a lo largo de la dirección lateral  $\hat{n}_2$ , en conjunto con una rotación de amplitud creciente alrededor del eje  $\hat{n}_1$  (ver Figuras 21a y 21d). La Figura 21b y 21c muestra la evolución temporal de las coordenadas angulares relativas en las articulaciones alares. Se puede observar, para éste caso de estudio, que las conexiones internas no experimentan grandes cambios, mientras la conexión con daño muestra una amplitud de oscilación significativamente más grande, pero acotada, para las alas que se encuentran a la derecha del fuselaje, para las alas que se encuentran a la izquierda es más notoria el aumento de frecuencia, todo esto cuando se la compara con la respuesta de la aeronave sin daño (Figura 13b).

Por otro lado, cuando la disminución de rigidez ocurre en conexiones alares que se encuentran más próximas al fuselaje (caso de estudio II), el efecto de oscilación lateral y rotación del fuselaje alrededor del eje  $\hat{n}_1$  se magnifica considerablemente (ver Figura 21a y 21d). Adicionalmente, todas las coordenadas angulares relativas muestran cambios significativos comparado con la respuesta del UAV sin daño; específicamente, la amplitud de oscilación aumenta notoriamente en la articulación dañada (conexión 2-3), en la articulación 1-2 aumenta tanto la amplitud como la frecuencia de oscilación, mientras que en la conexión alar 3-4, la amplitud decrece con el tiempo (ver Figura 21b). Los efectos antes dichos son amplificados para los pares homólogos del lado derecho. (ver Figura 21c)

Si bien son necesarias más pruebas para caracterizar detalladamente el comportamiento de la aeronave ante daño estructural en las articulaciones alares, los casos presentados en esta subsección constituyen un primer paso. Adicionalmente, la herramienta computacional desarrollada mostró una gran versatilidad y robustez permitiendo obtener adecuadamente la

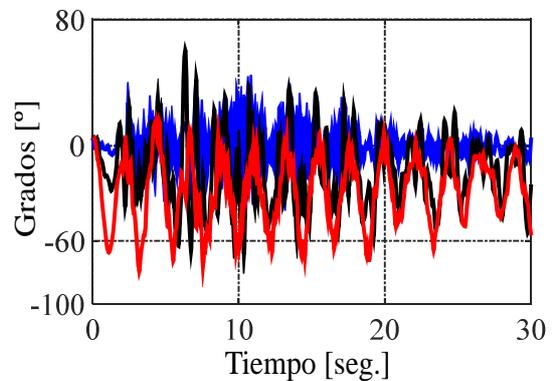
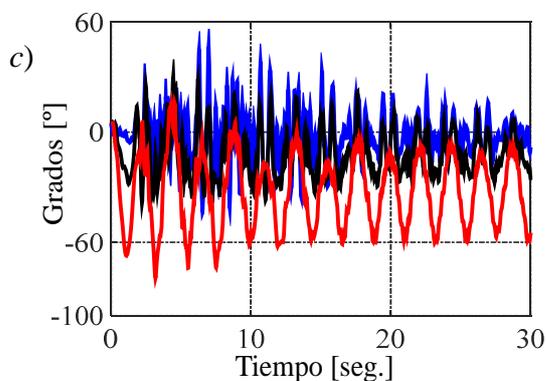
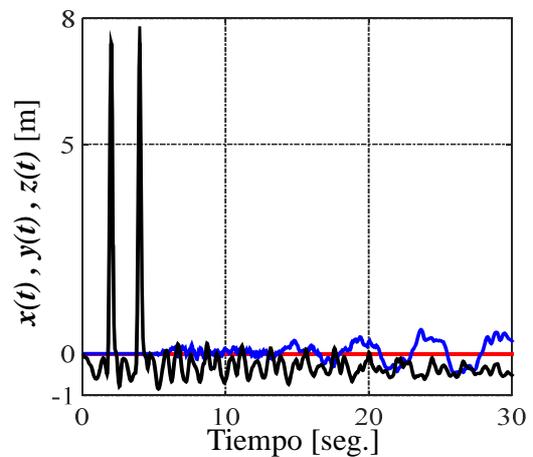
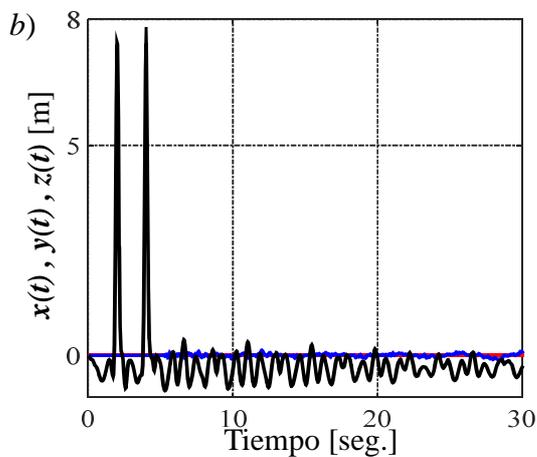
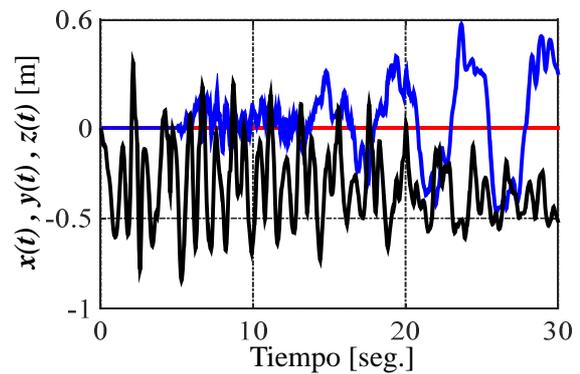
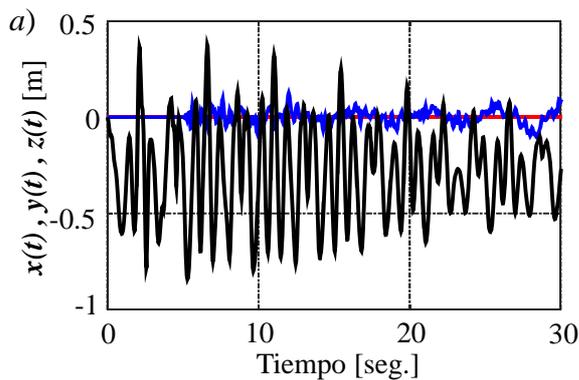
respuesta dinámica del sistema multicuerpo cuando se lo somete a éste tipo de perturbación externa.

### 3.6.4 Ráfaga “+” daño estructural en conexión alar

En esta subsección se estudia la respuesta dinámica de la aeronave ante el efecto combinado de ráfagas (Subsección 3.6.2) y los dos casos de daño estructural presentados en la Subsección 3.6.3., es decir: *i*) Caso I: ráfaga + daño estructural en conexión alar 1-2; y *ii*) Caso II: ráfaga + daño estructural en conexión alar 2-3.

**Caso de Estudio I (Ráfaga + Daño Conexión alar 1-2)**

**Caso de Estudio II (Ráfaga + Daño Conexión alar 2-3)**



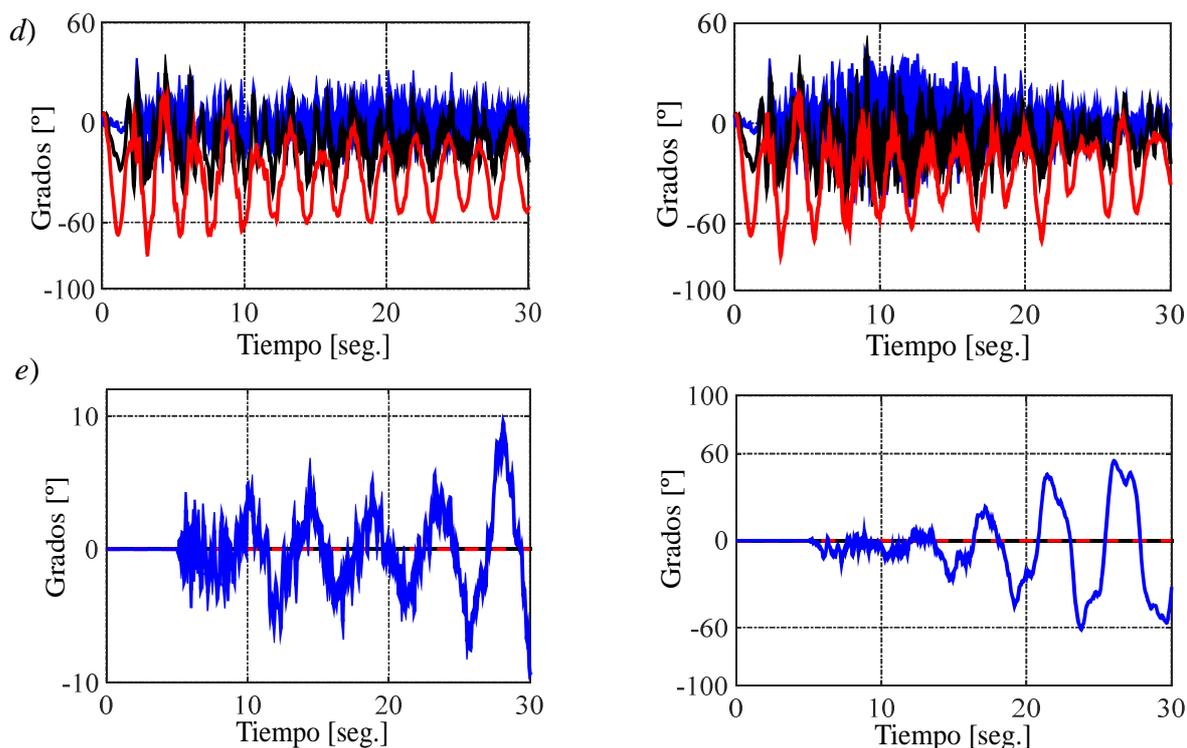


Figura 22: (a) Coordenadas relativas del centro de masa del fuselaje ( $x(t)$  rojo,  $y(t)$  azul y  $z(t)$  negro); (b) Coordenadas absolutas del centro de masa del fuselaje ( $x(t)$  rojo,  $y(t)$  azul y  $z(t)$  negro); (c) Coordenadas angulares relativas en las uniones de alas (azul ala 1-2, negro ala 2-3, rojo ala 3-4); (d) Coordenadas angulares relativas en las uniones de alas (azul ala 6-7, negro ala 5-6, rojo ala 4-5); (e) Rotaciones del fuselaje (azul  $x(t)$ , negro  $y(t)$ , rojo  $z(t)$ ).

Como se puede observar en la Figura 22a, el desplazamiento vertical del centro de masa del fuselaje para los dos casos analizados en esta subsección no presenta cambios significativos cuando se lo compara con la respuesta del sistema libre de ráfaga y daños estructural detallada en la Subsección 3.6.1 (denominada respuesta de referencia). Por el contrario, las oscilaciones laterales del fuselaje (en la dirección  $y$ ) y las deflexiones alares muestran un incremento en la amplitud y frecuencia de oscilación comparada con la respuesta de referencia. En particular las conexiones alares 1-2, 2-3 y 3-4 experimentan un aumento de la amplitud, mientras que las conexiones alares 4-5, 5-6 y 6-7 manifiestan un aumento en la frecuencia de oscilación (ver Figura 22c y 22d). Con respecto a las coordenadas absolutas del centro de masa del fuselaje, no se visualizan cambios significativos comparados con la respuesta de referencia (22b).

Por último, tanto las oscilaciones laterales del fuselaje como las rotaciones del mismo, originadas como consecuencia de la imposición de daño estructural en una sola conexión alar (hecho que rompe con la simetría del problema) muestran una amplitud de oscilación creciente con el tiempo, similar a la respuesta mostrada en la Subsección 3.6.3 (ver Figura 22e).

Adicionalmente, se debe mencionar que para los dos casos de estudio analizados en esta Subsección, las desviaciones numéricas de conexión y orientación son similares a las presentadas en la Figura 16 y 17, mostrando que el esquema de integración seleccionado DF+S-both<sup>2</sup> se desempeña satisfactoriamente.

El análisis llevado a cabo anteriormente nos permite concluir que el código computacional desarrollado (que implementa el modelo dinámico descrito anteriormente) es capaz de simular adecuadamente configuraciones caracterizadas por grandes deflexiones de los tramos de ala y la posibilidad de incluir daño estructural en las articulaciones alares y perturbaciones externas tales como ráfagas de viento.

#### 4. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este trabajo se presentó el desarrollo de un modelo multicuerpo rígido general para describir la dinámica de un modelo simplificado de aeronave X-HALE-UAV (muy flexible). El modelo dinámico elaborado permite considerar: *i*) modelos de ráfagas (ascendentes y/o laterales) simples, las cuales son introducidas en la formulación por medio de un movimiento de base del fuselaje; y *ii*) daño estructural alar introducida mediante un cambio repentino de la rigidez asociada a una, o más, conexiones flexibles entre tramos de alas. Este modelo fue implementado exitosamente en una herramienta de simulación elaborada completamente en MATLAB, la cual permite integrar interactiva y simultáneamente todas las ecuaciones gobernantes en el dominio del tiempo por medio de diferentes esquemas de integración.

La herramienta de simulación numérica se validó exitosamente contra casos de estudio simples disponibles en la literatura, para los cuales existen soluciones analíticas cerradas. Finalmente, se analizó la influencia de solicitaciones externas tales como ráfagas de viento, daño estructural en articulaciones alares, y el efecto combinado de ambos sobre la respuesta dinámica de un concepto simplificado de X-HALE-UAV. De los resultados numéricos obtenidos se puede concluir que:

- El código computacional es lo suficientemente robusto y versátil para estudiar diferentes configuraciones de X-HALE-UAV caracterizados por deflexiones alares grandes y sometidos a perturbaciones externas.
- Los esquemas de integración más eficientes para abordar el estudio del sistema multicuerpo presentado en este trabajo son  $DF+S-both^2$  y Newmark con disipación numérica. Sin embargo, la excesiva pérdida de energía mecánica mostrada por Newmark (debido al efecto estabilizante introducido por medio de amortiguamiento numérico) frente a DF lo hace inadecuado.
- El efecto de ráfaga sobre el sistema produce un aumento de la amplitud y frecuencia de oscilación de los tramos alares.
- El efecto de daño estructural produce oscilaciones laterales y rotaciones del fuselaje que crecen con el tiempo; siendo más notorio cuando el daño se localiza próximo al fuselaje.

Si bien el modelo dinámico desarrollado y su implementación computacional han permitido obtener excelentes resultados, los integradores investigados experimentan problemas de estabilidad numérica cuando los resortes lineales se hacen menos rígidos, o para condiciones iniciales que involucran una rotación del fuselaje. El esquema de integración que mejor desempeño mostró fue diferencia central en conjunto con el procedimiento de estabilización  $S-both^2$ . Sin embargo para casos extremos, este integrador exhibió severos problemas de estabilidad.

Como trabajo futuro se pretende: *i*) implementar los algoritmos de integración de Hilber-Hughes-Taylor (HHT) y el algoritmo  $\alpha$ -generalizado para evaluar su desempeño con el sistema dinámico presentado en este trabajo; *ii*) extender el modelo dinámico presentado en este trabajo por medio de la incorporación de un modelo flexible para los tramos alares; *iii*) acoplar el modelo estructural con el método de red de vórtices no lineal y no estacionario (UVLM); y *iv*) estudiar la aeroelasticidad de un concepto simplificado de X-HALE-UAV.

#### REFERENCIAS

- Arguello, M., Preidikman, S., Rocca, B. A., “Desarrollo de simulaciones numéricas para estudiar la dinámica de un concepto de aeronave X-HALE-UAV,” *Revista Facultad de Ciencias Exactas y Naturales*, 2(2):16-24, 2014.
- Ascher, U. M., Chin H., Petzold L. R., and Reich S., “Stabilization of constrained mechanical systems with DAEs and invariant manifolds,” *Journal of Mech, Struct. Machine*, 1995, vol. 23 pp. 135-158.

- Bauchau, O. A., *Flexible Multibody Mechanics*. 1st ed. Springer, 2010.
- Cardona A. and Géradin M., "Time integration of the equations motion in mechanism analysis," *Computer & Structures*, 1998, vol 33, no. 3 pp 801-820.
- Baumgarte, J., "Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineer*, 1972, vol. 1, pp1-16.
- Cesnik, C. E. S. and Su, W., "Nonlinear Aeroelastic Modeling and Analysis of Fully Flexible Aircraft," *Proceedings of the 46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, AIAA Paper 2005-2169, April 18-21, Austin, TX, 2005.
- Cesnik, C. E. S., Senatore, P. J., Su, W., Atkins, E. M., Shearer, C. M., and Pitcher, N. A., "X-HALE: A very flexible UAV for nonlinear aeroelastic tests," *51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, AIAA Paper 2010-2715, April 12-15, Orlando, FL, pp. 1-23, 2010.
- Colella, N. J., Wenneker, G. S., "Pathfinder and the Development of Solar Rechargeable Aircraft," E&TR, 1-9, 1994.
- Crimaldi, J. P., Britt, R. T., and Rodden, W. P., "Response of B-2 aircraft to nonuniform spanwise turbulence," *Journal of Aircraft*, 30(5):652-659, 1993.
- Friedmann, P. P., "Renaissance of aeroelasticity and its future," *Journal of Aircraft*, 36(1):105-121, 1999.
- Galante, N., "The Helios Prototype flying wing is shown over the Pacific Ocean during its first test flight on solar power from the U.S. Navy's Pacific Missile Range Facility in Hawaii," <http://www.dfrc.nasa.gov/Gallery/Photo/Helios/>, 2003.
- Géradin, M. and Cardona, A., *Flexible Multibody Dynamics – A Finite Elements Approach*, John Wiley & Sons Ltd, New York, 2001.
- Gibbs, Y., "NASA Armstrong Fact Sheet: Solar-Power Research," <http://www.nasa.gov>, 2015.
- Kane, T. R., *Dinamics*. Holt, Rinehart and Winston, Inc, 1968.
- Livne, E., and Weisshaar, T. A., "Aeroelasticity of nonconventional airplane configurations – past and future," *Journal of Aircraft*, 40(6):1047-1065, 2003.
- Nikravesh, P. E., *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*, Prentice Hall, 1988.
- Noll, T. E., Brown, J. M., Perez-Davis, M. E., Ishmael, S. D., Tiffany, G. C., and Gaier, M., "Investigation of the Helios Prototype Aircraft Mishap," Mishap Report Volume I, NASA, <http://www.nasa.gov/pdf/64317main/helios.pdf> , 2004.
- Palacios, R., Cesnik, C. E. S., and Reichenbach, E., "A Re-examination of the Structural Design Procedures for Very Flexible Aircraft," *Proceedings of the International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, Stockholm, Sweden, June 18-21, 2007.
- Patil, M. J., Hodges, D. H., and Cesnik, C. E. S., "Nonlinear Aeroelasticity and Flight Dynamics of High-Altitude Long-Endurance Aircraft," *Journal of Aircraft*, 38(1):88-94, 2000.
- Rao, S. S., *Vibraciones Mecánicas*. 5ta ed. Pearson 2012.
- Reschke, C., "Flight loads analysis with inertially coupled equations of motion," *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit*, AIAA Paper 2005-6026, August 15-18, San Francisco, CA, pp. 1-21, 2005.
- Scheiman, D. A., Brinker, D. J., Bents, D. J., and Colozza, A. J., "Design of a GaAs/Ge Solar Array for Unmanned Aerial Vehicles," *IEEE WCPEC*, pp. 2006-2009, 1994.
- Schimdt, D. K., and Raney, D. L., "Modeling and simulation of flexible flight vehicles," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 24(3):539-546, 2001.
- Shabana, A. A., *Dynamics of Multibody Systems*, 3rd ed. Cambridge University Press, 2010.
- Shuster, M. D., "A survey of attitude representations," *Journal of the Astronautical, Sciences*, 1993, vol. 41, no 4. pp 439-517.
- Tenenbaum, R. A., *Fundamentals of Applied Dynamics*, Springer-Verlag, New York, Inc., 2004.
- Tilmann, C. P., Flick, P. M., Martin, C. A., and Love, M. H., "High-Altitude Long Endurance Technologies for SensorCraft," *RTO AVT Symposium on Novel Vehicle Concepts and Emerging Vehicle Technologies*, Brussels, Belgium, April 7–10 2003, MP-104-P-26-1, 2003.

Wang, R., Zhou, X., and Zhou, Z., “Longitudinal Flight Dynamics and Control of Highly Flexible Solar UAV,” *IEEE (ICIECS)*, 1-4, 2010.

Whitson, S., “The Proteus, Giving Shape to Forms Unknown,” *Private Pilot*, 33(12):44-50, 1998.