

EMPLEO DE TEORÍA DE HELICOIDES PARA EL DISEÑO DE MECANISMOS FLEXIBLES DE PRECISIÓN TRIDIMENSIONALES

Martín A. Pucheta^{a,b}, Alejandro G. Gallardo^a y Juan A. Bernad^a

^a*Centro de Investigación en Informática para la Ingeniería (CIII), Facultad Regional Córdoba de la Universidad Tecnológica Nacional, Maestro López esq. Cruz Roja Argentina, X5016ZAA Córdoba, Argentina, mpucheta@frc.utn.edu.ar, <http://ciii.frc.utn.edu.ar>*

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

Palabras Clave: Teoría de Helicoides, Sistemas de Helicoides, Álgebra de Lie, Grupos de Lie, Números duales, Mecanismos espaciales, Mecanismos flexibles.

Resumen. La descripción espacial del movimiento tridimensional ha recibido diversos enfoques en los últimos dos siglos, entre ellos se puede mencionar la Teoría de Helicoides y su álgebra, Grupos de Lie y Álgebras de Lie, y el Álgebra de Clifford (números duales), entre otros. Cada descripción tiene su ventaja en la forma que reducen la complejidad de las ecuaciones diferenciales del problema de análisis a resolver o en el tratamiento de desplazamientos finitos ó infinitesimales. Computacionalmente unas son más adecuadas al procesamiento simbólico y otras a la implementación numérica vectorial/matricial. En este trabajo se estudian los enfoques matemáticos que se utilizan para el diseño conceptual y síntesis de mecanismos flexibles de precisión. En particular, se destaca el rol que tiene la teoría de helicoides (conocida en inglés como Screw Theory) en la etapa de diseño conceptual, en donde el análisis combinatorio para la enumeración de alternativas de diseño es importante. Por ello se estudian metodologías basadas en enumerar, en términos de helicoides, los espacios de movimiento deseados, sus espacios duales de restricción y su actuación óptima. Se presentan simulaciones de ejemplos encontrados en la literatura y se describen los trabajos a futuro en el área de mecanismos de precisión siguiendo este enfoque.

1. INTRODUCCION

Los mecanismos flexibles transmiten movimientos y fuerzas/momentos por la deformación de sus miembros flexibles. Cuando se los compara con mecanismos rígidos, los flexibles tienen la ventaja de eliminar necesidades de lubricación, no poseen juegos, reducen o eliminan la fricción y el consiguiente desgaste entre partes, y reducen la complejidad del proceso y costos de ensamblaje y alineación. Por ello se están utilizando para movimientos de alta precisión en etapas posicionadoras, robots y aplicaciones biomédicas, entre otras aplicaciones (Howell et al., 2013).

La descripción espacial del movimiento tridimensional ha recibido diversos enfoques en los últimos dos siglos, se puede mencionar la Teoría de Helicoides y su álgebra, Grupos de Lie y Álgebras de Lie, Álgebra de Clifford (números duales), Álgebra geométrica, y métodos basados en álgebra lineal (matriz/vector) entre otros. Sin embargo, con el advenimiento de las computadoras, en las últimas tres décadas se destacaron las que se adecuaron a la implementación computacional. Algunas combinan la representación de la rotación (ángulos de Euler, cuaterniones, matrices de cosenos directores, vector de rotación (Pucheta et al., 2014)) con la representación de vectores que representan el movimiento de traslación (Geradin y Cardona, 2001; Selig, 2006). Una representación que ha adquirido gran importancia en aplicaciones de ciencia e ingeniería es la basada en la denominada Teoría de Helicoides (Ball, 1900; Huang et al., 2013). Esta representación es también adecuada para abarcar la etapa de diseño conceptual y de diseño detallado, ya sea de mecanismos (Hunt, 1978; Phillips, 1984, 1990) o robots (Boney, 2002; Kong y Gosselin, 2013).

La Teoría de Helicoides permite manipular en forma conjunta la rotación y la traslación. Debido a que el helicoide es un invariante del movimiento entre dos posiciones finitas, su empleo está implícito y es equivalente a otras representaciones. El helicoide es un par de vectores dotados de una relación de paso (“pitch”) que permite representar velocidad angular y lineal en una sola entidad denominada “Twist”, así como fuerza y cupla en una única entidad denominada “Wrench”. Un conjunto de helicoides forman un espacio vectorial y se pueden manipular con álgebra lineal. Los helicoides están formados por elementos de un subgrupo o grupo de Lie denominado grupo especial Euclideo $SE(3)$ y permiten caracterizarlo paramétricamente (Murray et al., 1994; Selig, 2006). El estudio de estos subespacios es muy utilizado para diseñar mecanismos paralelos tridimensionales facilitando su enumeración y también su análisis en forma analítica y numérica (Huang et al., 2013). Las ecuaciones de la estática y del movimiento en cuerpos y mecanismos se pueden expresar con sencillez y se puede combinar, por ejemplo, con teoría de líneas para la identificación de singularidades. Recientemente, Hopkins (2010) propuso una metodología para diseñar mecanismos flexibles basada en enumerar, en términos de helicoides, los espacios de movimiento deseados, sus espacios duales de restricción y los espacios para su actuación óptima que evitan excitar movimientos parasitarios, definidos como aquellos movimientos restringidos a magnitudes de 4 a 8 órdenes de magnitud menor que los movimientos que son grados de libertad deseados. Esta metodología de gran auge en la ingeniería de precisión fue extendida recientemente por otros investigadores (Kumar et al., 2013; Yue et al., 2015; Hao y Kong, 2013) para diseñar mecanismos flexibles complejos demostrando que es de base matemática rigurosa y de gran aplicabilidad práctica.

En este trabajo se estudian los enfoques matemáticos que se utilizan para el diseño conceptual y síntesis de mecanismos flexibles de precisión utilizando helicoides. En particular, se destaca el rol que tiene la teoría de helicoides (i) en la etapa de diseño conceptual, en donde el análisis combinatorio para la enumeración de alternativas de diseño es importante, y (ii) en

la aplicación de espacios generados por helicoides para llegar a un mecanismo que produzca un movimiento deseado en donde se definen las dimensiones significativas del mecanismo y la posición óptima de actuadores. Se presentan simulaciones de ejemplos encontrados en la literatura de referencia (Hopkins, 2010) y se describen los trabajos a futuro en el área de mecanismos de precisión siguiendo estos enfoques.

En la Sección 2 se revisan las metodologías existentes para el diseño de mecanismos flexibles. En la Sección 3 se describe la teoría de helicoides y la formulación para el diseño mediante libertad, actuación y restricción. En la Sección 4 se presenta la forma algorítmica de una metodología basada en espacios de libertad, restricción y actuación, sin entrar en detalles de la visualización de estos espacios. En la Sección 5 se reproduce un caso de la literatura utilizando esta técnica y se muestra la verificación de los resultados analíticos mediante simulaciones por elementos finitos.

2. METODOLOGÍAS DE DISEÑO DE MECANISMOS FLEXIBLES

La literatura especializada en mecanismos flexibles (Howell et al., 2013) describe, al menos, cuatro categorías importantes en las que se pueden clasificar las metodologías que permiten obtener mecanismos flexibles desde especificaciones de diseño. Estos métodos están basados en:

- **Optimización Topológica (OT):** Esta metodología basa su teoría en mecánica del continuo y en el análisis de sensibilidad continua en espacios topológicos (Howell et al., 2013, Ch. 7). Para resolver el problema de optimización planteado, se resuelven iterativamente las ecuaciones en derivadas parciales en forma numérica con el método de los elementos finitos, el método de los elementos de borde, o por análisis isogeométrico. Inicialmente, se utilizó en optimización estructural para estructuras bidimensionales de barras, luego tuvo éxito en modelos 2D para el diseño de sistemas micro electromecánicos (MEMS) con diversos principios de actuación. Actualmente, tiene auge en el espacio 3D en combinación con técnicas con base teórica en la Derivada Topológica (Novotny y Sokolowski, 2013). La principal ventaja es que permite obtener mecanismos flexibles de geometría óptima en cuanto a mínima cantidad de material y distribución homogénea de las tensiones (flexibilidad distribuida). El principal inconveniente es que durante la ejecución del proceso de quitado de material pueden aparecer desconexiones indeseadas de partes o crearse grados de libertad adicionales indeseados. Para mitigar ello se necesitan reglas heurísticas. Una de las desventajas que pueden atribuirse a este método es la complejidad de manufactura para las soluciones óptimas.
- **Teoría de Helicoides (TH):** Esta metodología creada por Hopkins (2010) en el MIT (USA) se basa en el empleo de Teoría de Helicoides para representar los movimientos requeridos, la actuación y permite determinar los cuerpos flexibles cuyas reacciones restringirán sólo los movimientos indeseados. La metodología se denomina FACT, por sus siglas en inglés de *Freedom, Actuation and Constraint Topologies* (Hopkins y Culpeper, 2010b,a). Esta metodología permite obtener soluciones conexas y de geometrías sencillas de construir y miniaturizar. Actualmente se está utilizando para crear metamateriales (Spadaccini, 2016) con propiedades mecánicas especiales; por ejemplo, con alta rigidez y baja densidad. Recientemente, Hao y Kong (2013) presentaron la combinación de plataformas paralelas utilizando TH, logrando la cancelación de movimientos parasitarios espaciales.

- **Reemplazo de Pseudo Rígidos:** Esta metodología está inspirada en el diseño de mecanismos rígidos, a los cuales se les reemplaza las juntas cinemáticas por miembros flexibles (Smith y Chetwynd, 1992; Smith, 2000; Howell, 2001; Lobontiu, 2002). Con ello se obtiene un mecanismo flexible en base a concentrar la flexibilidad en los pares cinemáticos (flexibilidad concentrada) o distribuida en elementos de vigas. Existen muchos antecedentes del empleo en el diseño de mecanismos pseudorígidos planos (Pucheta, 2008) y se ha demostrado su utilidad para diseñar mecanismos con propiedades biestables (Pucheta y Cardona, 2010), pero su sistematización para extenderlo a tres dimensiones parecía ser infactible. Recientemente, Su *et al.* (Kumar *et al.*, 2013, Cap. 6) incorporaron estos modelos de flexores en una biblioteca de elementos representados también por helicoides, probando su factibilidad sólo en la etapa conceptual.
- **Métodos de Construcción en Bloques:** Esta metodología se basa en combinar subsistemas con funciones cinemáticas predefinidas y relaciones de entrada/salida conocidas. En su estado actual, y por el enfoque cinetoestático de usar centros instantáneos de rotación permite utilizarse sólo en un limitado rango de problemas planos. Debido a que el helicoides de un movimiento contiene al centro instantáneo de rotación de dicho movimiento, podría decirse que varias ideas de la descomposición en bloques pueden generalizarse también utilizando teoría de helicoides.

En una categoría adicional se puede mencionar la técnica de diseño de mecanismos flexibles con métodos de elementos finitos inversos propuesta por Albanesi *et al.* (2013) que es tridimensional. Aquí la intervención del usuario es indispensable y su sistematización es compleja.

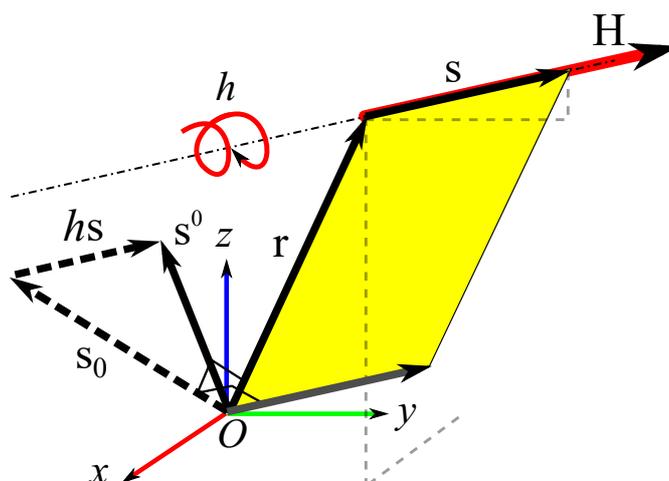
En este estado del arte, se destaca el empleo de la Teoría de Helicoides como método matemáticamente riguroso y sistematizable para diseñar mecanismos flexibles de precisión. El mismo compete con la Optimización Topológica para arribar a resultados similares y su comparación objetiva entre sí es inexistente. Usando TH, se espera obtener soluciones en menor tiempo y con menor uso de recursos computacionales que con OT (aunque no se descarta la posibilidad de realizar lo inverso y obtener condiciones iniciales con OT para posteriores empleos de diseño con TH).

3. TEORÍA DE HELICOIDES PARA MECANISMOS FLEXIBLES

El helicoides es un par de vectores, que definen la línea o eje del helicoides, dotado de una relación de paso (“pitch”). La Fig. 1 se utilizará para explicar la línea y los helicoides.

El helicoides unitario $\$$ está definido por un vector unitario s a lo largo del eje del helicoides, en donde el eje está localizado por un vector r que se dirige desde el origen del marco de referencia coordinado $O-xyz$ hacia cualquier punto del eje y existe un tercer elemento, el escalar h denominado paso.

Los dos vectores que componen el helicoides se denominan de varias maneras, primaria y secundaria, primal y dual, primaria y momento, etc. El paso está definido implícitamente mediante los dos vectores (como se verá en la Sec. 3.2) y puede ser finito o infinito, en el caso de ser finito se distingue el caso particular en que es cero. Esto conduce a distinguir helicoides con los subíndices del paso, como $\$_0$, $\$_h$, y $\$_\infty$. En teoría de mecanismos corresponden, respectivamente, a los movimientos relativos permitidos por juntas cinemáticas de tipo rotoidal, helicoidal y prismática.

Figura 1: Helicoides definido por una línea (s, s_0) y un paso h

3.1. Líneas y coordenadas de Plücker

La línea del eje del helicoides se expresa por bivectores o pares de vectores y también por coordenadas homogéneas, denominadas coordenadas de Plücker. Con referencia a la Fig. 1, un vector dirección s de la línea está acotado a estar sobre la línea (ubicado en cualquier punto de ella) y el otro vector s_0 que la define es el resultante de multiplicar vectorialmente un vector arbitrario r que va desde el origen hacia cualquier punto de la línea con el vector dirección de la línea $s_0 = r \times s$, por lo tanto es un vector perpendicular a plano que pasa por la línea y el origen, libre sobre este plano. Entonces existe la restricción de que s y s_0 son perpendiculares

$$s \cdot s_0 = 0 \quad (1)$$

y esta ecuación se conoce como identidad cuadrática o cuádrice de Klein. La línea se expresa entonces como el par de vectores unitarios (s, s_0) y son las 6 coordenadas de Plücker¹. Dado que para definir una línea se requieren de 4 números, las 6 coordenadas están sujetas a la condición (1) y además, sujeta a que el escalado de las coordenadas por un escalar no nulo k , resulta en la misma línea

$$(s, s_0) \equiv k(s, s_0). \quad (2)$$

Claramente, si la línea pasa por el origen, su momento se anula y la línea es $(s, \mathbf{0})$. Si la magnitud del momento $|s_0|$ es no nula, la distancia de la línea al origen es la magnitud $d = \frac{|s_0|}{|s|}$. Permitiendo una distancia infinita, la línea en el infinito tiene la forma $(\mathbf{0}, s_0)$, o sea, posee momento pero s por convención posee dirección pero tiene magnitud nula. Las magnitudes de los vectores s y s_0 no pueden ser ambos nulos. El vector distancia de menor magnitud es

$$d = \frac{s \times s_0}{s \cdot s}, \quad (3)$$

con $s \neq \mathbf{0}$.

Las coordenadas de Plücker (Hunt, 1978) tienen comúnmente la nomenclatura

$$([p_{01}, p_{02}, p_{03}], [p_{23}, p_{31}, p_{12}]) \quad (4)$$

¹Existe una correspondencia 1 a 1 entre líneas en el espacio Euclidean y puntos en el espacio proyectivo \mathbb{P}^5 si se usan coordenadas homogéneas para la línea

donde cada coordenada p_{ij} se obtiene como el determinante de la matriz 2×2 formada por las columnas i y j de la matriz que posee dos puntos arbitrarios $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ no coincidentes de la línea

$$\begin{bmatrix} k & x_1 & y_1 & z_1 \\ k & x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} \rightarrow p_{01} = \begin{vmatrix} k & x_1 \\ k & x_2 \end{vmatrix}; p_{02} = \begin{vmatrix} k & y_1 \\ k & y_2 \end{vmatrix}; p_{03} = \begin{vmatrix} k & z_1 \\ k & z_2 \end{vmatrix}; \\ p_{23} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_1 & z_2 \end{vmatrix}; p_{31} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_1 & x_2 \end{vmatrix}; p_{12} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1 & y_2 \end{vmatrix} \quad (5)$$

donde, los primeros 3 determinantes definen un vector sobre la línea (el escalar $k = 0$ indica que la línea está en el infinito y está en el espacio finito de otro modo) y los segundos 3 determinantes definen el vector del momento de la línea.

Por último, si se normaliza al vector sobre la línea

$$\frac{[p_{01}, p_{02}, p_{03}]}{\|[p_{01}, p_{02}, p_{03}]\|} \quad (6)$$

se obtienen las coordenadas de Plücker normalizadas e impone la segunda condición necesaria, además de la (1), para representar líneas. De este modo, la componente primaria queda adimensional y la secundaria tiene unidades de longitud, mientras que el paso y la mínima distancia entre un eje y un punto no se ve afectada por la normalización.

3.2. Helicoides

El helicoides, definido como una línea dotada del escalar de paso h , posee como vector secundario a la suma del vector momento de la línea y un vector que es h veces el vector dirección de la línea.

Se designará al vector secundario como \mathbf{s}^0 (con el superíndice 0) y para determinar el eje del helicoides, se descompone a \mathbf{s}^0 en direcciones paralelas y perpendiculares a \mathbf{s} . En dirección paralela a \mathbf{s} se tiene a $h\mathbf{s}$, tal como se muestra en la Fig. 1. Luego, $\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}^0 - h\mathbf{s}$ y el eje del helicoides tiene coordenadas

$$(\mathbf{s}, \mathbf{s}^0 - h\mathbf{s}) \quad (7)$$

es decir, el momento de la línea es $\mathbf{r} \times \mathbf{s} = \mathbf{s}^0 - h\mathbf{s}$. Entonces, también se puede escribir al helicoides como

$$\mathcal{S} = (\mathbf{s}, \mathbf{s}^0) = (\mathbf{s}, \underbrace{\mathbf{s}^0 - h\mathbf{s}}_{\mathbf{s}_0} + h\mathbf{s}) = (\mathbf{s}, \underbrace{\mathbf{s}_0}_{\mathbf{r} \times \mathbf{s}} + h\mathbf{s}) = (\mathbf{s}, \mathbf{r} \times \mathbf{s} + h\mathbf{s}) \quad (8)$$

Nótese que la expresión final tiene como elementos al vector unitario \mathbf{s} sobre la línea que es eje del helicoides, un vector arbitrario \mathbf{r} de localización de la línea y al paso h , mientras que en la expresión inicial sólo tiene interpretación inmediata la componente primaria \mathbf{s} .

Aplicando la condición (1) al eje del helicoides (7)

$$\mathbf{s} \cdot (\mathbf{s}^0 - h\mathbf{s}) = \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^0 - h\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 0 \quad (9)$$

se obtiene que el paso es

$$h = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^0}{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} \quad (10)$$

donde, (i) el paso nulo, $h = 0$, indica que el helicoides es coincidente con un vector línea, (ii) el paso es infinito $h \rightarrow \infty$ cuando $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$, y (iii) cuando el paso es finito y no nulo, $h = h_\alpha$ sólo se puede decir que el vector secundario no es ortogonal al eje del helicoides y $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^0 \neq \mathbf{0}$, ya que

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^0 = h\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}. \quad (11)$$

En los helicoides está definida:

1. La multiplicación por un escalar como

$$\lambda\mathcal{S} = \lambda(\mathbf{s}; \mathbf{s}^0) = (\lambda\mathbf{s}; \lambda\mathbf{s}^0) \quad (12)$$

2. La suma, que se realiza componente a componente. Dados $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{s}_1; \mathbf{s}_1^0)$ y $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{s}_2; \mathbf{s}_2^0)$, la suma es

$$\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = (\mathbf{s}_1; \mathbf{s}_1^0) + (\mathbf{s}_2; \mathbf{s}_2^0) = (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2; \mathbf{s}_1^0 + \mathbf{s}_2^0). \quad (13)$$

3. El producto recíproco. Dados $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{s}_1; \mathbf{s}_1^0)$ y $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{s}_2; \mathbf{s}_2^0)$, el producto recíproco está definido como

$$\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2 = (\mathbf{s}_1; \mathbf{s}_1^0) \circ (\mathbf{s}_2; \mathbf{s}_2^0) = \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2^0 + \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_1^0. \quad (14)$$

El producto recíproco no depende de la elección del origen O . Como ejemplos mecánicos, para el caso en que un helicoides de fuerza actúa sobre un cuerpo produciendo un helicoides de velocidad, el producto recíproco con este helicoides representa la potencia, mientras que aplicado sobre un helicoides de desplazamiento, el producto con el mismo representa el trabajo.

Ball (1900) presentó al helicoides como un elemento geométrico, la línea recta del eje provisto por la cantidad escalar del paso con dimensiones de longitud que es la diferencia de unidades entre la parte primaria y secundaria del helicoides. Ball fue el primero en identificar el paralelismo entre *cinemática instantánea* de primer orden (las componentes de velocidad angular alrededor de ejes y velocidad lineal de puntos, ambos combinados en el *Twist*) por un lado y la *estática* (fuerza y cupla combinadas en el *Wrench*) por otro. Mediante enfoques más modernos de la Teoría de Grupos (Murray et al., 1994; Selig, 2006) se relacionó a los helicoides con elementos del grupo de Lie de los desplazamientos tridimensionales denominado $SE(3)$. Considerando el espacio tangente en el elemento identidad, se obtiene un espacio vectorial llamado álgebra de Lie del grupo de Lie. Eligiendo un origen para $SE(3)$ el álgebra de Lie asociada $se(3)$ es el espacio vectorial de todas las velocidades instantáneas cuyos elementos son vectores 6 dimensionales de la forma $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v})$, el helicoides de velocidad (*Twist*) formado por la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la velocidad de traslación \mathbf{v} . Paralelamente, el helicoides de fuerza tiene la forma (\mathbf{f}, \mathbf{M}) (*Wrench*). Estos son recíprocos si su tasa de trabajo o potencia es nula

$$(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) \circ (\mathbf{f}, \mathbf{M}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (15)$$

es decir, un cuerpo rígido tendrá por movimientos permitidos como aquellos no restringidos por las reacciones.

El helicoides de velocidad de rotación instantánea de un punto de un cuerpo se define mediante un helicoides de paso nulo como

$$\boldsymbol{\omega}\mathcal{S}_0 = \boldsymbol{\omega} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{s}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

donde ω es el vector de velocidad angular y $v_0 = r \times \omega$ es la velocidad traslacional del origen, r es el vector de localización que va desde el origen hasta cualquier punto a lo largo del eje del helicoides. Si el origen se toma sobre el eje se obtiene $\omega^{\$}_0 = (\omega; 0)$. Cabe aclarar que la velocidad de traslación en la literatura (Hunt, 1978) también aparece como $v_0 = \omega \times r$, pero en esos casos el vector r tiene origen en la línea y termina en el punto de interés con velocidad v_0 .

El helicoides de velocidad de traslación instantánea de un cuerpo rígido relativa a otro se define mediante un helicoides de paso infinito

$$v^{\$}_\infty = v \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ v \end{bmatrix} \quad (17)$$

en donde la traslación está dirigida según s y también puede considerarse como la velocidad de traslación originada por una rotación instantánea alrededor de un eje que es ortogonal a la dirección de desplazamiento s , el eje está en un plano perpendicular a la traslación y a distancia infinita (rotación alrededor de un eje en el infinito).

El helicoides de velocidad de rotación y traslación instantáneas combinadas de un cuerpo rígido relativa a otro se define mediante un helicoides

$$\omega^{\$}_h = \omega \begin{bmatrix} s \\ s^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ \omega^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ r \times \omega + h\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ r \times \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ v \end{bmatrix} = \omega^{\$}_0 + v^{\$}_\infty \quad (18)$$

donde la velocidad de traslación v se expresa mediante el paso en términos de la velocidad angular como $v = h\omega$. La suma de una rotación y traslación se puede observar más claramente si el origen O coincide con el eje del helicoides ($r = 0$). Los helicoides de velocidad se los denominan Twist diferenciales y forman un espacio vectorial lineal.

3.3. Sistemas de helicoides y álgebra lineal

Un conjunto de n helicoides linealmente independientes se pueden combinar linealmente para generar un espacio denominado sistema de n helicoides. Esto da lugar a muchas clasificaciones que también pueden representarse mediante superficies regladas en donde se colorea a las líneas con intensidades de valor de paso, o se las etiqueta con el valor del paso. Por ejemplo, el lugar geométrico que genera la combinación lineal de dos helicoides ortogonales, uno de paso 0 y uno de pasos finito, produce una superficie denominada cilindroide.

En el contexto de este trabajo, los sistemas de helicoides de desplazamientos deseados generan espacios de libertades, los sistemas de helicoides de fuerzas reacción generan espacios de restricciones, y los sistemas de helicoides de fuerzas actuación de los grados de libertad generan espacios de actuación. Hopkins (2010) creó bibliotecas con estos espacios para el diseño de mecanismos flexibles, pero su aporte principal fue el proveer un proceso sistemático para diseñarlos. Para ello, emplea dos helicoides:

1. El helicoides de desplazamiento infinitesimal (*Twist*) se define como

$$T = \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ c \times \Delta\theta + p\Delta\theta \end{bmatrix} \quad (19)$$

$\Delta\theta$ es un vector de desplazamientos rotacionales que apunta en la dirección del helicoides y δ es el desplazamiento lineal, c es el vector de localización que va desde el origen hasta cualquier punto a lo largo del eje del helicoides y p es el paso del helicoides.

2. El helicoides de fuerza/momento (*Wrench*) definido como

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{f} + q\mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (20)$$

\mathbf{f} es un vector de fuerza que apunta en la dirección del helicoides y $\boldsymbol{\tau}$ representa el momento del helicoides alrededor del origen del sistema coordenado, \mathbf{r} es el vector de localización que va desde el origen hasta cualquier punto a lo largo del eje del helicoides y q es el paso del helicoides.

El helicoides de desplazamiento es un helicoides dotado de magnitud, su aplicación a un cuerpo rígido resulta en el conocido Teorema de Chasles: “ Todo desplazamiento en el espacio es la composición de la rotación alrededor de algún eje y de una traslación a lo largo del mismo eje”. Está probado que la suma de vectores de rotación no representa la composición de rotaciones y la misma sólo es válida para pequeñas rotaciones. La hipótesis será adecuada para diseñar mecanismos flexibles con pequeños desplazamientos.

Nótese que Hopkins (2010) también denomina *Twist* al helicoides de desplazamiento, y en rigor, al helicoides de velocidad se le debe llamar *Twist diferencial*.

3.4. Cálculo algebraico del espacio complementario de libertad y actuación

Se pone énfasis en estudiar problemas en 3 dimensiones, en donde existen 6 grados de libertad para un cuerpo rígido. Al emplear helicoides, los espacios de restricciones y de libertades están relacionados por teoremas del álgebra lineal. Asumiendo que existen n helicoides de fuerza de restricción independientes, el mismo, aplicado a un cuerpo, permite un sistema de libertades de rango $6 - n$, coincidente con los grados de libertad.

Los helicoides (19) y (20) se representarán matricialmente por arreglos de vectores columna. El trabajo que se obtiene mediante el producto recíproco se expresará matricialmente como el producto escalar del vector representando al helicoides de desplazamiento y el de fuerza transpuesto, pero éste último con los vectores componentes intercambiados por una matriz 6×6 que se denomina operador de intercambio (de coordenadas ordenadas por ejes a coordenadas ordenadas por rayos) y simplemente utiliza un bloque 3×3 de ceros \mathbf{O}_3 y una matriz identidad \mathbf{I}_3 de 3×3 como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Luego, el producto recíproco es

$$\mathbf{T} \cdot \widehat{\mathbf{W}}^T = \mathbf{T}(\mathbf{Q}\mathbf{W})^T = \mathbf{0} \quad (22)$$

Las libertades que puede tener un punto de interés de un cuerpo rígido a guiar (nano, micro, o macro manipular) son en forma normalizada o unitaria, helicoides de rotación pura y de traslación pura, respectivamente alrededor y en dirección de ejes Cartesianos ortogonales x, y, z

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\theta_x) &= [1, 0, 0; 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{T}(\theta_y) &= [0, 1, 0; 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{T}(\theta_z) &= [0, 0, 1; 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{T}(\delta_x) &= [0, 0, 0; 1, 0, 0]^T \\ \mathbf{T}(\delta_y) &= [0, 0, 0; 0, 1, 0]^T \\ \mathbf{T}(\delta_z) &= [0, 0, 0; 0, 0, 1]^T \end{aligned} \quad (23)$$

Este producto recíproco se emplea en los sistemas de helicoides definidos matricialmente como helicoides ordenados por columnas y están relacionados por el álgebra como

- Espacio de libertades

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_n]; \quad (24)$$

generado por n helicoides unitarios base; el rango del espacio es n .

- Espacio de restricciones

$$[\mathbf{W}] = [\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_{6-n}] \quad (25)$$

generado por $n - 6$ helicoides base que son calculados como el complemento del espacio de restricciones, donde $n - 6$ es el rango de $[\mathbf{W}]$. Corresponde a la base del espacio definido por las r restricciones flexibles actuando sobre un cuerpo rígido de interés.

- Espacio de actuaciones

$$[\mathbf{W}_A] = [\mathbf{W}_{A1}, \mathbf{W}_{A2}, \dots, \mathbf{W}_{An}] \quad (26)$$

de igual dimensión que el espacio de libertades $[\mathbf{T}]$, de modo que consiste de n helicoides de fuerza necesarios para actuar cada helicoides de desplazamiento con la magnitud de movimiento impuesta para ese grado de libertad.

Los sistemas $[\mathbf{T}]$ y $[\mathbf{W}]$ son entonces recíprocos y se obtiene uno a partir del otro y da lugar a diversas formas de proceder en el diseño. La forma de síntesis consiste en que dado un sistema $[\mathbf{T}]$ deseado, se calcule $[\mathbf{W}]$ y se enumeren todas las implementaciones físicas que lo produzcan, sea por mecanismos flexibles o rígidos; entre los flexibles pueden ser serie, paralelo o híbridos.

El objetivo principal en mecanismos de precisión flexibles es que los movimientos que se consideran restringidos, denominados parasitarios, estén acotados en un rango de error mínimo. Un segundo objetivo particular que ha adquirido gran auge es que la actuación de los movimientos deseados se diseñe especialmente para que no produzca movimientos parasitarios. Esto impone grandes desafíos en el diseño tanto de las restricciones y como de las actuaciones.

Al utilizar miembros flexibles, la flexibilidad global de los elementos puede expresarse como la inversa de una matriz de rigidez global \mathbf{K}_{TW} de 6×6 de modo que los sistemas están relacionados como

$$[\mathbf{W}_A] = \mathbf{K}_{TW}[\mathbf{T}] \quad (27)$$

y se desea que el sistema sea muy flexible en la direcciones de los movimientos deseados pero que además sea fuerte, es decir, que trabaje con un coeficiente de seguridad suficiente para estar alejado de las tensiones de fluencia.

Con referencia a la actuación (27), las formas de implementar el sistema $[\mathbf{W}_A]$ se simplifican si se decide emplear sólo actuadores lineales definiendo espacios de helicoides más simples e intuitivos (Hopkins identificó gráficos para 26 sistemas de actuación lineal los grados de libertad y combinaciones de movimientos en todos los sistemas de flexores). Una vez seleccionado el sistema de helicoides, conviene asociar cada helicoides de fuerza de $[\mathbf{W}_A]$ a sólo un movimiento de $[\mathbf{T}]$ en forma desacoplada. Considerando el helicoides de movimiento \mathbf{T}_i y el helicoides de fuerza con paso nulo \mathbf{W}_{Ai} se pueden determinar las actuaciones desde sistema de las fuerzas que producen dicho movimiento descomponiendo a los helicoides resultantes en su plano de actuación.

Por último, también existe un sistema de movimientos restringidos $[T^R]$ de rango $6 - n$ obtenido de

$$[W] = \mathbf{K}_{TW}[T^R] \quad (28)$$

que se desea que sea aproximadamente nulo en sus magnitudes, es decir, se pretende que la rigidez del mecanismo flexible sea muy elevada para estos movimientos, y esto sólo se logra con el conocimiento de las direcciones rígidas y flexibles que tienen las restricciones y su debida ubicación y arreglo espacial.

3.5. Cálculo analítico de la flexibilidad global

La transformación de coordenadas para el helicoide de desplazamiento T o de fuerza W corresponde a la transformación adjunta en el grupo de Lie en $SE(3)$ y consiste de multiplicar al helicoide por la matriz 6×6 definida como

$$[Ad] = \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{DR} & \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{n}_1 \ \mathbf{n}_2 \ \mathbf{n}_3] & [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}] \\ [\mathbf{d} \times \mathbf{n}_1 \ \mathbf{d} \times \mathbf{n}_2 \ \mathbf{d} \times \mathbf{n}_3] & [\mathbf{n}_1 \ \mathbf{n}_2 \ \mathbf{n}_3] \end{bmatrix} \quad (29)$$

donde la matriz \mathbf{R} es una matriz ortogonal propia 3×3 de rotación pasiva, \mathbf{O}_3 es una matriz 3×3 de ceros, \mathbf{D} es una matriz 3×3 antisimétrica asociada al vector desplazamiento \mathbf{d} , tal que $\mathbf{D}\mathbf{v} = \mathbf{d} \times \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Si se conocen los versores unitarios de una terna ortogonal $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ en el punto a transformar y el vector desde el origen \mathbf{d} al punto a transformar, la matriz de rotación pasiva puede construirse teniendo a los 3 vectores unitarios como columnas y la transformación de coordenadas puede expresarse en términos de estos 4 vectores, como muestra el lado derecho de la ecuación (29).

Luego, los helicoides transforman mediante el producto por la matriz \mathbf{N} como

$$\mathbf{T}' = \mathbf{NT} \quad , \quad \mathbf{W}' = \mathbf{NW} \quad (30)$$

Para aplicar la relación constitutiva de elasticidad entre el helicoide de desplazamiento y el helicoide de fuerza, se deben intercambiar la parte primaria y secundaria del helicoide de fuerza multiplicándolo por el operador de intercambio \mathbf{Q} como

$$\widehat{\mathbf{W}} = \mathbf{QW} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (31)$$

este intercambio facilita utilizar matrices de rigidez \mathbf{K} de la forma

$$\widehat{\mathbf{W}} = \mathbf{KT} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Por ejemplo, para un elemento de viga de sección cuadrada esta matriz es

$$\mathbf{K}_{\square} = \begin{bmatrix} 4EI/L & 0 & 0 & 0 & 6EI/L^2 & 0 \\ & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 0 & 0 \\ & & GJ/L & 0 & 0 & 0 \\ & & & 12EI/L^2 & 0 & 0 \\ & & & & 12EI/L^3 & 0 \\ \text{sim} & & & & & AE/L \end{bmatrix} \quad (33)$$

donde E y G son propiedades del material, el módulo de Young y de corte respectivamente, la geometría define el área transversal A , el momento de inercia en un eje transversal a la viga y perpendicular a la cara plana lateral I y J es el momento de inercia polar con respecto al eje longitudinal de la viga.

Para hallar la rigidez global entre helicoides de desplazamiento y de reacción, se procede como en los métodos matriciales de ingeniería estructural. Se realiza el cambio de coordenadas hacia un elemento master, se opera con él y se realiza la transformación de coordenadas inversa para retornarlo al sistema global. Entonces, un elemento de viga cuyo extremo unido a un cuerpo rígido está localizado en la posición global \mathbf{d} , orientado en una dirección longitudinal \mathbf{n}_3 apuntando hacia el cuerpo rígido y con una normal lateral \mathbf{n}_2 define una matriz de transformación de coordenadas $\mathbf{N}(\mathbf{d}, \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$, reacciona ante un helicoide de desplazamiento impuesto sobre el cuerpo rígido con un helicoide de reacción \mathbf{W} igual a

$$\widehat{\mathbf{W}} = \mathbf{Q}\mathbf{W}_{\text{master}} \rightarrow \mathbf{W} = \mathbf{N}\widehat{\mathbf{W}} = \mathbf{N}\mathbf{Q}\mathbf{W}_{\text{master}} \quad (34)$$

donde el helicoide de desplazamiento en el elemento master puede expresarse como

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}\mathbf{T}_{\text{master}} \rightarrow \mathbf{T}_{\text{master}} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{T} \quad (35)$$

y aplicando la relación constitutiva en el elemento master

$$\mathbf{W}_{\text{master}} = \mathbf{K}\mathbf{T}_{\text{master}} \quad (36)$$

y reemplazada en la (34) obtenemos la expresión del helicoide de reacción en coordenadas globales

$$\mathbf{W} = \mathbf{N}\mathbf{Q}\mathbf{K}\underbrace{\mathbf{T}_{\text{master}}}_{(35)} = \underbrace{\mathbf{N}\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{N}^{-1}}_{\mathbf{K}_{TW}}\mathbf{T} \quad (37)$$

donde la matriz de rigidez

$$\mathbf{K}_{TW} = \mathbf{N}\mathbf{Q}\mathbf{K}\mathbf{N}^{-1} \quad (38)$$

relaciona los helicoides de desplazamiento y reacción como

$$\mathbf{W} = \mathbf{K}_{TW}\mathbf{T} \quad (39)$$

Cuando sobre un cuerpo rígido actúan varias restricciones flexibles, por ejemplo en plataformas paralelas flexibles, la rigidez resulta ser aditiva y su ensamble es la suma

$$\mathbf{K}_{TW} = \sum_{i=1}^r \mathbf{K}_{TWi} = \sum_{i=1}^r \mathbf{N}_i \mathbf{Q} \mathbf{K}_i \mathbf{N}_i^{-1} \quad (40)$$

Un ejemplo de plataforma paralela flexible se presentará en la sección de resultados.

4. PROCEDIMIENTO DE DISEÑO UTILIZANDO FACT Y SU ALGORITMO

Habiendo definido el álgebra de los espacios de helicoides y la relación constitutiva entre helicoides de desplazamiento y de fuerza, en Howell et al. (2013, Cap. 6), Hopkins propone el siguiente procedimiento

Paso 1: Identificar los n grados de libertad deseados

Paso 2: Identificar el espacio de libertades con estos grados de libertad.

Paso 3: Seleccionar suficientes restricciones no redundantes desde el espacio complementario del espacio de libertades.

Paso 4: (Opcional) Seleccionar restricciones redundantes desde el sistema del espacio de restricciones para lograr mayor rigidez, capacidad de carga, y simetría.

Paso 5: (Hopkins, 2010) Determinar la actuación óptima.

Si bien estos son los pasos de síntesis, en la implementación algorítmica Hopkins (2010) propone un procedimiento inverso:

1. Propone restricciones que pueden ser redundantes sobre el punto a guiar con determinado número de GDL (parte de los Pasos 3 y 4). Con las restricciones construye el sistema de helicoides $[W]$.
2. Con la transpuesta $[W]^T$, determina el rango, es decir, el número de restricciones independientes.
3. Determina el espacio nulidad (su complemento) como $[W^\perp] = \text{null}([W]^T)$.
4. Con el espacio nulidad, utiliza el intercambiador para determinar una base de helicoides unitarios para el espacio de libertades como $[T] = \mathbf{Q}[W^\perp]$. Es decir, determina el Paso 2 y debe verificar que la dimensión de $[T]$ coincida el requerimiento del Paso 1.
5. Provee a cada helicoide unitario de movimiento en $[T]$ da una magnitud deseada y determina las actuaciones óptimas desde el espacio $[W_A] = \mathbf{K}[T_d]$.

5. RESULTADOS

Se reprodujo un problema de diseño de micro manipulador descrito en la tesis de J.B. Hopkins (Hopkins, 2010) y se determinaron valores de los movimientos parasitarios mediante simulación por elementos finitos del comportamiento lineal elástico.

5.1. Dispositivo 3R

El dispositivo de precisión elegido corresponde a una plataforma paralela de 3 grados de libertad de rotación (3 R) por lo que en un punto del mismo debería poseer traslaciones parasitarias nulas. Este dispositivo es de gran aplicación práctica y permite implementar intuitivamente la teoría.

Se desea diseñar un mecanismo flexible que permita lograr un movimiento de 1° alrededor de cada eje cartesiano, es decir $\theta_x = \theta_y = \theta_z = \pi/180$, de modo que los helicoides de movimiento deseados son

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{d1} &= [\theta_x, 0, 0; 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{T}_{d2} &= [0, \theta_y, 0; 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{T}_{d3} &= [0, 0, \theta_z; 0, 0, 0]^T \end{aligned} \quad (41)$$

[Paso 1] En forma normalizada, los helicoides de movimiento son

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= [1, 0, 0; 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{T}_2 &= [0, 1, 0; 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{T}_3 &= [0, 0, 1; 0, 0, 0]^T \end{aligned} \quad (42)$$

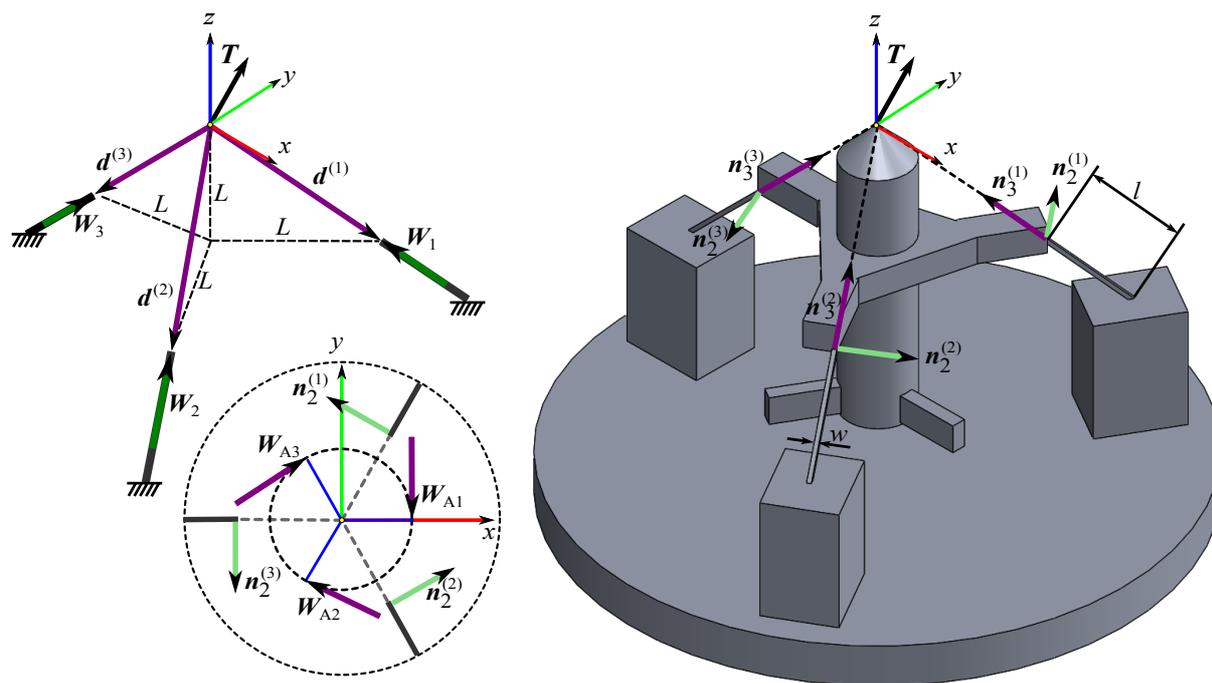


Figura 2: Disposición de helicoides de fuerza para restringir 3 traslaciones

[Paso 2] El espacio de libertades $[T]$ generado por estos helicoides tiene por lugar geométrico a una esfera de rotaciones en todas las direcciones. Usando mapas se puede identificar gráficamente el espacio complementario de restricciones, aunque aquí se sigue el enfoque algebraico. Con la matriz $[T]$ se puede determinar que el sistema de fuerzas $[W]$ está compuesto de 3 helicoides de fuerza pura

$$\begin{aligned} \widehat{W}_1 &= [0, 0, 0; 1, 0, 0]^T \\ \widehat{W}_2 &= [0, 0, 0; 0, 1, 0]^T \\ \widehat{W}_3 &= [0, 0, 0; 0, 0, 1]^T \end{aligned} \tag{43}$$

[Paso 3] Los 3 helicoides de fuerza pura se disponen en forma de trípode, espaciadas a 120° conectadas al cuerpo a guiar en un plano $z = -10,2\text{cm}$ y a una distancia del eje z de radio $L = 10,2\text{cm}$, como se muestra en la Fig. 2, de modo que los helicoides de fuerza pasan por el origen $(0, 0, 0)$ y cada uno tendrá una expresión $f_i(\mathbf{s}, \mathbf{0})$, en donde se toma $\alpha = \pi/3$, siendo $c = \cos(\alpha)$ y $s = \sin(\alpha)$, y las líneas de Plücker de los helicoides que las definen son

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[-c, -s, 1] \rightarrow \mathbf{W}_1 = [\mathbf{s}_1, \mathbf{0}]^T \\ \mathbf{s}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[-c, s, 1] \rightarrow \mathbf{W}_2 = [\mathbf{s}_2, \mathbf{0}]^T \\ \mathbf{s}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 0, 1] \rightarrow \mathbf{W}_3 = [\mathbf{s}_3, \mathbf{0}]^T. \end{aligned} \tag{44}$$

La rigidez (33) es idéntica para las 3 restricciones flexibles, como se muestra en la Fig. 2, son barras de sección cuadrada de longitud $l = 8,2\text{ cm}$, ancho $w = 0,3\text{ cm}$, y material aluminio ($E = 68e9\text{ Pa}$ y $G = 25e9\text{ Pa}$). Sus vectores de localización, normales longitudinales y salientes a un cara lateral requeridas en sus matrices de transformación de coordenadas (29), se definen

mediante

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{(1)} &= [L.c, L.s, -L]^T; & \mathbf{n}_2^{(1)} &= [s, -c, 0]^T; & \mathbf{n}_3^{(1)} &= \mathbf{s}_1; \\ \mathbf{d}^{(2)} &= [L.c, -L.s, -L]^T; & \mathbf{n}_2^{(2)} &= [-s, -c, 0]^T; & \mathbf{n}_3^{(2)} &= [0, 0, 0]^T; \\ \mathbf{d}^{(3)} &= [-L, 0, -L]^T; & \mathbf{n}_2^{(3)} &= [0, 1, 0]^T; & \mathbf{n}_3^{(3)} &= [0, 0, 0]^T; \end{aligned} \quad (45)$$

con estos parámetros se calcula la rigidez global $\mathbf{K}_{TW} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{K}^{(i)}$, que toma el valor

$$\mathbf{K}_{TW} = \begin{bmatrix} 0 & -3925,693 & 0 & 5620037,796 & 0 & 0 \\ 3925,693 & 0 & 0 & 0 & 5620037,796 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11210106,498 \\ 787,029 & 0 & 0 & 0 & 3925,693 & 0 \\ 0 & 787,029 & 0 & -3925,693 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 528,802 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Luego, los helicoides de fuerza forman el sistema

$$[W] = \begin{bmatrix} -0,3536 & -0,3536 & 0,7071 \\ -0,6124 & 0,6124 & 0 \\ 0,7071 & 0,7071 & 0,7071 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

El complemento resulta ser

$$[W^\perp] = \text{null}([W]^T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Se determina el espacio de libertades como

$$[T] = \mathbf{Q}[W^\perp] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Se aplica la magnitud deseada

$$[T_d] = \begin{bmatrix} \pi/180 & 0 & 0 \\ 0 & \pi/180 & 0 \\ 0 & 0 & \pi/180 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

y se determina el sistema de actuaciones multiplicando las Ecs. (46) y (50) como

$$[W_A] = \mathbf{K}_{TW}[T_d] = \begin{bmatrix} 0 & -68,5163 & 0,0 \\ 68,5163 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 13,7363 & 0 & 0 \\ 0 & 13,7363 & 0 \\ 0 & 0 & 9,2293 \end{bmatrix} = [\mathbf{W}_{A1}, \mathbf{W}_{A2}, \mathbf{W}_{A3}] \quad (51)$$

En donde para actuar cada caso, cada helicoides de fuerza se descompone en su vector de localización y magnitud. Por ejemplo, $\mathbf{W}_{A1} = [[0; 68,51; 0]; [13,73; 0; 0]]$ se descompone en la fuerza $\mathbf{f}_{A1} = [0; 68,51; 0]$ y en el vector de localización $\mathbf{d}_{A1} = [0; 0; -0,20]$, mediante la ecuación (3). Esto da un plano de actuación en $z = -20$ cm. La fuerza para el segundo helicoides está en el mismo plano. El tercer helicoides es un torque alrededor de z de un valor de 9,2293 Nm. Estas 3 formas de carga se llevaron a pestañas de actuación con actuadores que sólo empujan ó tiran (push/pull) en el mismo plano, incluido el torque, actuando tangentes a un radio de 0,07 m.

El cálculo numérico de los movimientos parasitarios resulta en los valores

$$[T^R] = \mathbf{K}_{TW}^{-1}[W] = \begin{bmatrix} 0,5454 & -0,5454 & 0 \\ -0,3149 & -0,3149 & 0,6298 \\ -0,0000 & 0,0000 & 0 \\ -0,0631 & -0,0631 & 0,1263 \\ -0,1093 & 0,1093 & 0 \\ 0,0631 & 0,0631 & 0,0631 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \quad (52)$$

lo cual verifica que el sistema es rígido en esas direcciones.

5.2. Simulación por elementos finitos

Primero se realizó una verificación de la simulación aplicando las fuerzas calculadas que se muestran en la primer fila de la Tabla 1.

Luego, para facilitar su acceso en la implementación física, los helicoides de actuación calculados se implementaron como aplicados en superficies salientes a 120° y angularmente equidistantes de las restricciones, como se muestran en la segunda fila de la Tabla 1, y en un plano a una distancia $z = -200$ mm.

En la simulación de elementos finitos se utilizaron las disposiciones de fuerzas con sus direcciones y sentido de actuación mostradas en la segunda fila de la Tabla 1 y con las magnitudes de la tercer fila.

- El giro alrededor de x , se logra reemplazando a la fuerza de magnitud f_y actuando en dirección y positiva por una fuerza f_1 actuando en dirección $+y$ que se suma a las componentes en y de las fuerzas f_2 y f_3 , cuyas componentes en x se cancelan, y cuyos momentos negativos alrededor de z cancelan el momento positivo en z de la fuerza f_1 . Es decir, en el plano $z = -200$, las dos ecuaciones de fuerza y la de momento alrededor de z que permiten determinar las 3 magnitudes incógnitas satisfacen:

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ M_z \end{bmatrix} = |f_1| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0,07 \end{bmatrix} + |f_2| \begin{bmatrix} -\cos(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) \\ -0,07 \end{bmatrix} + |f_3| \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) \\ -0,07 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 68,52 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

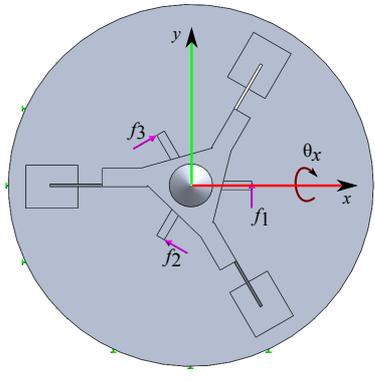
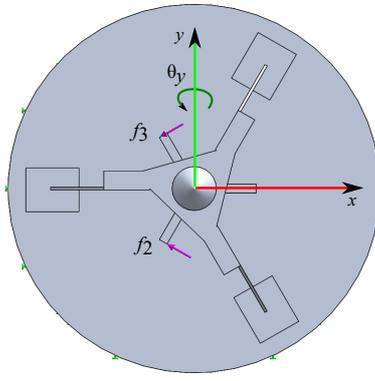
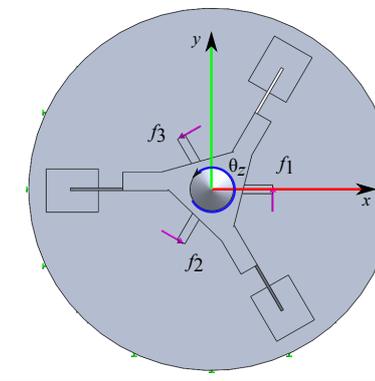
$\mathbf{W}_1^{(a)} = [0, f_y, 0; 0, 0, 0]$ $f_y = 68,52 \text{ N}$	$\mathbf{W}_2^{(a)} = [f_x, 0, 0; 0, 0, 0]$ $f_x = -68,52 \text{ N}$	$\mathbf{W}_3^{(a)} = [0, 0, 0; 0, 0, \tau_z]$ $\tau_z = 9,22 \text{ Nm}$
		
$ f_2 = f_3 = 22,84 \text{ N}$ $ f_1 = 45,68 \text{ N}$	$ f_2 = f_3 = 39,56 \text{ N}$	$ f_1 = f_2 = f_3 = 43,905 \text{ N}$

Tabla 1: Helicoides de actuación calculados e implementación de los 3 actuadores, aplicados en salientes a 120° y en un plano a una distancia $z = -200 \text{ mm}$, con sus estados de carga calculados para excitar con exactitud el movimiento deseado con movimientos parasitarios nulos (Nótese que el torque también se aplica mediante fuerzas coplanares.)

- Para producir el giro alrededor de y , se aplican sólo las fuerzas f_2 y f_3 , cuyos momentos alrededor de z se cancelan y sus componentes en y también. Las componentes de fuerza y momento en el plano de actuación serían:

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ M_z \end{bmatrix} = |f_2| \begin{bmatrix} -\cos(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) \\ -0,07 \end{bmatrix} + |f_3| \begin{bmatrix} -\cos(\pi/6) \\ -\sin(\pi/6) \\ 0,07 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -68,52 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

- Por último, el torque de $9,22 \text{ Nm}$ se aplica como 3 fuerzas coplanares, en donde las componentes en x e y claramente se cancelan

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ M_z \end{bmatrix} = |f_1| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0,07 \end{bmatrix} + |f_2| \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) \\ -\sin(\pi/6) \\ 0,07 \end{bmatrix} + |f_3| \begin{bmatrix} -\cos(\pi/6) \\ -\sin(\pi/6) \\ 0,07 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,22 \end{bmatrix} \quad (55)$$

y las fuerzas resultan de magnitud $9,22 / (3 \cdot 0,07) = 43,905 \text{ N}$.

Para la simulación por elementos finitos en Solid Works Simulation se utilizaron elementos tetraédricos refinados apropiadamente en las barras flexibles. Los desplazamientos obtenidos en la simulación se muestran en la Tabla 2, donde cada columna corresponde a los resultados respectivos de las simulaciones mostradas en las Figuras 3, 4 y 5.

Cabe mencionar que los giros deseados y parasitarios se calcularon utilizando los desplazamientos de los nodos, elegidos apropiadamente sobre entidades geométricas de modo de no estar afectados por otros movimientos. Para apreciar los giros:

- La Figura 3 muestra el plano $z - y$.
- La Figura 4 muestra el plano $z - x$.
- La Figura 5 muestra la vista de planta, el plano $x - y$.

	T_1	T_2	T_3
θ_x [°]	1,083	$1,55 \cdot 10^{-4}$	$-1,88 \cdot 10^{-5}$
θ_y [°]	$6,4 \cdot 10^{-5}$	1,083	$-1,11 \cdot 10^{-4}$
θ_z [°]	$5,979 \cdot 10^{-4}$	$5,037 \cdot 10^{-7}$	1,085
δ_x [mm]	$-3,46 \cdot 10^{-3}$	$2,83 \cdot 10^{-3}$	$-1,56 \cdot 10^{-5}$
δ_y [mm]	$-2,82 \cdot 10^{-3}$	$-3,459 \cdot 10^{-3}$	$8,78 \cdot 10^{-6}$
δ_z [mm]	$1,64 \cdot 10^{-5}$	$-5,607 \cdot 10^{-6}$	$-3,41 \cdot 10^{-3}$

Tabla 2: Valores para los movimientos obtenidos (deseados en negrita y parasitarios en fuente regular).

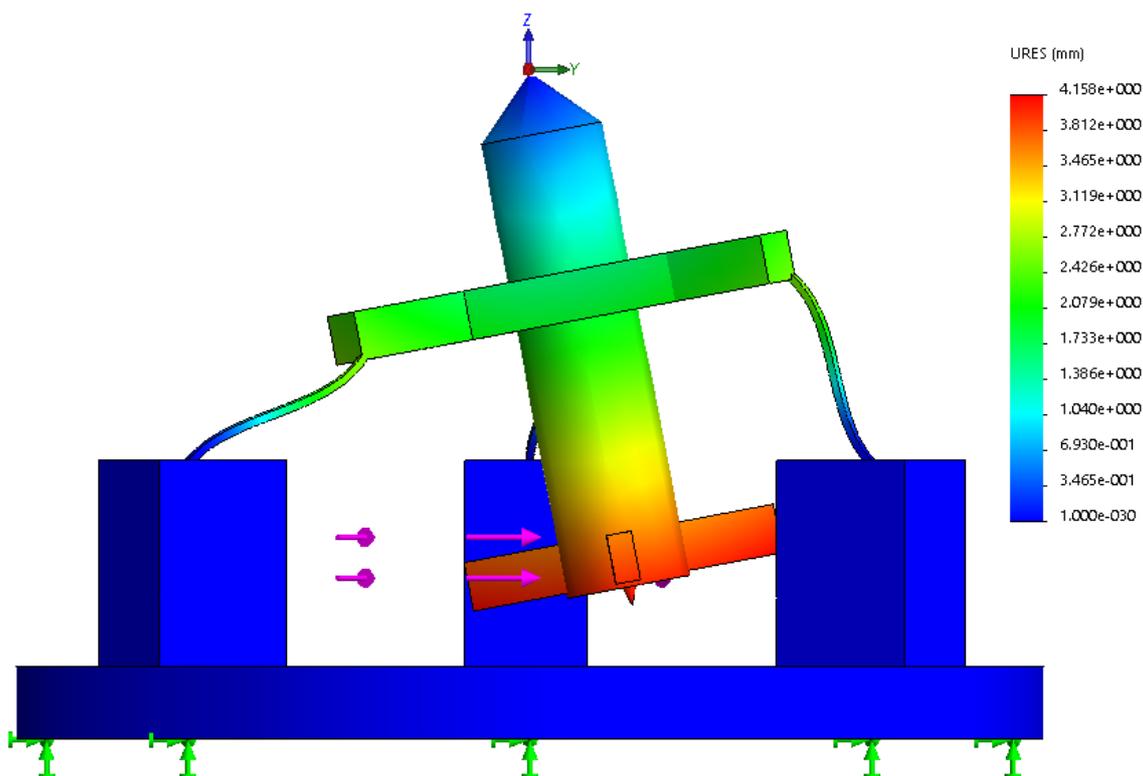


Figura 3: Movimiento de rotación alrededor del eje x

Los resultados de este problema de prueba muestran que es posible diseñar un mecanismo flexible para movimientos requeridos, eligiendo las restricciones flexibles y las actuaciones adecuadas siguiendo una metodología de base matemática simple. El ejemplo muestra además que es posible determinar disposiciones específicas de fuerzas que permiten incluso reemplazar momentos puros de actuación sin producir movimientos indeseados y logrando movimientos prescritos de precisión.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una revisión de diversos métodos para diseñar mecanismos flexibles y se destacó a los basados en la Teoría de Helicoides como los más prometedores para la etapa de diseño conceptual y síntesis de mecanismos flexibles de precisión. Se revisó la formulación desarrollada por J.B. Hopkins que en cuanto a la mecánica es similar a los métodos ya conocidos como métodos matriciales de análisis estructural pero con base geométrica en los helicoides. El empleo de helicoides demuestra que puede aplicarse álgebra lineal y vectorial para

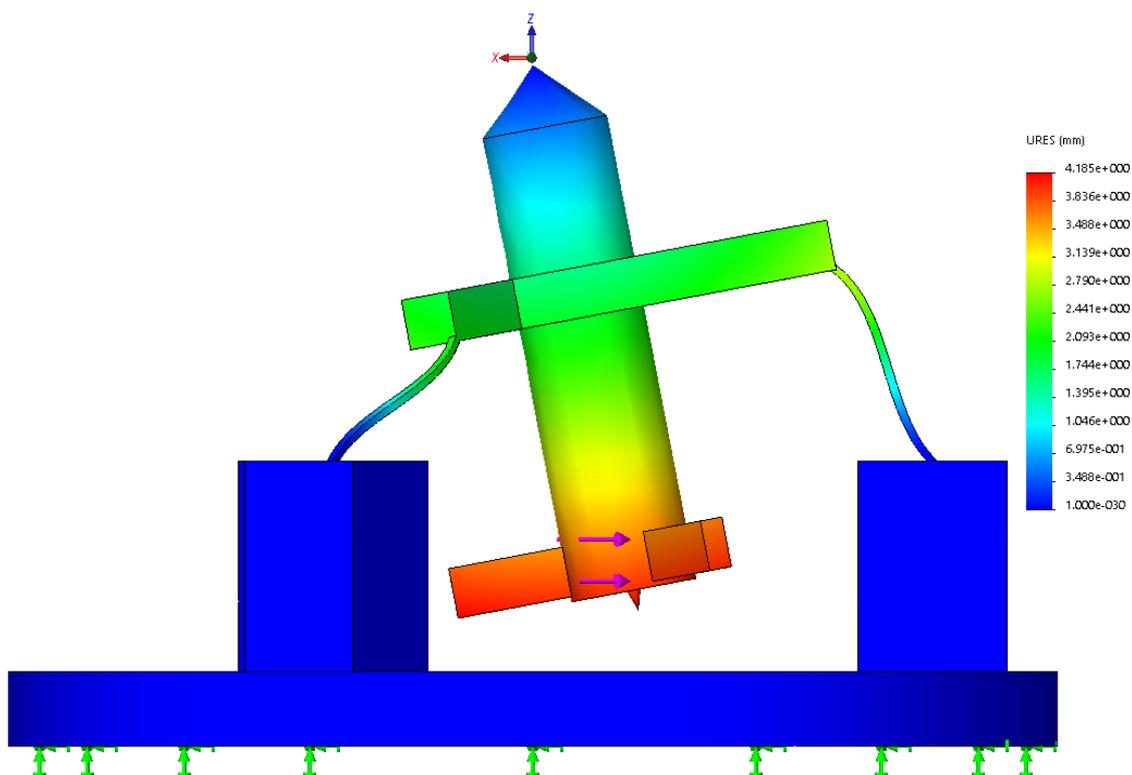


Figura 4: Movimiento de rotación alrededor del eje y

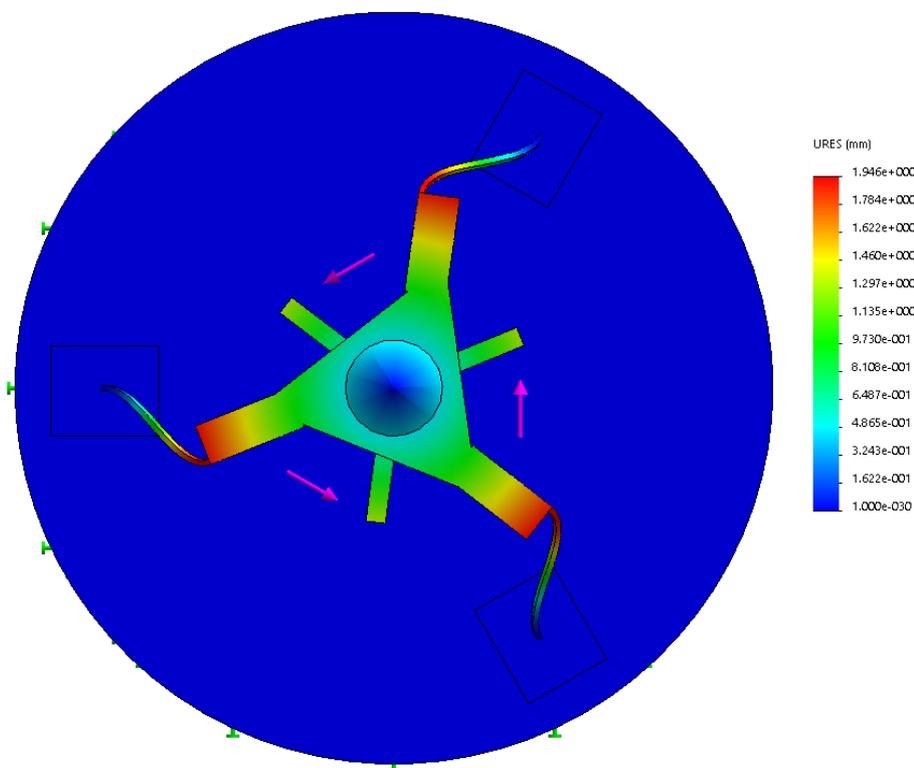


Figura 5: Movimiento de rotación alrededor del eje z

diseñar mecanismos usando los espacios de libertades, espacios de restricción y los espacios de actuación óptima. Se presentó un ejemplo de cálculo de la literatura demostrando la ventajas de utilizar helicoides y se verificaron los cálculos mediante simulaciones por elementos finitos de análisis elástico lineal, confirmando la precisión de la metodología.

A futuro, para innovar en la metodología FACT, se puede automatizar el proceso de diseño utilizando Teoría de Grafos para (i) modelar las relaciones entre multicuerpos, (ii) enumerar restricciones para determinados sistemas de helicoides, (iii) determinar sus grados de libertad, y (vi) facilitar la automatización del cálculo de algunas dimensiones significativas.

Agradecimientos

Se agradece al apoyo financiero de la Universidad Tecnológica Nacional a través de la beca SECyT del Rectorado UTN del segundo y tercer autor, la Secretaría de Asuntos Estudiantiles de la UTN-FRC del tercer autor, y de los proyectos PID-UTN 3935 y PID-UTN 25/E185. El primer autor agradece además a la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica PICT-2013-2894 y al CONICET. Los autores agradecen a J.B. Hopkins de la Universidad de California (USA) por el código provisto y las fructíferas discusiones acerca del test presentado.

REFERENCIAS

- Albanesi A., Pucheta M., y Fachinotti V. A new method to design compliant mechanisms based on an inverse beam finite element model. *Mechanism and Machine Theory*, 65(7):14–28, 2013.
- Ball R.S. *A Treatise on the Theory of Screws*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2 edición, 1900. (originally published in 1876 and revised by the author in 1900, now reprinted with an introduction by H. Lipkin and J. Duffy).
- Bonev I. ParallelMIC. 2002. Web page: <http://www.parallemic.org/Reviews/Review012.html>.
- Geradin M. y Cardona A. *Flexible Multi-Body Dynamics. A Finite Element Approach*. John Wiley & Sons, 2001.
- Hao G. y Kong X. A normalization-based approach to the mobility analysis of spatial compliant multi-beam modules. *Mechanism and Machine Theory*, 59:1 – 19, 2013.
- Hopkins J. *Design of Flexure-based Motion Stages for Mechatronic Systems via Freedom, Actuation and Constraints Topologies (FACT)*. Tesis de Doctorado, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, 2010.
- Hopkins J. y Culpepper M. Synthesis of multi-degree of freedom, parallel flexure system concepts via freedom and constraint topology (FACT) – Part I: Practice. *Precision Engineering*, 34(2):271–278, 2010a.
- Hopkins J. y Culpepper M. Synthesis of multi-degree of freedom, parallel flexure system concepts via freedom and constraint topology (FACT) – Part I: Principles. *Precision Engineering*, 34(2):259–270, 2010b.
- Howell L.L. *Compliant Mechanisms*. John Wiley & Sons, New York, 2001.
- Howell L.L., Magleby S.P., y Olsen B.M. *Handbook of Compliant Mechanisms*. Wiley, New York, 2013.
- Huang Z., Li Q., y Ding H. *Theory of Parallel Mechanisms*. Mechanism and Machine Science Vol. 6. Springer, Dordrecht, 2013.
- Hunt K.H. *Kinematic Geometry of Mechanisms*. Oxford University Press, New York, 1978.
- Kong X. y Gosselin C. *Type Synthesis of Parallel Mechanisms*. Springer Tracts in Advanced Robotics, Vol. 33. Springer, Berlin, 2013.

- Kumar et al. V., editor. *Advances in Mechanisms, Robotics, and Design Education and Research*, capítulo 6 *Mobility Analysis and Type Synthesis with Screw Theory: From Rigid Body Linkages to Compliant Mechanisms* by H.-J. Su, L.-F. Zhou, and Y. Zhang, páginas 55–66. Mech. and Mach. Science Vol. 14. Springer, 2013.
- Lobontiu N. *Compliant Mechanisms: Design of Flexure Hinges*. CRC Press, New York, 2002.
- Murray R.M., Li Z.X., y Sastry S.S. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC press, New York, 1994.
- Novotny A.A. y Sokolowski J. *Topological Derivatives in Shape Optimization*. Interaction of Mechanics and Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013. doi: 10.1007/978-3-642-35245-4.
- Phillips J. *Freedom in Machinery Vol .1: Introducing Screw Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1984.
- Phillips J. *Freedom in Machinery Vol .2: Screw Theory Exemplified*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.
- Pucheta M. *Computational methods for design and synthesis of planar mechanisms*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina, 2008.
- Pucheta M., Paz C., y Pereyra M.E. Representaciones cinemáticas de orientación y ecuaciones de estimación. En G. Bertolino, M. Cantero, M. Storti, y F. Teruel, editores, *Mecánica Computacional Vol. XIXIII, Actas del XXI Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones - ENIEF 2014*, páginas 2303–2324. Bariloche, Argentina, 2014. (Artículo completo).
- Pucheta M.A. y Cardona A. Design of bistable compliant mechanisms using precision-position and rigid-body replacement methods. *Mechanism and Machine Theory*, 45(2):304–326, 2010.
- Selig J. *Geometric Fundamentals of Robotics*. Springer, New York, 2 edición, 2006.
- Smith S. y Chetwynd D. *Foundations of Ultra-Precision Mechanism Design*. Vol. 2 of Developments in Nanotechnology. Taylor & Francis, Boca Raton, Florida, 1992.
- Smith S.T. *Flexures: Elements of Elastic Mechanisms*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 2000.
- Spadaccini C. Mechanical Metamaterials: Design, Fabrication, and Performance. En R.D. Braun, editor, *Frontiers of Engineering: Reports on Leading-Edge Engineering from the 2015 Symposium*, volumen National Academies Press de *National Academies Press*, páginas 82–162. OpenBook, 2016.
- Yue C., Zhang Y., Su H.J., y Kong X. Type synthesis of three-degree-of-freedom translational compliant parallel mechanisms. *ASME J. Mechanisms Robotics*, 7(3):031012, 2015. (8 pages).