Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXXIV, págs. 3253-3261 (artículo completo)
Sebastián Giusti, Martín Pucheta y Mario Storti (Eds.)
Córdoba, 8-11 Noviembre 2016

ANÁLISIS NUMÉRICO DE UNA FAMILIA DE PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO DISTRIBUIDO GOBERNADOS POR UNA INECUACIÓN VARIACIONAL ELÍPTICA

Mariela C. Olguín[a] y Domingo A. Tarzia[b]

[a]*Depto de Matemática, EFB-FCEIA, Universidad Nacional de Rosario, Avda. Pellegrini 250, S2000BPT Rosario, Argentina, mcolguin@fceia.unr.edu.ar*

[b]*Depto de Matemática-CONICET, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina, DTarzia@austral.edu.ar*

Palabras Clave: Control óptimo, inecuación variacional, análisis numérico.

Resumen.

En (M. Boukrouche and D.A. Tarzia, *Comput. Optim. Appl.*, 53, 375-393 (2012)) se estudia una familia de problemas de control óptimo continuos *Pa* gobernados por inecuaciones variacionales elípticas *Sa* donde el parámetro *a* de la familia es el coeficiente de transferencia de calor sobre una porción de la frontera del dominio n-dimensional del material. En ese trabajo se mostró la existencia y unicidad de su solución, es decir que, dado un control le queda asociada una única función estado y además hay sólo un control que minimiza al funcional costo. El objetivo de este trabajo consiste en analizar numéricamente la antes mencionada familia de problemas de control óptimo usando el método de elementos finitos con triángulos de Lagrange de tipo 1. Entonces, para cada valor del parámetro *a* se discretiza la inecuación variacional elíptica que determina el estado del sistema. Se obtiene existencia de una solución del estado discreto del sistema *Sa* y la convergencia global fuerte del estado discreto al estado continuo cuando el parámetro *h* del método numérico tiende a *0*. Análogamente, se establece la discretización del funcional costo y de la familia de problemas de control óptimo continuo *Pa*. Se dan propiedades del funcional de costo discreto y se obtiene la convergencia global fuerte del control óptimo discreto al control óptimo continuo cuando el parámetro *h* tiende a *0*. Finalmente, se estudia la convergencia fuerte de la solución del problema de control óptimo distribuido discreto *Pa* cuando el parámetro *a* tiende a infinito.

1. INTRODUCCIÓN

Se considera un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con una frontera $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ regular compuesta por dos porciones de frontera Γ_1 (de medida positiva) y Γ_2. Sea el sistema dado por:

$$u \geq 0;\ u(-\Delta u - g) = 0;\ -\Delta u - g \geq 0\ en\ \Omega; \tag{1}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(u-b)\ sobre\ \Gamma_1;\ -\frac{\partial u}{\partial n} = q\ sobre\ \Gamma_2; \tag{2}$$

donde g es la energía interna del sistema en Ω, q es el flujo de calor sobre el borde Γ_2, $\alpha > 0$ es el coeficiente de transferencia de calor sobre Γ_1 y $b > 0$ es la temperatura ambiente. La formulación variacional para este problema de obstáculo esta dada por la inecuación variacional elíptica que llamaremos (S_α) y se define como:
Hallar $u = u_{\alpha g} \in K_+$ tal que, $\forall v \in K_+$

$$a_\alpha(u_{\alpha g}, v - u_{\alpha g}) \geq (g, v - u_{\alpha g})_H - (q, v - u_{\alpha g})_Q + \alpha(b, v - u_{\alpha g})_R, \tag{3}$$

donde

$$V = H^1(\Omega), \quad K_+ = \{v \in V : v \geq 0\ en\,\Omega\},$$

$$H = L^2(\Omega), \quad Q = L^2(\Gamma_2), \text{ y } \quad R = L^2(\Gamma_1),$$

$$(u,v)_H = \int_\Omega u\,v\ dx, \quad (u,v)_Q = \int_{\Gamma_2} u\,v\ ds, \quad (u,v)_R = \int_{\Gamma_1} u\,v\ ds,$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\ dx$$

y

$$a_\alpha(u,v) = a(u,v) + \alpha(u,v)_R. \tag{4}$$

Observar que a_α es una aplicación bilineal, continua, simétrica y coerciva en V (Kinderhlerer y Stampacchia, 1980; Tabacman y Tarzia, 1989). Mas aún, se puede ver que si $\lambda_1 > 0$ es la constante de coercividad correspondiente a la aplicación a_1, entonces $0 < \lambda_\alpha = \lambda_1 \min\{1, \alpha\}$, es la constante de coercividad de la aplicación a_α, i.e.:

$$a_\alpha(v,v) \geq \lambda_\alpha \|v\|_V^2 \quad \forall\ v \in V. \tag{5}$$

En Boukrouche y Tarzia (2012) se consideró, para cada $\alpha > 0$, la siguiente familia de problemas de control óptimo continuo distribuido asociada con (S_α):
Problema (P_α): Hallar el control óptimo distribuido $g_{op_\alpha} \in H$ tal que

$$J_\alpha(g_{op_\alpha}) = \min_{g \in H} J_\alpha(g) \tag{6}$$

donde el funcional costo cuadrático $J_\alpha : H \to \mathbb{R}_0^+$ fue definido por:

$$J_\alpha(g) = \frac{1}{2}\|u_{\alpha g}\|_H^2 + \frac{M}{2}\|g\|_H^2 \tag{7}$$

con $M > 0$ una constante dada y $u_{\alpha g}$ la solución de (3) asociada con el control $g \in H$.

Ahora, se considera el problema (Boukrouche y Tarzia, 2012):

$$u \geq 0; \;\; u(-\Delta u - g) = 0; \;\; -\Delta u - g \geq 0 \;\; en \;\; \Omega; \tag{8}$$

$$u = b \;\; on \;\; \Gamma_1; \;\; -\frac{\partial u}{\partial n} = q \;\; sobre \;\; \Gamma_2; \tag{9}$$

suponiendo los mismos datos establecidos antes para (S_α). La formulación variacional del problema anterior, notada como (S) es: Hallar $u = u_g \in K$ tal que

$$a(u_g, v - u_g) \geq (g, v - u_g)_H - (q, v - u_g)_Q, \;\; \forall v \in K \tag{10}$$

donde

$$K = \{v \in V : \; v \geq 0 \; in \; \Omega, \; v/\Gamma_1 = b\}.$$

En ese mismo trabajo, se consideró el problema de control óptimo distribuido continuo asociado (P): Hallar el control óptimo continuo $g_{op} \in H$ tal que

$$J(g_{op}) = \min_{g \in H} J(g) \tag{11}$$

donde el funcional costo $J : H \to \mathbb{R}_0^+$ se define por:

$$J(g) = \frac{1}{2}\|u_g\|_H^2 + \frac{M}{2}\|g\|_H^2 \tag{12}$$

para $M > 0$ constante y u_g la correspondiente solución de la inecuación (10) asociada a $g \in H$.

El objetivo de este trabajo es realizar el análisis numérico del problema de control óptimo asociado (6). Con este fin, se utiliza el método de elementos finitos con triángulos de Lagrange de tipo 1 constituido por elementos finitos de clase C^0 siendo h el parámetro que tiende a cero (Brenner y Scott, 2008; Ciarlet, 2002). Se discretizan el funcional de costo (7) y la inecuación variacional (3) y se muestra que existe una única solución para estos sistemas discretos $(S_{h\alpha})$ (Lions, 1968), además de las correspondientes convergencias cuando $h \to 0$ en adecuados espacios funcionales siguiendo la metodología dada en Olguin y Tarzia (2015). También se estudia la convergencia de una familia de soluciones discretas de (P_α) cuando α tiende a infinito.

Diversos problemas continuos de control óptimo de sistemas gobernados por inecuaciones variacionales elípticas están dados en (Ait Hadi, 2008; Barbu, 1984; Bergounioux, 1997; De Los Reyes y Meyer, 2016; Haslinger y Roubicek, 1986; Hintermuller, 2008; Ito y Kunisch, 2000; Mignot, 1976; Mignot y Puel, 1984; Troltzsch, 2010) y existe abundante literatura acerca de análisis numérico de problemas de control óptimo gobernados por ecuaciones e inecuaciones variacionales elípticas o parabólicas (Casas y Mateos, 2002; Falk, 1974; Gariboldi y Tarzia, 2003; Hintermuller, 2008; Hinze, 2009; Meyer y Thoma, 2013; Tarzia, 1996, 1999).

2. DISCRETIZACIÓN DEL PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio poligonal acotado; b una constante positiva y τ_h una triangulación regular constituida por elementos finitos afines de clase C^0 sobre el dominio Ω. El parámetro de la triangulación es $h > 0$, que se define como la medida del mayor lado de todos los triángulos $T \in \tau_h$. Además para cada h se definen los conjuntos:

$$V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) : v_h/_T \in \mathbb{P}_1(T), \ \forall T \ \in \tau_h\}$$

y

$$K_{+h} = \{v_h \in V_h : v_h \geq 0 \quad \text{en} \quad \Omega\}$$

donde $\mathbb{P}_1(T)$ es el conjunto de polinomios de grado menor o igual a 1 en T.

Considerando $(S_{h\alpha})$ la forma discreta del sistema (S_α) dada por: Hallar $u_{h\alpha g} \in K_{+h}$ tal que, para todo $v_h \in K_{+h}$

$$a_\alpha(u_{h\alpha g}, v_h - u_{h\alpha g}) \geq (g, v_h - u_{h\alpha g})_H - (q, v_h - u_{h\alpha g})_Q + \alpha(b, v_h - u_{h\alpha g})_R. \tag{13}$$

Se define la discretización del funcional costo mediante la expresión:

$$J_{h\alpha} : H \to \mathbb{R}_0^+, \ \ J_{h\alpha}(g) = \frac{1}{2}\|u_{h\alpha\, g}\|_H^2 + \frac{M}{2}\|g\|_H^2 \tag{14}$$

y el problema de control óptimo discreto correspondiente $(P_{h\alpha})$ se establece como: Hallar $g_{h\alpha\, op} \in H$ tal que

$$J_{h\alpha}(g_{h\alpha\, op}) = \min_{g \in H} J_{h\alpha}(g) \tag{15}$$

donde $u_{h\alpha\, g}$ es la solución del problema $(S_{h\alpha})$ (13) para el control g.

En forma análoga, se define la formulación variacional discreta (S_h) : Hallar $u_{hg} \in K_h$ tal que

$$a(u_{hg}, v_h - u_{hg}) \geq (g, v_h - u_{hg})_H - (q, v_h - u_{hg})_Q \ \ \forall v_h \in K_h. \tag{16}$$

donde

$$K_h = \{v_h \in V_h : v_h \geq 0 \ in \ \Omega, v_h/\Gamma_1 = b\}$$

La correspondiente expresión discreta (P_h) del problema (P) se establece como: Hallar el control óptimo discreto $g_{op_h} \in H$ tal que

$$J_h(g_{op_h}) = \min_{g \in H} J_h(g) = \frac{1}{2}\|u_{hg}\|_H^2 + \frac{M}{2}\|g\|_H^2, \tag{17}$$

donde u_{hg} es la solución de la inecuación variacional elíptica (16).

Teorema 1:

Sean $g \in H$ y $q \in Q$. Entonces $(S_{h\alpha})$ tiene única solución.

Demostración: Surge a partir de la aplicación del Teorema de Lax-Milgram (Kinderhlerer y Stampacchia, 1980)

Lema 1:

(A) Dados g_n y $g \in H$, además $u_{h\alpha\, g_n}$ y $u_{h\alpha\, g} \in K_{+h}$ las soluciones asociadas a $(S_{h\,\alpha})$ para cada $\alpha > 0$. Si $g_n \rightharpoonup g$ en H, entonces se tiene que:

i) $\exists\, C > 0$ (independiente de h, α y n) tal que:

$$\|u_{h\alpha g_n}\|_V \leq C; \tag{18}$$

ii) $\forall\, h > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{h\alpha g_n} - u_{h\alpha g}\|_V = 0. \tag{19}$$

(B) Se verifica que

$$\|u_{h\alpha g_2} - u_{h\alpha g_1}\|_V \leq \frac{1}{\lambda_\alpha}\|g_2 - g_1\|_H$$

donde $u_{h\alpha g_i}$ es la solución de $(S_{h\alpha})$ para $g_i,\ i = 1, 2$.

Demostración: Se trabaja con una metodología similar a la de Falk (1974); Olguin y Tarzia (2015).

Lema 2:

Sean $u_{\alpha g} \in K_+ \bigcap H^r(\Omega), (1 < r \leq 2)$ y $u_{h\alpha g} \in K_{+h}$ las soluciones de las inecuaciones variacionales elípticas (3) y (13) respectivamente para el control $g \in H$. Existe una constante positiva C tal que

$$\|u_{h\alpha g} - u_{\alpha g}\|_V \leq C(\alpha) h^{(r-1)/2}. \tag{20}$$

Demostración:

Si se considera $v = u_{h\alpha g} \in K_{+h} \subset K_+$ en la inecuación variacional elíptica (3), $v_h = \Pi_h(u_{\alpha g}) \in K_{+h}$ en (13) donde Π_h es el operador interpolación (Brenner y Scott, 2008; Olguin y Tarzia, 2015) y se define $w = \Pi_h(u_{\alpha g}) - u_{\alpha g}$, se tiene que:

$$a_\alpha(u_{h\alpha g} - u_{\alpha g}, u_{h\alpha g} - u_{\alpha g}) \leq a_\alpha(u_{h\alpha g}, w) - (g, w)_H + (q, w)_Q - \alpha(b, w)_R.$$

Utilizando la coercividad de la aplicación a_α y usando adecuadamente las inecuaciones variacionales involucradas, se obtiene que:

$$\|u_{h\alpha g} - u_{\alpha g}\|_V^2 \leq \frac{C}{\lambda_\alpha}\|\Pi_h(u_{\alpha g}) - u_{\alpha g}\|_V \leq \frac{C}{\lambda_\alpha} h^{r-1}\|u_{\alpha g}\|_r.$$

Teorema 2:

Dados $g \in H$ y los parámetros $\alpha > 0$ y $h > 0$, se tiene:

a)

$$\lim_{\|g\|_H\to\infty} J_{h\alpha}(g) = \infty.$$

b) $J_{h\alpha}(g) \geq \frac{M}{2}\|g\|_H^2 - C\,\|g\|_H$ para alguna C independiente de $h > 0$.

c) $J_{h\alpha}$ es una aplicación semi-continua inferiormente débil en H.

d) Para cada $h > 0$ y $\alpha > 0$, existe una solución del problema de control óptimo distribuido discreto (15).

Demostración:

a) y b) se obtienen de la definición de $J_{h\alpha}(g)$.

c) Sea $g_n \rightharpoonup g$ en H débil, entonces utilizando la igualdad $\|g_n\|_H^2 = \|g_n - g\|_H^2 - \|g\|_H^2 + 2(g_n, g)_H$ se obtiene que $\|g\|_H \leq \liminf_{n\to\infty} \|g_n\|_H$. Entonces,

$$\liminf_{n\to\infty} J_{h\alpha}(g_n) \geq \frac{1}{2}\|u_{h\alpha g}\|_H^2 + \frac{M}{2}\|g\|_H^2 = J_{h\alpha}(g).$$

d) Resulta de Lions (1968).

Lema 3:
Si $u_{\alpha g} \in H^r(\Omega)$ para $(1 < r \leq 2)$, $g \in H$ y $\alpha > 0$, se tiene la siguiente estimación :

$$|J_{h\alpha}(g) - J_\alpha(g)| \leq C(\alpha) h^{\frac{r-1}{2}} \quad \forall g \in H \tag{21}$$

donde C es una constante positiva independiente de $h > 0$.

3. RESULTADOS DE CONVERGENCIA

Teorema 3:
Sean $u_{\alpha g} \in K_+ \bigcap H^r(\Omega), (1 < r \leq 2)$ y $u_{h\alpha g} \in K_{+h}$ las soluciones de las inecuaciones variacionales elípticas (3) y (13) respectivamente para el control $g \in H$, entonces $u_{h\alpha g} \to u_{\alpha g}$ en V cuando $h \to 0^+$.

Teorema 4:
Sea $u_{\alpha g_{op}} \in K_+$ el estado del sistema continuo asociado al control óptimo $g_{op_\alpha} \in H$ el cual es una solución del problema de control óptimo distribuido continuo (6).

Si para cada $h > 0$, se elige un control óptimo discreto $g_{op_{h\alpha}} \in H$ solución del problema de control óptimo distribuido discreto (15) y su correspondiente estado discreto del sistema $u_{h\alpha\, g_{op_{h\alpha}}} \in K_{+h}$, se obtiene que:

$$u_{h\alpha\, g_{op_{h\alpha}}} \to u_{\alpha g_{op_\alpha}} \;\; in \;\; V \;\; cuando \;\; h \to 0^+, \tag{22}$$

y

$$g_{op_{h\alpha}} \to g_{op_\alpha} \;\; in \;\; H \;\; cuando \;\; h \to 0^+. \tag{23}$$

Teorema 5:
Sean $g \in H$, $q \in Q$ y $h > 0$, entonces

$$\lim_{\alpha\to\infty} \|u_{h\alpha g} - u_{hg}\|_V = 0.$$

Teorema 6:
Si para cada $h > 0$ se elige $g_{op_{h\alpha}} \in H$ una solución del problema de control óptimo $(P_{h\alpha})$ y se considera su respectivo estado discreto $u_{h\alpha\, g_{op_{h\alpha}}} \in K_{+h}$ solución de (13), se obtiene que:

$$u_{h\alpha\, g_{op_{h\alpha}}} \to u_{hf_h} \;\; en \;\; V \;\; cuando \;\; \alpha \to \infty, \tag{24}$$

y

$$g_{op_{h\alpha}} \to f_h \;\; en \;\; H \;\; cuando \;\; \alpha \to \infty. \tag{25}$$

donde $f_h \in H$ es una solución del problema discreto (P_h) y u_{hf_h} es la correspondiente solución la inecuación variacional (13).

Teorema 7:

Si, para cada $h > 0$ se elige $g_{op_{h\alpha}} \in H$ una solución del problema de control óptimo $(P_{h\alpha})$ y se considera su respectivo estado discreto $u_{h\alpha\, g_{op_{h\alpha}}} \in K_{+h}$, el cual es la única solución de (13), se tiene que:

$$u_{h\alpha\, g_{op_{h\alpha}}} \to u_{g_{op}} \;\; en \;\; V \;\; cuando \;\; (h,\alpha) \to (0^+, \infty), \tag{26}$$

y

$$g_{op_{h\alpha}} \to g_{op} \;\; in \;\; H \quad cuando \;\; (h,\alpha) \to (0^+, \infty). \tag{27}$$

donde $g_{op} \in H$ es la solución del problema de control óptimo (P) y $u_{g_{op}}$ su correspondiente estado que es a su vez solución de la inecuación variacional (10).

4. CONCLUSIONES

En conclusión, utilizando los resultados previos dados en (Boukrouche y Tarzia, 2012) y (Olguin y Tarzia, 2015) se obtiene un diagrama conmutativo de convergencias entre los problemas de control óptimo distribuido continuos (P) y (P_α) y entre los dos problemas discretos(P_h) y $(P_{h\alpha})$ cuando $h \to 0$, $\alpha \to \infty$ y $(h,\alpha) \to (0^+, \infty)$. En resumen, lo anterior puede verse en el esquema de la figura 1.

5. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los proyectos PIP No 0543 de CONICET - Univ. Austral, Rosario, Argentina y AFOSR - SOARD Grant FA 9550-14-1-0122.

REFERENCIAS

Ait Hadi K. Optimal control of an obstacle problem: optimality conditions. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 23:325–334, 2008.

Barbu V. *Optimal control of variational inequalities*. Research Notes in Mathematics No 100, Pitman, London, 1984.

Bergounioux M. Optimal control of an obstacle problem. *Applied Mathematics and Optimization*, 36:147–172, 1997.

Boukrouche M. y Tarzia D.A. Convergence of distributed optimal control problems governed by elliptic variational inequalities. *Computational Optimization and Applications*, 53:375–393, 2012.

Brenner S. y Scott L. *The mathematical theory of finite elements*. Springer, Berlin, 2008.

Casas E. y Mateos M. Uniform convergence of the fem, applications to state constrained control problems. *Computational and Applied Mathematics*, 21:67–100, 2002.

Ciarlet P. *The finite element method for elliptic problems*. SIAM, Philadelphia, 2002.

De Los Reyes J.C. y Meyer C. Strong stationarity conditions for a class of optimization problems governed by variational inequalities of the second kind. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 16:375–409, 2016.

Falk R. Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities. *Mathematics of Computation*, 28:963–971, 1974.

Gariboldi C. y Tarzia D.A. Convergence of distribued optimal controls on the internal energy in mixed eliptic problems when the heat transfer coefficient goes to infinity. *Applied Mathematics and Optimization*, 47:213–230, 2003.

Haslinger J. y Roubicek T. Optimal control of variational inequalities, approximation theory and numerical realization. *Applied Mathematics and Optimization*, 14:187–201, 1986.

Hintermuller M. An active-set equality constrained newton solver with feasibility restoration for inverse coefficient problems in elliptic variational inequalities. *Inverse Problems*, 24:034017(23pp), 2008.

Hinze M. *Discrete concepts in PDE constrained optimization, Optimization with PDE Constrained, Chapter 3*. M. Hinze, R.Pinnau, R. Ulbrich, S. Ulbrich, eds., Springer, New York, 2009.

Ito K. y Kunisch K. Optimal control of elliptic variational inequalities. *Applied Mathematics and Optimization*, 41:343–364, 2000.

Kinderhlerer D. y Stampacchia G. *An introduction to variational inequalities and their applications*. Academic Press, New York, 1980.

Lions J. *Contrôle optimal de systemes gouvernes par des equations aux derivees partielles*. Dunod, Paris, 1968.

Meyer C. y Thoma O. A priori finite element error analysis for optimal control of the obstacle problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 51:605–628, 2013.

Mignot F. Control dans les inequations variationelles elliptiques. *Journal of Functional Analysis*, 22:130–185, 1976.

Mignot F. y Puel J. Optimal control in some variational inequalities. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 22:466–476, 1984.

Olguin M. y Tarzia D.A. Numerical analysis of a distributed optimal control problem governed by an elliptic variational inequality. *International Journal of Differential Equations Article ID 407930, 7 pages*, 2015.

Tabacman E. y Tarzia D.A. Sufficient and or necessary condition for the heat transfercoefficient on γ_1 and the heat flux on γ_2 to obtain a steady-state two-phase stefan problem. *Journal of Differential Equations*, 77:16–37, 1989.

Tarzia D.A. Numerical analysis for the heat flux in a mixed elliptic problem to obtain a discrete steady-state two-phase stefan problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33:1257–1265, 1996.

Tarzia D.A. Numerical analysis of a mixed elliptic problem with flux and convective boundary conditions to obtain a discrete solution of non-constant sign. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 15:355–369, 1999.

Troltzsch F. *Optimal control of partial differential equations: Theory, methods and applications*. Amer. Math. Soc., Providence, 2010.

Problem (P_α) **Problem** (P)

$$
\begin{tikzcd}
g_{\alpha_{op}}, u_{\alpha g_{\alpha_{op}}}, J_\alpha(g_{\alpha_{op}}) \arrow[r, "(\alpha \to +\infty)"] & g_{op}, u_{g_{op}}, J(g_{op}) \\
g_{h\alpha_{op}}, u_{h\alpha g_{h\alpha_{op}}}, J_{h\alpha}(g_{h\alpha_{op}}) \arrow[u, "(h \to 0^+)"] \arrow[ur, "(h,\alpha) \to (0,+\infty)"] \arrow[r, "(\alpha \to +\infty)"'] & g_{h_{op}}, u_{hg_{h_{op}}}, J_h(g_{h_{op}}) \arrow[u, "(h \to 0^+)"']
\end{tikzcd}
$$

Problem$(P_{h\alpha})$ **Problem** (P_h)

Figura 1: Esquema que resume las relaciones de convergencia.