

## IDENTIFICACIÓN DE CAVIDADES MEDIANTE OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA EN LA TOMOGRAFÍA DE IMPEDANCIA ELÉCTRICA CON UN FUNCIONAL KOHN-VOGELIUS

Exequiel M. A. Santucho<sup>a</sup>, Antonio Orlando<sup>a</sup> y Mariela Luege<sup>a</sup>

<sup>a</sup>CONICET, Instituto de Estructuras “Arturo M. Guzmán”, FACET, UNT, Av. Independencia 1800, 4000  
S.M. de Tucumán, Argentina, [esantucho@herrera.unt.edu.ar](mailto:esantucho@herrera.unt.edu.ar), [aorlando@herrera.unt.edu.ar](mailto:aorlando@herrera.unt.edu.ar),  
[mluege@herrera.unt.edu.ar](mailto:mluege@herrera.unt.edu.ar), <http://www.herrera.unt.edu.ar/iest>

**Palabras Clave:** problema inverso, identificación de cavidades, tomografía de impedancia eléctrica, derivada topológica.

**Resumen.** La Tomografía de la Impedancia Eléctrica (TIE) posibilita inferir la estructura interna de un cuerpo, si se conocen simultáneamente mediciones de corriente y potencial eléctrico en su contorno exterior. Si se asocian diferentes valores en la función de conductividad eléctrica a diferentes materiales, es posible detectar la presencia de inclusiones o defectos en el medio detectando estos cambios. Este problema inverso es no lineal y mal condicionado en el sentido de Hadamard, lo cual demanda metodologías de reconstrucción robustas. Entre estos métodos se destacan aquellos que emplean la información proveniente de la derivada topológica del funcional de costo que define el problema. Esta derivada es una función escalar que cuantifica la sensibilidad del funcional de costo, cuando se introducen perturbaciones infinitesimales en el dominio original del problema (Novotny y Sokolowski, 2013). Se ha comprobado numéricamente que si se emplea un funcional definido sobre el contorno del cuerpo, la derivada topológica de primer orden presenta limitaciones para encontrar soluciones en zonas alejadas de su periferia (Santucho et al., 2014). En este trabajo se propone el uso de un funcional de costo definido sobre todo el dominio del cuerpo, es decir del tipo Kohn-Vogelius, a fin de superar dicha limitación en la reconstrucción. El problema así definido, se formula como un problema de optimización topológica, determinando la expresión analítica de su derivada con el método llamado *compound asymptotic expansions*. Finalmente, se realizan experimentos numéricos a fin de comprobar la bondad del método para detectar la ubicación y geometría de las cavidades incógnitas.

## 1. INTRODUCCIÓN

La identificación de defectos en materiales empleando técnicas no destructivas de evaluación es un problema interesante para la industria, ensayos de materiales, diagnóstico médico y aplicaciones geofísicas (Eggleston et al., 1990; Parker, 1984; Holder, 1993). En un problema inverso de identificación se busca reconstruir el interior del dominio con información en su contorno. A menudo, este problema es considerado como un problema inverso geométrico como en (Peters y Barra, 2013), donde el contorno de la inclusión en un cuerpo conductor se parametriza con puntos de control y se resuelve con el método Levenberg-Marquardt. El problema de identificación también en modelos que consideran el marco teórico del problema de conducción de calor (Fazeli y Mirzaei, 2012) y de elasticidad lineal (Bonnet y Constantinescu, 2005; Bocharova, 2014).

La Tomografía de Impedancia Eléctrica (TIE) es una técnica de imagen no invasiva que infiere la estructura interna de un cuerpo, detectando los cambios en la conductividad eléctrica mediante mediciones electrostáticas en su contorno. Estas mediciones consisten en la inyección de corriente a través del contorno y la recopilación del potencial eléctrico (o voltaje) generado en los mismos electrodos de inyección. El voltaje inducido es una función altamente no lineal de la distribución de conductividad, es decir, de la estructura interna (Lionheart, 2004). Una amplia variedad de estrategias han sido planteadas para abordar este problema (Borcea, 2002; Cheney et al., 1999), destacando a aquellos en los cuales para reconstruir la función de conductividad, la inversión de los datos voltaje-corriente se consigue mediante un proceso iterativo (Hintermuller y Laurain, 2008; Chung et al., 2005).

Las técnicas iterativas de reconstrucción contrastan las mediciones físicas de voltaje con las mediciones sintéticas generadas por un modelo que asume cierta distribución de conductividad. En cada iteración, la conductividad se actualiza a fin de reducir cierta medida de diferencia entre los dos conjuntos de mediciones. Una consecuencia directa del mal condicionamiento del problema inverso de la TIE, es que el error en la diferencia de las mediciones de voltaje se traslada en grandes errores en la determinación de la distribución de conductividad. Es por eso importante el diseño de metodologías de reconstrucción robustas y estables.

En este trabajo resolvemos el problema de imagen de impedancia mediante un esquema basado en la derivada topológica. Consideramos la presencia de ciertos defectos como cavidades o fisuras, a los que se le asigna un valor de conductividad nulo, de los cuales se debe determinar su geometría y posición. La conductividad del medio se considera homogénea, pudiendo independizarse de dicho valor, normalizándola al valor unitario. La derivada topológica indica la sensibilidad del funcional de costo que se define en el problema de optimización con vínculo (Novotny y Sokolowski, 2013). Los autores del presente trabajo han realizado una propuesta de reconstrucción empleando esta técnica, con un funcional de costo definido sobre el contorno (Santucho et al., 2014). Este funcional contrapone los valores de potencial eléctrico físico y sintético, observando que la detectabilidad de los defectos sólo era aceptable cuando éstos se ubican próximos a la periferia. Es por ello que en este trabajo se propone cambiar el funcional de costo, por uno que brinde mayor estabilidad en la reconstrucción. Para ello se recurre a un funcional de tipo Kohn-Vogelius, el cual viene definido en todo el dominio y contrapone dos soluciones de problema elípticos con condiciones de contorno Dirichlet y Neumann, respectivamente (Kohn y Vogelius, 1984), contando así con más información para minimizar dicho funcional de ajuste. En el trabajo de Novotny et al. (2003) y Feijóo et al. (2003), se obtienen las expresiones de esta derivada para el problema de Poisson con diferentes condiciones de contorno, considerando un funcional de costo arbitrario. Es sabido que la derivada topológica

depende del funcional de costo adoptado, por lo que en el presente trabajo pretendemos mostrar su procedimiento de obtención, siguiendo el método *compound asymptotic expansions* para el funcional de Kohn-Vogelius. A sincero conocimiento de los autores, hasta el momento esto sólo ha sido planteado en el trabajo de Guinzani (2006), aunque con un método alternativo llamado *topology-shape sensitivity method*. Por otra parte, en el trabajo de Amstutz et al. (2005) se plantea la obtención del gradiente topológico mediante expansiones asintóticas para un funcional Kohn-Vogelius, pero para el caso de fisuras. Esta técnica basada en la derivada topológica es usada aquí como técnica de minimización tipo gradiente, pero puede emplearse inicialización para otros métodos iterativos, como por ejemplo el de optimización de formas mediante técnicas level-set (Chung et al., 2005).

En los experimentos numéricos se considera la inyección de un solo patrón de corriente, a través de electrodos distribuidos de forma continua en la periferia del cuerpo. Si bien esto es un caso ideal, puesto que en la realidad el contorno puede no ser accesible en su totalidad, y tampoco representa el tamaño real de electrodos separados cierta distancia, el propósito de este trabajo es estudiar la herramienta numérica para abarcar en un futuro los aspectos prácticos mencionados.

El trabajo está organizado como se describe a continuación. En la sección 2 se define el problema inverso y problema directo involucrados en el contexto de la TIE. En la sección 3 se muestra el procedimiento de cálculo de la derivada topológica mediante la técnica llamada *compound asymptotic expansions*, cuya aplicación se presentan en ejemplos propuestos en la sección 4, comentando los resultados obtenidos. Finalmente, en la sección 5 se presentan las conclusiones y trabajos futuros.

## 2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DE IMPEDANCIA

En el problema de la TIE se intenta reconstruir las propiedades eléctricas del medio, como la conductividad, empleando mediciones simultáneas de voltaje y corriente en el contorno accesible del cuerpo. Se denota el interior del cuerpo con  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto y acotado, simplemente conexo, con contorno  $\partial\Omega$ . El potencial eléctrico  $u = u(x)$  satisface

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma \nabla u &= 0 & \text{en } \Omega \\ \sigma \partial_n u &= f & \text{en } \partial\Omega \\ u &= u_m & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\sigma = \sigma(x)$  es la conductividad eléctrica,  $\partial_n \cdot$  denota la derivada normal,  $f$  la corriente que ingresa al cuerpo y  $u_m$  el potencial eléctrico medido. En el problema anterior,  $f$  debe satisfacer la ley de conservación de la carga eléctrica  $\int_{\partial\Omega} f = 0$ , y si se consideran frecuencias pequeñas o nulas, los efectos magnéticos pueden despreciarse. La derivación de las ecuaciones de Maxwell puede verse con más detalle en (Cheney et al., 1999).

Si se asume la existencia de un número finito de cavidades  $\kappa_i \subset \Omega$ , el problema inverso de identificación consiste en determinar el dominio  $\kappa = \cup_{i=1}^d \kappa_i$ , a partir de la aplicación de la corriente  $f$  y la medición correspondiente del voltaje en el contorno  $u_m$ . Si se considera la aplicación de un único patrón de corriente, una única medición de voltaje, y una conductividad homogénea unitaria en el cuerpo, el problema inverso puede ser formulado como: Dados  $f$  y  $u_m$ , encontrar  $(u, \kappa)$  tal que satisface

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{en } \Omega \setminus \kappa \\ \partial_n u &= f & \text{en } \partial\Omega \\ \partial_n u &= 0 & \text{en } \partial\kappa \\ u &= u_m & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2)$$

Este problema es sobredeterminado en la variable  $u$ , por lo cual puede reescribirse de forma variacional, resultando muy útil para su tratamiento numérico. El problema puede entonces reformularse como un problema de optimización con vínculo, empleando un funcional de tipo Kohn-Vogelius. Para ello se van a introducir dos nuevas funciones de potencial  $u_D$  y  $u_N$ , según resuelvan el problema con condiciones de contorno Dirichlet o Neumann, respectivamente. Es decir, éstas satisfacen

$$\begin{aligned}\Delta u_D &= 0 && \text{en } \Omega \setminus \kappa \\ u_D &= u_m && \text{en } \partial\Omega \\ \partial_n u_D &= 0 && \text{en } \partial\kappa\end{aligned}\quad (3)$$

y

$$\begin{aligned}\Delta u_N &= 0 && \text{en } \Omega \setminus \kappa \\ \partial_n u_N &= f && \text{en } \partial\Omega \\ \partial_n u_N &= 0 && \text{en } \partial\kappa \\ \int_{\Omega} u_N &= 0\end{aligned}\quad (4)$$

Finalmente, el problema de reconstrucción se escribe como: Encontrar  $(u_D, u_N, \kappa)$  tal que minimiza

$$F(\Omega \setminus \kappa) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_D - u_N|^2 \quad (5)$$

sujeto a (3) y (4). Se nota que la integral de (5) se define de forma general en todo el dominio. El problema resultante presenta similitud con el de optimización topológica (Bendsøe y Sigmund, 2003) y de diseño óptimo (Ambrosio et al., 2000).

### 3. RECONSTRUCCIÓN DE LOS DEFECTOS

La determinación del conjunto  $\kappa$  se hace empleando la información brindada por la derivada topológica del funcional de costo definido en  $\Omega$ . La derivada topológica de un funcional  $F$  definido en un dominio  $D$ , mide la sensibilidad cuando se crea en  $D$  una perturbación infinitesimal, ya sea un hueco o una inclusión. Si consideramos una bola de radio  $\varepsilon$  centrada en  $\hat{x}$ ,  $B_{\varepsilon}(\hat{x}) \subset \Omega$  y el dominio  $\Omega_{\varepsilon} = \Omega \setminus B_{\varepsilon}$ , la derivada topológica se define

$$DT(\hat{x}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(\Omega_{\varepsilon}) - F(\Omega)}{\phi(\varepsilon)} \quad (6)$$

donde  $\phi(\varepsilon)$  es una función positiva tal que  $\phi(\varepsilon) \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Esta definición permite escribir la expansión del funcional de costo, definido en el dominio perturbado, de la siguiente manera

$$F(\Omega_{\varepsilon}) = F(\Omega) + \phi(\varepsilon)DT(\hat{x}) + O(\phi(\varepsilon)) \quad (7)$$

Observando la expresión anterior, se nota que la estrategia de minimización se establece fácilmente: el funcional decrece su valor si se remueven del dominio aquellos puntos en los que  $DT(\hat{x}) < 0$ . Inicialmente se calcula la derivada topológica en el dominio completo  $\Omega$ , y luego se establece el conjunto de estimación inicial de defectos,  $\Omega_{\kappa} \in \Omega$ , formado por los puntos en los que la derivada toma valores negativos de valor absoluto grande, tal que  $F(\Omega_{\kappa}) < F(\Omega)$ . Cabe mencionar que la metodología aquí planteada no es reversible, en el sentido que no es posible extraer puntos del conjunto  $\Omega_{\kappa}$ . En caso de inclusiones, sí es factible establecer una actualización reversible, ya que es posible la determinación del valor de la derivada topológica en el interior de  $\Omega_{\kappa}$  (Carpio y Rapún, 2012).

A continuación se determina la expresión analítica que define a la derivada topológica, empleando el método llamado *compound asymptotic expansions* (Mazja et al., 1991). Este método

consiste en asumir una expansión para la variable de estado en el dominio perturbado, cuyos términos deben determinarse adecuadamente. El primer término de dicha expansión es la variable de estado determinada en el dominio original no perturbado, y los términos adicionales son soluciones de problemas elípticos que compensan las discrepancias dejadas en el contorno del cuerpo por la variable de estado no perturbada (Hintermüller et al., 2012). En lo que sigue, la notación  $D^k g(\hat{x})(x - \hat{x})^k$  representa la derivada de orden  $k$  de la función  $g$  en la dirección  $x - \hat{x}$ .

### Problema de Dirichlet

Para la solución del problema (3) perturbado, se supone la siguiente expansión (Novotny y Sokolowski, 2013)

$$u_D^\varepsilon(x) = u_D(x) + U_D(y) + v_D^\varepsilon(x) \quad (8)$$

donde  $y = \varepsilon^{-1}(x - \hat{x})$ . Se supone además que  $u_D$  es armónica en todo  $\Omega$ , por lo que se puede escribir la expansión de Taylor

$$u_D(x) = u_D(\hat{x}) + \nabla u_D(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) + r_D(x) \quad (9)$$

donde el residuo  $r_D(x) = (2!)^{-1} D^2 u_D(\zeta)(x - \hat{x})^2$ ,  $\zeta \in [x, \hat{x}]$ . Haciendo cumplir la condición de contorno  $\partial_n u_D^\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon} = 0$ , y teniendo en cuenta que  $(x - \hat{x})|_{\partial B_\varepsilon} = -\varepsilon n$ , se tiene

$$0 + \nabla u_D(\hat{x}) \cdot n + \partial_n r_D + \partial_n U_D + \partial_n v_D^\varepsilon = 0 \quad (10)$$

Para anular el segundo y cuarto término de (10) entre sí, puede plantearse en particular el siguiente problema

$$\begin{aligned} \Delta_y U_D &= 0 && \text{en } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_\varepsilon} \\ U_D &\rightarrow 0 && \text{en } \infty \\ \partial_n U_D &= -\nabla u_D(\hat{x}) \cdot n && \text{en } \partial B_\varepsilon \end{aligned} \quad (11)$$

cuya solución es (Novotny y Sokolowski, 2013)

$$U_D(x) = \frac{\varepsilon^2}{\|x - \hat{x}\|^2} \nabla u_D(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}). \quad (12)$$

Finalmente, se pueden anular el tercer y quinto término de (10) considerando un problema adicional, cuya solución compense además las discrepancias dejadas por  $U_D$  en  $\partial\Omega$ . Es decir,

$$\begin{aligned} \Delta v_D^\varepsilon &= 0 && \text{en } \Omega_\varepsilon \\ \partial_n v_D^\varepsilon &= -\partial_n r_D && \text{en } \partial B_\varepsilon \\ v_D^\varepsilon &= -U_D && \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

de donde se observa que  $v_D^\varepsilon = O(\varepsilon^2)$ , ya que  $\partial_n r_D|_{\partial B_\varepsilon} = -\varepsilon D^2 u_D(\zeta)(n)^2$ . Finalmente, la expansión se escribe

$$u_D^\varepsilon(x) = u_D(x) + \frac{\varepsilon^2}{\|x - \hat{x}\|^2} \nabla u_D(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) + O(\varepsilon^2) \quad (14)$$

### Problema de Neumann

El procedimiento seguido aquí es análogo al caso anterior, resultando con leves diferencias al tratarse de una expansión de primer orden. Para la solución del problema (4) perturbado, se supone la siguiente expansión (Novotny y Sokolowski, 2013)

$$u_N^\varepsilon(x) = u_N(x) + U_N(y) + v_N^\varepsilon(x) \quad (15)$$

donde  $y = \varepsilon^{-1}(x - \hat{x})$ . Si se considera que  $u_N$  es armónica en todo  $\Omega$ , se puede escribir la expansión de Taylor

$$u_N(x) = u_N(\hat{x}) + \nabla u_N(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) + r_N(x) \quad (16)$$

donde el residuo  $r_N(x) = (2!)^{-1} D^2 u_N(\zeta)(x - \hat{x})^2$ ,  $\zeta \in [x, \hat{x}]$ . Haciendo cumplir la condición de contorno  $\partial_n u_N^\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon} = 0$ , y teniendo en cuenta que  $(x - \hat{x})|_{\partial B_\varepsilon} = -\varepsilon n$ , se tiene

$$0 + \nabla u_N(\hat{x}) \cdot n + \partial_n r_N + \partial_n U_N + \partial_n v_N^\varepsilon = 0 \quad (17)$$

Para anular el segundo y cuarto término de (17), se plantea el siguiente problema

$$\begin{aligned} \Delta_y U_N &= 0 && \text{en } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_\varepsilon} \\ U_N &\rightarrow 0 && \text{en } \infty \\ \partial_n U_N &= -\nabla u_N(\hat{x}) \cdot n && \text{en } \partial B_\varepsilon \end{aligned} \quad (18)$$

cuya solución es (Novotny y Sokolowski, 2013)

$$U_N(x) = \frac{\varepsilon^2}{\|x - \hat{x}\|^2} \nabla u_N(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}). \quad (19)$$

Finalmente, se considera un problema adicional para anular los términos restantes de (17) junto con las discrepancias dejadas por la derivada normal de  $U_N$  en  $\partial\Omega$ . Este problema se escribe

$$\begin{aligned} \Delta v_N^\varepsilon &= 0 && \text{en } \Omega_\varepsilon \\ \partial_n v_N^\varepsilon &= -\partial_n r_N && \text{en } \partial B_\varepsilon \\ \partial_n v_N^\varepsilon &= -\partial_n U_N && \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \quad (20)$$

donde  $r_N|_{\partial B_\varepsilon} = -\varepsilon D^2 u_N(\zeta)(n)^2$  y

$$\partial_n U_N|_{\partial\Omega} = \frac{\varepsilon^2}{\|x - \hat{x}\|^2} \left[ \nabla u_N(\hat{x}) \cdot n - \frac{2}{\|x - \hat{x}\|^2} ((x - \hat{x}) \cdot n) (\nabla u_N(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x})) \right]$$

Como puede observarse, la solución del problema anterior no es única, pero puede definirse unívocamente empleando la condición de normalización para  $u_N$  y  $u_N^\varepsilon$ . Se descompone dicha solución en dos términos  $v_N^\varepsilon = \tilde{v}_N^\varepsilon + \mu^\varepsilon$ , donde  $\tilde{v}_N^\varepsilon$  es única y satisface la condición de normalización en  $\Omega$ , y  $\mu^\varepsilon$  es la constante a determinar (Hintermüller et al., 2012). Empleando dicha condición, se puede escribir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega u_N^\varepsilon = \int_\Omega (u_N + U_N + \tilde{v}_N^\varepsilon + \mu^\varepsilon) \\ \Rightarrow \mu^\varepsilon &= \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega U_N \end{aligned} \quad (21)$$

De esta forma, se puede demostrar que  $v_N^\varepsilon = O(\varepsilon^2)$ . Finalmente, la expansión se escribe

$$u_N^\varepsilon(x) = u_N(x) + \frac{\varepsilon^2}{\|x - \hat{x}\|^2} \nabla u(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) + O(\varepsilon^2) \quad (22)$$

### Expansión asintótica del funcional de costo

Reemplazando estas soluciones en el funcional de costo (5) definido en el dominio perturbado, se tiene

$$\begin{aligned}
 F(\Omega \setminus B_\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_D^\varepsilon - u_N^\varepsilon|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_D - u_N|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} 2(u_D - u_N)(U_D - U_N + v_D^\varepsilon - v_N^\varepsilon) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (U_D - U_N + v_D^\varepsilon - v_N^\varepsilon)^2 \\
 &= F(\Omega) + \int_{\Omega} (u_D - u_N)(U_D - U_N + v_D^\varepsilon - v_N^\varepsilon) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (U_D - U_N + v_D^\varepsilon - v_N^\varepsilon)^2
 \end{aligned} \tag{23}$$

Para poder calcular estas integrales de la forma  $\int_{\Omega} (u_D - u_N)\omega_D$  en (23), se introduce el siguiente problema adjunto

$$\begin{aligned}
 \Delta p_D &= u_D - u_N & \text{en } \Omega \\
 p_D &= 0 & \text{en } \partial\Omega
 \end{aligned} \tag{24}$$

Se observa que las integrales anteriores pueden reescribirse en  $\Omega \setminus B_\varepsilon$  debido al dominio de definición de las funciones que intervienen en el integrando. De esta manera, escribiendo en forma débil el primer miembro de la ecuación de Poisson del problema adjunto, y usando el Teorema de Green, queda

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \Delta p_D \omega_D &= - \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \nabla p_D \cdot \nabla \omega_D + \int_{\partial\Omega \setminus \partial B_\varepsilon} \omega_D \partial_n p_D \\
 &= \int_{\partial B_\varepsilon} \omega_D \partial_n p_D + O(\varepsilon^2)
 \end{aligned} \tag{25}$$

Para obtener el resultado anterior, se emplea que  $\omega_D = O(\varepsilon^2)$  en la lejanía de  $\partial B_\varepsilon$ .

- Para  $\omega_D = U_D$ , sabiendo que  $U_D|_{B_\varepsilon} = -\varepsilon \nabla u_D \cdot n$ , se escribe

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \Delta p_D U_D &= \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} (u_D - u_N) U_D = \int_{\partial B_\varepsilon} U_D \partial_n p_D + O(\varepsilon^2) \\
 &= \int_{\partial B_\varepsilon} U_D (\nabla p_D \cdot n) + O(\varepsilon^2) \\
 &= -\varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} (\nabla u_D \cdot n) (\nabla p_D \cdot n) + O(\varepsilon^2) \\
 &= -|B_\varepsilon| \nabla u_D \cdot \nabla p_D + O(\varepsilon^2)
 \end{aligned} \tag{26}$$

Para poder calcular estas integrales de la forma  $\int_{\Omega} (u_D - u_N)\omega_N$  en (23), se introduce el siguiente problema adjunto

$$\begin{aligned}
 \Delta p_N &= -(u_D - u_N) + c & \text{en } \Omega \\
 \partial_n p_N &= 0 & \text{en } \partial\Omega \\
 \int_{\partial\Omega} p_N &= 0
 \end{aligned} \tag{27}$$

siempre que  $\int_{\Omega} c \omega = 0$ , para todo  $\omega$  perteneciente a algún espacio adecuado. La constante  $c$  se introduce para satisfacer la condición de compatibilidad del problema. De hecho, el problema

original tiene solución única a diferencia de una constante. Para determinar el valor de  $c$  se emplea el Teorema de la Divergencia, haciendo cumplir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta p_N &= \int_{\partial\Omega} \partial_n p_N \\ - \int_{\Omega} (u_D - u_N) + c &= 0 \\ \Rightarrow c &= \frac{1}{|\Omega|} \left[ \int_{\Omega} u_D + \int_{\Omega} u_N \right] \end{aligned} \quad (28)$$

sabiendo que  $\int_{\Omega} u_N = 0$ , queda

$$c = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_D \quad (29)$$

Considerando que  $\omega_N = O(\varepsilon^2)$  en la lejanía de  $\partial B_\varepsilon$ , reescribiendo las integrales en  $\Omega \setminus B_\varepsilon$  y empleando el Teorema de Green, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \Delta p_N \omega_N &= - \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \nabla p_N \cdot \nabla \omega_N + \int_{\partial\Omega \setminus \partial B_\varepsilon} \omega_N \partial_n p_N \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon} \omega_N \partial_n p_N + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (30)$$

- Para  $\omega_N = U_N$ , sabiendo que  $U_N|_{B_\varepsilon} = -\varepsilon \nabla u_N \cdot n$ , se escribe

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} \Delta p_N U_N &= \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon} (u_D - u_N) U_N = \int_{\partial B_\varepsilon} U_N \partial_n p_N + O(\varepsilon^2) \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon} U_N (\nabla p_N \cdot n) + O(\varepsilon^2) \\ &= -\varepsilon \int_{\partial B_\varepsilon} (\nabla u_N \cdot n) (\nabla p_N \cdot n) + O(\varepsilon^2) \\ &= -|B_\varepsilon| \nabla u_N \cdot \nabla p_N + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (31)$$

- Para  $\omega_D = v_D^\varepsilon$  y  $\omega_N = v_N^\varepsilon$ , se observa que las integrales intervinientes resultan de orden  $O(\varepsilon^2)$ .

Finalmente, la expansión funcional (23) queda

$$F(\Omega \setminus B_\varepsilon) = F(\Omega) + |B_\varepsilon| (-\nabla u_D \cdot \nabla p_D - \nabla u_N \cdot \nabla p_N) + O(\varepsilon^2) \quad (32)$$

donde  $|B_\varepsilon| = \pi \varepsilon^2$  y la expresión de la derivada topológica es

$$DT(x) = -(\nabla u_D \cdot \nabla p_D + \nabla u_N \cdot \nabla p_N) \quad (33)$$

Este último resultado puede contrastarse con el trabajo de [Guinzani \(2006\)](#), quien obtiene una expresión similar para la derivada topológica en el problema inverso de conductividad, empleando el llamado *topological-shape sensitivity method*.

#### 4. ALGORITMO Y EJEMPLOS NUMÉRICOS

Esta sección tiene como objetivo mostrar el esquema numérico de reconstrucción empleando el resultado obtenido en la sección anterior. Se llevan a cabo ejemplos numéricos en los cuales



se busca determinar la posición y geometría de ciertos defectos inmersos en un medio conductor, con datos de corriente y potencial obtenidos del problema directo. Basados en la expansión del funcional de costo definido sobre el dominio perturbado (7), se nota que si se extraen del dominio original aquellos puntos con valores negativos y de gran valor absoluto en la derivada topológica, el valor funcional decrece y la solución se aproxima en cada iteración. Es decir, el algoritmo consiste en

1. Elección dominio inicial  $\Omega_0$  y umbral de actualización  $\delta > 0$ .
2. Repetir
  - 2.1. Cálculo  $u_D^k$ ,  $u_N^k$ ,  $p_D^k$  y  $p_N^k$  definidos en  $\Omega_k$ .
  - 2.2. Cálculo de la derivada topológica.
  - 2.3. Definición de nuevo dominio  $\Omega_{k+1} = \Omega_k \setminus \kappa_k$ , donde  $\kappa_k = \{x \in \Omega_k : DT(x) \leq -\delta\}$ .
  - 2.4. Comprobar valor funcional.
  - 2.5.  $k \leftarrow k + 1$ .

A continuación se presentan los experimentos numéricos que muestran las bondades del método de reconstrucción propuesto. La resolución de los problemas de valores de contorno se hace con el método de elementos finitos, empleando mallas de elementos triangulares lineales. En las figuras (1) a (3) un círculo de radio unitario y en las figuras (4) a (6) el cuadrado posee lado unitario. Los datos de entrada para el problema inverso se obtienen resolviendo el problema directo con la cavidad prescrita. Sobre el contorno del cuerpo se inyecta una señal de corriente sin ruido, a través de electrodos distribuidos uniformemente. El patrón que se emplea corresponde a una onda senoidal de período  $2\pi$ , definido en una variable paramétrica que describe el contorno del cuerpo. En la etapa de reconstrucción propiamente dicha, el umbral de actualización de dominio  $\delta$ , se determina con  $\delta = \eta |\min(DT(\hat{x}))|$ , donde  $\eta$  se toma igual a 0.9, y permanece fijo durante todo el proceso iterativo. El criterio de detención considera el valor del funcional de costo, estableciendo para estos ejemplos un valor aceptable igual a  $1 \times 10^{-4}$ .

Los resultados obtenidos pueden observarse en las figuras (4(b)) a (6(b)), los cuales muestran los valores de la derivada topológica en la primera iteración. En las figuras (1) y (2) el defecto consiste en una fisura con ubicación y orientación diferente, mientras que en la figura (3) el defecto es una cavidad circular. En la figura (4) se muestra la reconstrucción de un defecto circular empleando una malla de elementos finitos mucho menos densa que la empleada en figura (5). En la figura (6(b)) se observa la presencia de mínimos espúreos en las zonas del contorno del dominio. Para corregir esto, se emplea la idea de la derivada topológica con función de peso (Guinzani, 2006), que consiste en

$$DT^\psi(x) = \psi DT(x) \quad (34)$$

donde  $\psi$  es una función escogida convenientemente, para establecer el interior del dominio como región factible. En este caso se considera

$$\psi(x, y) = \text{sen} \left( \frac{\pi x}{l_x} \right) \text{sen} \left( \frac{\pi y}{l_y} \right) \quad (35)$$

La elección de la función de peso conlleva a asumir información *a priori* en la ubicación de los defectos, en este caso, que éstos no se encuentran en la periferia del cuerpo. Las funciones de peso, pueden ser escogidas siguiendo los lineamientos de los métodos de barrera, en el marco de la optimización convexa clásica. La solución bajo estas consideraciones, se puede ver en (6(c)).

Se observa que el método propuesto reconstruye de manera aceptable la ubicación de las cavidades, en coincidencia con los valores mínimos de la derivada. Sin embargo, se debe notar que la geometría no queda aún bien definida, debido al salto de valores de la derivada en la zona del defecto, lo cual complica en cierta manera la actualización del dominio para ingresar a la siguiente iteración. Se ha comprobado numéricamente que la ubicación y geometría inicial del defecto, condiciona el resultado final de manera considerable. Con todo esto, el empleo de un funcional de tipo Kohn-Vogelius, otorga mejores resultados de ubicación y geometría con respecto a un funcional definido sobre el contorno del cuerpo, como es el caso empleado en (Santucho et al., 2014). En este último trabajo, se reconstruyen los defectos de forma aceptable sólo cuando éstos se encuentran próximos al contorno. El empleo de más información en la derivada topológica, recurriendo, por ejemplo, a expansiones de orden superior, garantizan mejorar sustancialmente la calidad de reconstrucción (Hintermüller et al., 2012). Esto último, complementado con técnicas clásicas de optimización de formas, resultan en algoritmos de reconstrucción robustos. Sin embargo, la naturaleza mal condicionada en este tipo de problemas, y sus dificultades propias relacionadas con la inestabilidad numérica, selección de patrones óptimos de corriente, etc., siguen presentes (Sigmund y Petersson, 1998; Paulson et al., 2012).



Figura 1: (a) Cuerpo original; (b) derivada topológica. Valor de funcional de costo  $3,24 \times 10^{-5}$ .

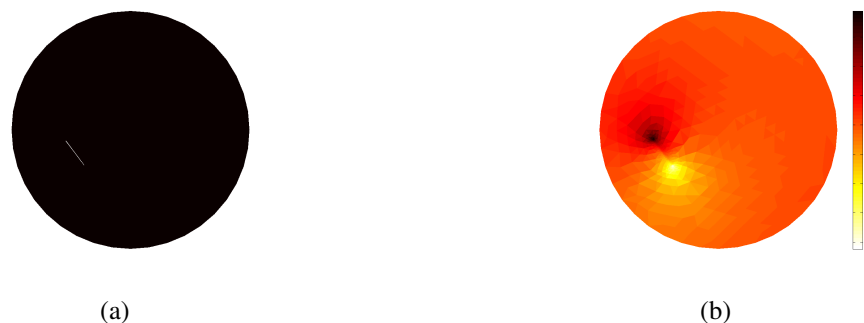


Figura 2: (a) Cuerpo original; (b) derivada topológica. Valor de funcional de costo  $1,19 \times 10^{-5}$ .

## 5. CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha presentado una metodología de reconstrucción de cavidades, empleando la información brindada por la derivada topológica de primer orden de un funcional de costo de tipo Kohn-Vogelius, en el contexto del problema de la Tomografía de Impedancia Eléctrica



Figura 3: (a) Cuerpo original; (b) derivada topológica. Valor de funcional de costo  $1,24 \times 10^{-5}$ .



Figura 4: (a) Cuerpo original; (b) derivada topológica. Valor de funcional de costo  $1,01 \times 10^{-6}$ .



Figura 5: (a) Cuerpo original; (b) derivada topológica. Valor de funcional de costo  $1,29 \times 10^{-6}$ .

(TIE). Se ha descrito el concepto de derivada topológica, su forma de obtención siguiendo el método *compound asymptotic expansions*, y su aplicación numérica en varios ejemplos, a fin de observar su desempeño. Los ejemplos propuestos consideran diferentes geometrías en el cuerpo analizado, variando también las formas y posiciones de los defectos interiores. Se considera una distribución uniforme de electrodos en el contorno, a través de los cuales ingresa la señal (sin ruido) de la corriente eléctrica, definida por un patrón de tipo trigonométrico. En uno de los ejemplos, se incorpora el concepto de derivada topológica con funciones de peso, que establece el interior del dominio como región factible, en analogía a los métodos clásicos de barrera. Los resultados obtenidos muestran que el método de tipo gradiente basado en la derivada topológica, constituye una metodología válida para resolver el problema de identificación. Debido al mal condicionamiento y la alta no linealidad, propios del problema inverso de la TIE, se nota

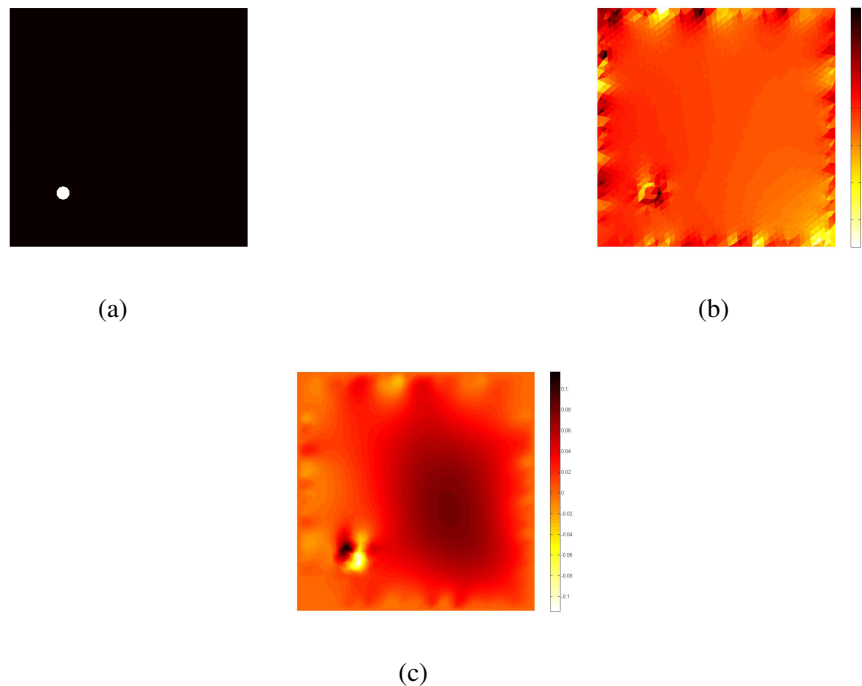


Figura 6: (a) Cuerpo original; (b) derivada topológica; (c) derivada topológica con función de peso. Valor de funcional de costo  $9,17 \times 10^{-4}$ .

que la solución del problema se ve fuertemente influenciada por la estimación inicial de los defectos. Una manera de superar esta limitación, consiste en emplear derivadas topológicas de orden superior, combinadas con técnicas clásicas de optimización de formas.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido soportado financieramente por CONICET, y Proyecto CIUNT 26/E527.

## REFERENCIAS

- Ambrosio L., Fusco N., y Pallara D. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford University Press, 2000.
- Amstutz A., Horchani I., y Masmoudi M. Crack detection by the topological gradient method. *Control and Cybernetics*, 34(1):81–101, 2005.
- Bendsøe M. y Sigmund O. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer Verlag, Berlin, Germany, 2003.
- Bocharova O. On inverse problem of identification the cavity in the elastic cylinder. *Journal of Physics Conference Series*, 490(1), 2014.
- Bonnet M. y Constantinescu A. Inverse problems in elasticity. *Inverse Problems*, 21:R1–R50, 2005.
- Borcea L. Electrical Impedance Tomography. *Inverse Problems*, 18:99–136, 2002.
- Carpio A.A. y Rapún M.L. Hybrid topological derivative and gradient-based methods for electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, 28, 2012.
- Cheney M., Isaacson D., y Newell J.C. Electrical Impedance Tomography. *SIAM*, 41:85–101, 1999.
- Chung E., Chan T., y Tai X.C. Electrical Impedance Tomography using level set representation and total variational regularization. *J. Comput. Phys.*, 205:357–372, 2005.

- Eggleston M.R., Schwabe R.J., Isaacson D., y Coffin L.F. The Application of Electric Current Computed Tomography to Defect Imaging in Metals. *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, páginas 455–462, 1990.
- Fazeli H. y Mirzaei M. Shape identification problems on detecting of defects in a solid body using inverse heat conduction approach. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 26(11):3681–3690, 2012.
- Feijóo R.A., Novotny A.A., Taroco E., y Padra C. The topological derivative for the Poisson problem. *Mathematical models and methods in applied sciences*, 13:1825–1844, 2003.
- Guinzani F.T. *Análise de sensibilidade topológica aplicada em problema inverso de condutividade*. Tesis de Maestría, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC - Brasil, 2006.
- Hintermüller M., Laurain A., y Novotny A.A. Second-order topological expansion for electrical impedance tomography. *Advances in Computational Mathematics*, 36(2):235–265, 2012.
- Hintermüller M. y Laurain A. Electrical impedance tomography: from topology to shape. *Control and Cybernetics*, Vol. 37, no 4:913–933, 2008.
- Holder D. *Clinical and Physiological Applications of Electrical Impedance Tomography*. UCL Press, 1993.
- Kohn R. y Vogelius M. Determining conductivity by boundary measurements. *Commun. Pure Appl. Math.*, 37:289–298, 1984.
- Lionheart W. EIT reconstruction algorithms: pitfalls, challenges and recent developments. *Physiological Measurement*, 25:125–142, 2004.
- Mazja W.G., Nasarow S.A., y Plamenewski B.A. Asymptotische theorie elliptischer randwertaufgaben in singular gestörten gebieten. i. in: *Mathematische lehrbücher und monographien. ii. abteilung: Mathematische monographien 82*). Akademie, Berlin, 1991.
- Novotny A.A., A. F.R., Taroco E., y Padra C. Topological sensitivity analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192:1219–1229, 2003.
- Novotny A.A. y Sokolowski J. *Topological Derivatives in Shape Optimization*. Springer, 2013.
- Parker R.L. The inverse problem of resistivity sounding. *Geophysics*, 49:2143–2158, 1984.
- Paulson K., Lionheart W., y Pidcock M. Optimal experiments in electrical impedance tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 12(4):681–686, 2012.
- Peters F.C. y Barra L.P.S. An inverse geometric problem: Position and shape identification of inclusions in a conductor domain. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37:1392–1400, 2013.
- Santucho E., Orlando A., y Luege M. Observaciones acerca de la aplicación de la derivada topológica en la identificación de cavidades mediante la Tomografía de Impedancia Eléctrica. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, XXXIII:2037–2050, 2014.
- Sigmund P. y Petersson J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*, 16:68–75, 1998.