

## OPTIMIZACIÓN DE VIBRACIÓN Y PANDEO DE VIGAS COMPUESTAS LAMINADAS DE SECCIÓN ARBITRARIA

Víctor H. Cortínez<sup>a,b,c</sup> y Patricia N. Dominguez<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> *Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional,  
11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, e-mail: [vcortine@frbb.utm.edu.ar](mailto:vcortine@frbb.utm.edu.ar)*

<sup>b</sup> *Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Alem 1253, 8000 Bahía Blanca,  
Argentina, e-mail: [pdoming@uns.edu.ar](mailto:pdoming@uns.edu.ar)*

<sup>c</sup> *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

**Palabras clave:** Vigas de sección arbitraria, diseño óptimo, efecto de corte, alabeo torsional no uniforme.

**Resumen.** Se presenta un enfoque de diseño óptimo de vigas de sección completamente arbitraria (abiertas, cerradas o semi-cerradas, multicelulares, de paredes delgadas, macizas o combinación de las mismas). Se considera que las vigas pueden estar constituidas con materiales isótropos o compuestos laminados (PRF) del tipo especialmente ortótropo o simétrico balanceado.

Las variables de diseño corresponden a las dimensiones de la sección y la arquitectura de laminación en el caso de paredes PRF. Como objetivos de diseño se plantean especialmente la maximización de la frecuencia fundamental de vibración y la maximización de la carga de pandeo. Asimismo se consideran restricciones geométricas y otras asociadas a la falla estructural.

Para modelar el comportamiento estructural se hace uso de una generalización de la teoría de Timoshenko-Vlasov para vigas PRF que tiene en cuenta efectos de corte por flexión y por torsión no uniforme en secciones completamente arbitrarias. El enfoque se basa en el empleo del Método de Elementos Finitos para realizar el análisis seccional y longitudinal en combinación con un método de optimización aleatoria. Se presentan algunos resultados numéricos.

## 1 INTRODUCCIÓN

Diversos sistemas de la ingeniería actual hacen uso de elementos estructurales tipo viga con secciones transversales arbitrarias. Con miras al ahorro de material, es común la utilización de vigas de paredes delgadas, en muchos casos construidas con materiales compuestos laminados, ya que estos últimos presentan una alta relación entre rigidez y resistencia con respecto al peso. Para diseñar adecuadamente tales elementos debe procurarse que puedan soportar las diferentes cargas involucradas, tanto desde el punto de vista de la resistencia como también de la rigidez. De acuerdo a la finalidad de la estructura los objetivos fundamentales del diseño pueden cambiar. Por ejemplo, es posible perseguir alguno de los siguientes objetivos: a) la maximización de la carga de pandeo, ya que representa muchas veces el modo de falla fundamental en este tipo de estructuras, b) la maximización de la frecuencia fundamental de vibración, puesto que tal criterio trata de aumentar la seguridad frente a acciones dinámicas inciertas, o c) la minimización de la sección de la estructura con miras a disminuir el costo. En cualquier caso deben verificarse restricciones de seguridad respecto a la falla estructural debida tanto a resistencia del material, inestabilidad o excesivos desplazamientos.

La manera apropiada de diseñar las dimensiones de la sección transversal es a partir del concepto de optimización matemática, es decir mediante un algoritmo que busque automáticamente tales variables procurando optimizar la función objetivo y al mismo tiempo verificar las restricciones. Además, tal algoritmo debería ser veloz desde el punto de vista computacional.

Diversos estudios han sido realizados con el propósito de presentar enfoques de diseño óptimo en vigas de secciones complejas, en particular considerando paredes delgadas, construidas con materiales isótropos o compuestos. Karim y Adeli (1999) han presentado un enfoque de diseño óptimo global de vigas metálicas en forma de sombrero bajo cargas distribuidas uniformemente utilizando el método de redes neuronales. Magnucki y Monczak (2000) han analizado un problema de optimización paramétrica de vigas abiertas de pared delgada mono simétricas considerando restricciones de estabilidad. Lee et al. (2005) consideraron el diseño óptimo de vigas canal de acero conformadas en frío, usando un algoritmo microgenético. Magnucki y Paczos (2009) analizaron la optimización de las dimensiones de vigas de paredes delgadas, con alas plegadas, en flexión pura. Recientemente, Nguyen et al. (2015) propusieron un enfoque de diseño óptimo en vigas compuestas de pared delgada bisimétricas procurando maximizar una carga de compresión que produzca el pandeo flexo-torsional. Posteriormente extendieron la metodología para diseñar vigas de sección canal, compuestas laminadas, con el propósito de maximizar la carga de pandeo lateral o la frecuencia natural de vibración (2016). Reguera y Cortínez (2016) han propuesto un enfoque de diseño óptimo de vigas de paredes delgadas compuestas procurando al mismo tiempo maximizar la carga de pandeo y minimizar el peso de la estructura.

Los trabajos previamente citados consideran formas particulares de secciones de vigas, formas genéricas de vigas de secciones abiertas de pared delgada o secciones cerradas de celda simple (Cortínez y Piovan, 2002). Sin embargo, existen varias aplicaciones en ingeniería que utilizan vigas que presentan secciones transversales de mayor complejidad tales como secciones de pared delgada semicerradas, cerradas multi-celulares o combinaciones de paredes delgadas con porciones macizas. En este sentido, más recientemente se han desarrollado modelos generalizados introduciendo un mayor número de funciones incógnitas. Así, Pagani et al. (2016) han empleado un modelo de estas características considerando una gran cantidad de funciones polinómicas para definir el alabeo. Por su parte, Prokic et al. (2002) han discretizado la sección transversal de una viga

isótropa en varias funciones longitudinales por cada nodo.

En un esfuerzo por mejorar la descripción del alabeo seccional sin aumentar considerablemente el número de funciones incógnitas, Dikaros et al. (2016) han desarrollado para estructuras isótropas, en forma reciente, una teoría muy eficiente que puede modelar efectos de flexibilidad por corte, utilizando diez desplazamientos generalizados unidimensionales, requiriendo resolver siete problemas de contorno bidimensionales para efectuar el correspondiente análisis seccional. En general, para el uso de tales modelos de vigas con alabeo generalizado deben elaborarse métodos numéricos específicos que no están incorporados en los programas de uso común. Recientemente, Cortínez et al. (2016) han desarrollado una extensión de la teoría de Timoshenko-Vlasov para analizar la dinámica de vigas de sección transversal arbitraria, construidas con materiales isótropos no homogéneos, considerando efectos acoplados de torsión, flexión, tracción, alabeo torsional no uniforme y efectos de corte asociados. De igual manera que la teoría Timoshenko-Vlasov clásica, las incógnitas cinemáticas unidimensionales son siete: tres desplazamientos generalizados (axial y transversales), dos giros flexionales, un giro torsional y una medida del alabeo no uniforme. Sin embargo, el análisis seccional permite obtener ecuaciones constitutivas más precisas entre resultantes de tensión y deformaciones generalizadas (extendiendo el concepto de factores de corte) y también fórmulas mejoradas para el cálculo de tensiones de corte y normales (considerando efecto “shear-lag”). Se basa en la utilización de funciones de alabeo bidimensionales generalizando la teoría de flexión y torsión de Saint Venant para secciones no homogéneas en conjunto con el principio de Hellinger-Reissner.

En este trabajo se presenta una extensión del modelo estructural aludido para contemplar la existencia de paredes delgadas compuestas laminadas PRF del tipo especialmente ortótropas o simétricas balanceadas. Adicionalmente, se considera la existencia de un estado de tensiones iniciales. Con la ayuda de este modelo se desarrolla un enfoque de diseño óptimo de vigas de paredes delgadas de sección arbitraria considerando restricciones de resistencia del material, estabilidad elástica y desplazamientos máximos. Las variables de diseño corresponden a las dimensiones de la sección y la arquitectura de laminación en el caso de paredes PRF. Como objetivos de diseño se plantean especialmente la maximización de la frecuencia fundamental de vibración y la maximización de la carga de pandeo. El enfoque se basa en una solución de Elementos Finitos de las ecuaciones gobernantes del modelo estructural en combinación con la técnica de Recocido Simulado para la búsqueda de las variables de diseño óptimas. Se presentan algunos ejemplos numéricos para mostrar la eficiencia del enfoque propuesto.

Este modelo constituye una generalización de los trabajos de Cortínez y Dominguez (2017) y Dominguez et al. (2017).

## 2 MODELO ESTRUCTURAL

Se considera la dinámica del sistema estructural mostrado en la Figura 1. Se asume que la estructura está sometida a un estado de cargas arbitrario y también a un estado inicial de tensiones normales. Se trata de vigas no homogéneas de sección transversal completamente arbitraria (abiertas, cerradas o semi-cerradas, multicelulares, de paredes delgadas, macizas o combinación de las mismas). Además, las vigas pueden contemplar la existencia de paredes delgadas constituidas con materiales compuestos laminados (PRF) del tipo especialmente ortótropo o simétrico balanceado

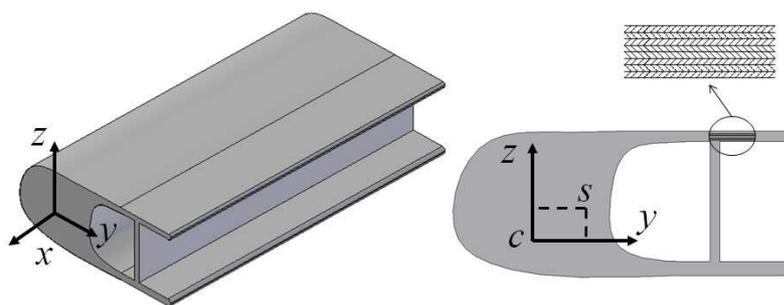


Figura 1: elemento correspondiente al modelo estructural.

## 2.1 Vigas construidas con materiales isotrópicos

Se considera, en primer lugar, el desarrollo teórico correspondiente a una viga no homogénea construida con material isotrópico. Dicho enfoque fue propuesto por los autores en Cortínez et al. (2016). A continuación se presenta un resumen del desarrollo correspondiente aunque considerando adicionalmente un estado de tensiones iniciales  $\sigma_0$ .

### 2.1.1 Formulación variacional

La dinámica del sistema estructural analizado puede formularse mediante el principio de Hellinger-Reissner:

$$\int_V \left( \sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w \right) dV + \int_V \sigma_0 \delta \eta_x dV + \int_S \left( T_x \delta u + T_y \delta v + T_z \delta w \right) dS = 0 \quad (1)$$

$$\int_V \left( \left( \varepsilon_x - \frac{\sigma_x}{E} \right) \delta \sigma_x + \left( \gamma_{xy} - \frac{\tau_{xy}}{G} \right) \delta \tau_{xy} + \left( \gamma_{xz} - \frac{\tau_{xz}}{G} \right) \delta \tau_{xz} \right) dV = 0 \quad (2)$$

donde  $E(y, z)$  y  $G(y, z)$  son los coeficientes elásticos,  $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  son las componentes no nulas de tensiones incrementales,  $\sigma_0$  es la tensión normal inicial,  $\varepsilon_x$  es la deformación longitudinal (lineal) específica,  $\gamma_{xy}$  y  $\gamma_{xz}$  son las deformaciones cortantes (lineales),  $\eta_x$  es la componente de deformación longitudinal no lineal (Green-Lagrange),  $u, v$  y  $w$  son los desplazamientos en las direcciones  $x, y$  y  $z$  respectivamente,  $f_x, f_y, f_z$  son las componentes de las fuerzas volumétricas (incluidas las fuerzas de inercia), y  $T_x, T_y, T_z$  son las componentes del vector de tensión en la superficie. En las expresiones anteriores, se han utilizado la hipótesis usual de la teoría de vigas:  $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$ . La ecuación (1) constituye el Principio de los Trabajos Virtuales mientras que la expresión (2) es una ecuación variacional de compatibilidad para materiales isotrópicos elásticos.

### 2.1.2 Aproximación cinemática

En la teoría de Timoshenko-Vlasov el campo de desplazamientos de la estructura analizada puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 u &\equiv u_0(x,t) - \theta_z(x,t)y - \theta_y(x,t)z + \theta(x,t)\omega(y,z) \\
 v &\equiv v_s(x,t) - \tilde{z}\phi(x,t) \\
 w &\equiv w_s(x,t) + \tilde{y}\phi(x,t)
 \end{aligned} \tag{3}$$

donde  $u_0$  es el desplazamiento axial del centro elástico  $C$ ,  $v_s$  y  $w_s$  son los desplazamientos transversales del centro de corte elástico  $S$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  son rotaciones flexionales,  $\phi$  es la rotación torsional y  $\theta$  es una medida del alabeo torsional no uniforme. Por otra parte,  $\omega$  es la función de alabeo torsional de Saint Venant para vigas no homogéneas. Se puede demostrar que la función de alabeo torsional así definida verifica las siguientes relaciones de ortogonalidad:

$$\int_A E\omega dA = \int_A E\omega y dA = \int_A E\omega z dA = 0.$$

A partir de tales expresiones cinemáticas es posible obtener las componentes del tensor de deformación  $\varepsilon_x, \eta_x, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}$ . Debe observarse que las expresiones para las deformaciones cortantes tienen valores no nulos, a diferencia de la teoría de Vlasov. Es decir, se está tomando en cuenta la deformabilidad de corte.

### 2.1.3 Ecuaciones de movimiento

Reemplazando las deformaciones específicas obtenidas en la sección anterior en la ecuación (1), integrando en la sección transversal y aplicando cálculo variacional se llega a las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial N}{\partial x} + \overline{\rho A} \ddot{u}_0 - \ddot{\theta}_y \overline{\rho S_y} - \ddot{\theta}_z \overline{\rho S_z} + \ddot{\theta} \overline{\rho S_\omega} &= q_x \\
 \frac{\partial M_z}{\partial x} - Q_y - \ddot{u}_0 \overline{\rho S_z} + \overline{\rho I_z} \ddot{\theta}_z + \overline{\rho I_{yz}} \ddot{\theta}_y - \ddot{\theta} \overline{\rho S_{\omega y}} &= -m_z \\
 \frac{\partial M_y}{\partial x} - Q_z - \ddot{u}_0 \overline{\rho S_y} + \overline{\rho I_y} \ddot{\theta}_y + \overline{\rho I_{yz}} \ddot{\theta}_z - \ddot{\theta} \overline{\rho S_{\omega z}} &= -m_y \\
 -\frac{\partial Q_y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( N_0 \frac{\partial v}{\partial x} - (M_{y0} - z_s N_0) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + (\ddot{v}_s \overline{\rho A} - \ddot{\phi} \overline{\rho S_{\tilde{y}}}) &= q_y \\
 -\frac{\partial Q_z}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( N_0 \frac{\partial w}{\partial x} + (M_{z0} - y_s N_0) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + (\ddot{w}_s \overline{\rho A} + \ddot{\phi} \overline{\rho S_{\tilde{z}}}) &= q_z \\
 -\frac{\partial B}{\partial x} - T_w + \ddot{u}_0 \overline{\rho S_\omega} - \ddot{\theta}_y \overline{\rho S_{\omega z}} - \ddot{\theta}_z \overline{\rho S_{\omega y}} + \overline{\rho C_w} \ddot{\theta} &= b \\
 -\frac{\partial (T_{sv} + T_w)}{\partial x} - \ddot{v}_s \overline{\rho S_{\tilde{y}}} + \ddot{w}_s \overline{\rho S_{\tilde{z}}} + \overline{\rho I_s} \ddot{\phi} + \\
 -\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} (M_{y0} - z_s N_0) + \frac{\partial w}{\partial x} (M_{z0} - y_s N_0) + (N_0 I_1 + M_{y0} I_2 + M_{z0} I_3 + B_0 I_4) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) &= m_x
 \end{aligned} \tag{4}$$

y las correspondientes condiciones de borde:

$$\begin{aligned}
N - \bar{N} &= 0 & o & \delta u_0 = 0 \\
-M_z + \bar{M}_z &= 0 & o & \delta \theta_z = 0 \\
-M_y + \bar{M}_y &= 0 & o & \delta \theta_y = 0 \\
Q_z + N_0 \frac{\partial w}{\partial x} + (M_{z0} - y_s N_0) \frac{\partial \phi}{\partial x} - \bar{Q}_z &= 0 & o & \delta w = 0 \\
Q_y + N_0 \frac{\partial v}{\partial x} - (M_{y0} - z_s N_0) \frac{\partial \phi}{\partial x} - \bar{Q}_y &= 0 & o & \delta v = 0 \\
B - \bar{B} &= 0 & o & \delta \theta = 0 \\
T_{sv} + T_w - \frac{\partial v}{\partial x} (M_{y0} - z_s N_0) + \frac{\partial w}{\partial x} (M_{z0} - y_s N_0) + \\
(M_{z0} - y_s N_0) + (N_0 I_1 + M_{y0} I_2 + M_{z0} I_3 + B_0 I_4) \frac{\partial \phi}{\partial x} - \bar{M}_x &= 0 & o & \delta \phi = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

donde  $q_x(x,t)$ ,  $q_y(x,t)$  y  $q_z(x,t)$  fuerzas distribuidas por unidad de longitud,  $m_x(x,t)$  es el momento tursor externo respecto al centro de corte por unidad de longitud, y  $m_y(x,t)$  y  $m_z(x,t)$  momentos por unidad de longitud con respecto a los ejes centroidales,  $b(x,t)$  el bimomento externo por unidad de longitud, las expresiones (9) son propiedades seccionales asociadas a la inercia y a las tensiones iniciales. Por otra parte,  $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $B$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $T_{sv}$  y  $T_w$  corresponden a los habituales esfuerzos seccionales, es decir, esfuerzo normal, momentos flectores con respecto a  $y$  y a  $z$ , bimomento, esfuerzos de corte en las direcciones  $y$ ,  $z$ , momento tursor de Saint Venant y momento tursor de alabeo respectivamente. Además  $N_0$ ,  $M_{y0}$ ,  $M_{z0}$ ,  $B$ ,  $Q_{y0}$ ,  $Q_{z0}$ ,  $T_{sv0}$  y  $T_{w0}$  son esfuerzos seccionales iniciales, mientras que los esfuerzos  $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $B$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $T_{sv}$  y  $T_w$  supra-rayados corresponden a cargas externas aplicadas en los extremos de la viga considerada. La definición de las características de las secciones  $\overline{\rho A}$ ,  $\overline{\rho S_y}$ ,  $\overline{\rho S_z}$ ,  $\overline{\rho S_\omega}$ ,  $\overline{\rho I_z}$ ,  $\overline{\rho I_y}$ ,  $\overline{\rho I_{yz}}$ ,  $\overline{\rho S_{\omega y}}$ ,  $\overline{\rho S_{\omega z}}$ ,  $\overline{\rho S_{\bar{y}}}$ ,  $\overline{\rho S_{\bar{z}}}$ ,  $\overline{\rho C_w}$ ,  $\overline{\rho I_s}$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I_4$ , se muestran en el Apéndice A. Las ecuaciones anteriores se han obtenido despreciando el efecto de tensiones de corte iniciales. Sin embargo, son también de validez aproximada para momentos flectores y bimomento iniciales variables a lo largo de la longitud. La precisión del modelo para diversos problemas estáticos y dinámicos fue analizada en Cortínez et al. (2016).

### 2.1.4 Aproximación de tensiones

El campo tensional se adopta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \hat{N} \frac{E}{EA} + \hat{M}_y \left( E \frac{z \overline{EI_z} - y \overline{EI_{yz}}}{\overline{EI_y EI_z} - \overline{EI_{yz}^2}} \right) + \hat{M}_z \left( E \frac{-z \overline{EI_{yz}} + y \overline{EI_y}}{\overline{EI_y EI_z} - \overline{EI_{yz}^2}} \right) + \hat{B} \frac{E \omega}{EC_w} - E \left( q_y \varphi_y + q_z \varphi_z + (m_x + T'_{sv}) \varphi_\omega \right) \\
\tau_{xy} &= Q_y \psi_{yy} + Q_z \psi_{zy} + T_w \psi_{wy} + T_{sv} \psi_{svy} \\
\tau_{xz} &= Q_y \psi_{yz} + Q_z \psi_{zz} + T_w \psi_{wz} + T_{sv} \psi_{svz}
\end{aligned} \tag{6}$$

siendo:

$$\psi_{yy} = G \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \quad \psi_{zy} = G \frac{\partial \varphi_z}{\partial y}, \quad \psi_{yz} = G \frac{\partial \varphi_y}{\partial z}, \quad \psi_{zz} = G \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\psi_{wy} &= g \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial y}, & \psi_{wz} &= g \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial z} \\ \psi_{svy} &= \frac{G}{GJ} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} - \tilde{z} \right), & \psi_{svz} &= \frac{G}{GJ} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} - \tilde{y} \right)\end{aligned}\quad (8)$$

$$\hat{N} = N$$

$$\hat{M}_y = M_y + q_y \int_A E \varphi_y z dA + q_z \int_A E \varphi_z z dA + (m_x + T'_{sv}) \int_A E \varphi_\omega z dA \quad (9)$$

$$\hat{M}_z = M_z + q_y \int_A E \varphi_y y dA + q_z \int_A E \varphi_z y dA + (m_x + T'_{sv}) \int_A E \varphi_\omega y dA$$

$$\hat{B} = B + q_y \int_A E \varphi_y \omega dA + q_z \int_A E \varphi_z \omega dA + (m_x + T'_{sv}) \int_A E \varphi_\omega \omega dA$$

donde las funciones bidimensionales  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$  y  $\varphi_\omega$  verifican las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left( g \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( g \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \right) = -\frac{E_0}{G_0} e \left( \frac{-z \overline{EI_{yz}} + y \overline{EI_y}}{\overline{EI_y EI_z} - \overline{EI_{yz}}^2} \right) \\ \left. \frac{\partial \varphi_y}{\partial n} \right|_\Gamma = 0, & \int_A \varphi_y dA = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left( g \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( g \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \right) = -\frac{E_0}{G_0} e \left( \frac{z \overline{EI_z} - y \overline{EI_{yz}}}{\overline{EI_y EI_z} - \overline{EI_{yz}}^2} \right) \\ \left. \frac{\partial \varphi_z}{\partial n} \right|_\Gamma = 0, & \int_A \varphi_z dA = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left( g \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( g \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial z} \right) = E \frac{\omega}{EC_w} \\ \left. \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial n} \right|_\Gamma = 0, & \int_A \varphi_\omega dA = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Por otra parte, la función de alabeo de Saint Venant  $\omega$  debe verificar la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left( g \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} - \tilde{z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( g \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} + \tilde{y} \right) \right) = 0 \\ \left. g \frac{\partial \omega}{\partial n} \right|_\Gamma = g (\tilde{z} n_x - \tilde{y} n_y) \end{cases} \quad (13)$$

En las expresiones anteriores,  $g = G(y,z)/G_0$ , siendo  $G_0$  un valor de referencia para el módulo de elasticidad transversal.

Debe observarse que el campo tensional (6) es compatible con la definición de los esfuerzos seccionales (Apéndice A). Además, si se desprecian las fuerzas volumétricas e inerciales, dichas expresiones verifican la ecuación diferencial de equilibrio longitudinal. Las expresiones tensionales adoptadas constituyen una extensión de la clásica teoría de Saint Venant asumiendo tensiones de corte variables longitudinalmente, existencia de alabeo torsional no uniforme y secciones no homogéneas (Cortínez et al., 2016; Petrolo y Casciaro, 2004; El Fatmi, 2007).

A partir de las tensiones de corte (6) con  $T_w$  y  $T_{sv}$  iguales a cero y considerando la definición de centro de corte (Sapountzakis y Protonotariou, 2008) es posible determinar sus coordenadas con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} y_s &= \int_A (\psi_{zz}y - \psi_{zy}z) dA \\ z_s &= \int_A (\psi_{yy}z - \psi_{yz}y) dA \end{aligned} \quad (14)$$

### 2.1.5 Ecuaciones constitutivas para esfuerzos seccionales

Una forma de determinar tales ecuaciones sería sustituyendo las deformaciones específicas en las definiciones de esfuerzos seccionales (Apéndice A). Sin embargo, tal procedimiento conduce a expresiones que evalúan con poca precisión la rigidez seccional, especialmente la parte relacionada con los esfuerzos de corte y momento flexo-torsor. El tratamiento más conocido de esta imprecisión es aquel correspondiente a flexión de vigas de sección maciza de acuerdo a la teoría de Timoshenko que se corrige a partir de la introducción de factores de corte. Para obtener expresiones mejoradas, en el presente modelo, las expresiones tensionales (6) (considerando  $q_y = q_z = m_x = T'_{sv} = 0$ ) así como las deformaciones específicas se sustituyen en la ecuación variacional (2) (considerando que los desplazamientos generalizados son variacionalmente independientes respecto a los esfuerzos seccionales) se integran las expresiones resultantes en la sección transversal y se aplica cálculo variacional permitiendo obtener las siguientes ecuaciones constitutivas:

$$\begin{aligned} N &= \overline{EA}u_0' \\ M_y &= -\overline{EI}_y\theta_y' - \overline{EI}_{yz}\theta_z' \\ M_z &= -\overline{EI}_{yz}\theta_y' - \overline{EI}_z\theta_z' \\ B &= \overline{EC}_w\theta' \\ Q_y &= \overline{GA}_y(v_s' - \theta_z) + \overline{GA}_{yz}(w_s' - \theta_y) \\ Q_z &= \overline{GA}_{yz}(v_s' - \theta_z) + \overline{GA}_z(w_s' - \theta_y) \\ T_{sv} &= \overline{GJ}\phi' \\ T_w &= \overline{GD}_\omega(\phi' - \theta) \end{aligned} \quad (15)$$

donde las rigideces seccionales  $\overline{EA}, \overline{EI}_y, \overline{EI}_{yz}, \overline{EI}_z, \overline{EC}_w, \overline{GA}_y, \overline{GA}_{yz}, \overline{GA}_z, \overline{GJ}$  y  $\overline{GD}_\omega$  dependen de la forma de la sección y de las funciones  $\omega, \psi_{yy}, \psi_{zy}$  y  $\psi_{zz}$  definidas en la sección anterior, y cuyas expresiones pueden verse en el Apéndice A.

Debe observarse que estas expresiones mejoradas de rigidez seccional no requieren la introducción de factores de corte ajenos a la teoría. Para el caso particular de una viga sometida a flexión no uniforme sobre un eje de simetría la rigidez de corte mejorada  $\overline{GA}$  resulta ser igual a  $0,833GA$  donde “0,833” es el factor de corrección de Timoshenko obtenido mediante un criterio energético.

## 2.2 Extensión del modelo a vigas laminadas compuestas

Se supone a continuación que la sección transversal de la viga es como la de la Figura 1 aunque los tramos de pared delgada pueden estar contruidos de material laminado compuesto (PRF) del tipo especialmente ortótropo o balanceado simétrico. Para un segmento de pared construido con material laminado el principio de trabajos virtuales (TV) puede ser expresado, luego de integrar en el espesor, de la siguiente manera:

$$\int_V \left( N_{xx} \delta \varepsilon_x^0 + M_{xx} \delta \kappa_x + N_{xs} \delta \gamma_{xs}^0 + M_{xs} \delta \kappa_{xs} + V_x \delta \gamma_{xn} \right) ds dx + W_i + W_e = 0 \quad (16)$$

En esta expresión aparecen los esfuerzos tipo lámina que se definen de la siguiente forma:

$$(N_{xx}, N_{ss}, N_{xs}, M_{xx}, M_{ss}, M_{xs}, V_x, V_s) = \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x, \sigma_s, \tau_{xs}, \sigma_x n, \sigma_s n, \tau_{xs} n, \tau_{xn}, \tau_{sn}) dn \quad (17)$$

Debe observarse que en (16) se ha despreciado el efecto de  $V_s$ ,  $N_{ss}$  y  $M_s$  como es usual en vigas (esta suposición es compatible con el hecho de que  $\sigma_y, \sigma_z$  y  $\tau_{yz}$  son despreciables). Además, se ha supuesto que las deformaciones pueden ser expresadas como  $\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + n\kappa_x$  y  $\gamma_{xs} = \gamma_{xs}^0 + n\kappa_{xs}$ . En (16),  $W_i$  y  $W_e$  son los trabajos virtuales de las fuerzas inerciales y externas respectivamente.

La relación constitutiva general para un laminado compuesto puede expresarse de la siguiente manera (Barbero, 1999):

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1, \quad \mathbf{R}_1 = (N_{xx}, N_{ss}, N_{xs}, M_{xx}, M_{ss}, M_{xs})^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 = (\varepsilon_x, \varepsilon_s, \gamma_{xs}, \kappa_x, \kappa_s, \kappa_{xs})^T \quad (18)$$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}_2, \quad \mathbf{R}_2 = (V_x, V_s)^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (\gamma_{xn}, \gamma_{sn})^T$$

Es posible simplificar la expresión anterior efectuando las siguientes hipótesis: a) el laminado simétrico del tipo “cross-ply”, especialmente ortótropo o balanceado; b)  $N_{ss} = M_{ss} = 0$ ; c) se supone que  $\overline{A}_{55} \approx \overline{A}_{66}$  y d)  $\overline{D}_{ij} \approx \overline{A}_{ij} t^2 / 12$ . La hipótesis b) es adecuada para el presente modelo tipo viga donde  $s$  es la dirección perpendicular al eje longitudinal. La hipótesis c) corresponde a una modificación arbitraria de la rigidez de corte transversal de la placa. Este hecho no es, sin embargo, muy influyente puesto que en la teoría de vigas la contribución de  $\gamma_{xn}$  suele despreciarse. Por lo tanto, la hipótesis c) implica la consideración aproximada del efecto de corte tipo placa y la hipótesis d) es válida para  $D_{11}$  y  $D_{66}$  en el caso de paredes especialmente ortótropas homogéneas. En consecuencia, el efecto flexional tipo placa en la pared se considera al menos de manera aproximada. Este hecho, sin embargo, es razonable en

el caso de paredes delgadas donde el efecto principal es membranal. Lo anterior permite obtener las siguientes ecuaciones constitutivas para el laminado:

$$N_{xx} = \bar{A}_{11}\varepsilon_x; N_{xs} = \bar{A}_{66}\gamma_{xs}; V_x \approx \bar{A}_{66}\gamma_{xn}; M_{xx} \approx (\bar{A}_{11}t^2/12)\kappa_x; M_{xs} \approx (\bar{A}_{66}t^2/12)\kappa_{xs} \quad (19)$$

Finalmente es posible observar a partir de (17) y (1) que las expresiones (19) y las correspondientes expresiones de los  $TV$  (16) pueden ser obtenidas considerando un material hookeano ficticio ( $\sigma_x^* = E^*\varepsilon_x^0$ ,  $\tau_{xy}^* = G^*\gamma_{xy}^0$ ,  $\tau_{xz}^* = G^*\gamma_{xz}^0$ ) con los siguientes módulos equivalentes:

$$E^* = \bar{A}_{11}/t, \quad G^* = \bar{A}_{66}/t \quad (20)$$

Por lo tanto, el tramo de viga de material compuesto puede ser considerado a partir de tal ecuación constitutiva ficticia en la teoría de vigas explicada en la sección 2.

Para recuperar las tensiones en cada lámina deben determinarse en primer lugar los esfuerzos tipo lámina  $N_{xx}, N_{ss}, N_{xs}, M_{xx}, M_{ss}, M_{xs}, V_x$  y  $V_s$  a partir de las tensiones ficticias. Luego, las expresiones mejoradas para las deformaciones del laminado se pueden determinar a partir de las correspondientes ecuaciones constitutivas del material reforzado (Barbero, 1999).

$$\tilde{\varepsilon}_x^0 = \frac{N_{xx}}{\bar{A}_{11}}, \quad \tilde{\gamma}_{xs}^0 = \frac{N_{xs}}{\bar{A}_{66}}, \quad \tilde{\gamma}_{xn}^0 = \frac{N_{xn}}{\bar{A}_{55}}, \quad \tilde{\kappa}_x = \frac{M_{xx}}{\bar{D}_{11}}, \quad \tilde{\kappa}_{xs} = \frac{M_{xs}}{\bar{D}_{66}} \quad (21)$$

Finalmente, con tales expresiones pueden obtenerse las tensiones en cada lámina a partir de la correspondiente ecuación constitutiva (Barbero, 1999), y finalmente, con estas últimas, se puede verificar la posibilidad de falla del material con alguno de los criterios asociados. En particular en este trabajo se utiliza un indicador de falla basado en el criterio de Tsai-Wu (Barbero, 1999) definido de la siguiente manera:

$$(22)$$

donde  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}, \sigma_{66}, \sigma_{44}$  y  $\sigma_{55}$  corresponden a las componentes del tensor de tensión de acuerdo a los ejes principales del material. Los coeficientes  $f_{ij}$  dependen de las resistencias a tracción y a compresión en las direcciones de las fibras, en la dirección transversal a las mismas, de las resistencias al corte en el plano de la lámina e interlaminares y de un coeficiente de interacción biaxial. La expresión (22) indica falla de la lámina cuando  $R \geq 1$ .

### 2.3 Pandeo local

En el caso de paredes muy delgadas el modo de inestabilidad predominante puede ser el pandeo local (pandeo tipo placa con longitudes de onda mucho menor que la longitud total de la viga) sobre el pandeo global. En este trabajo se adopta un enfoque aproximado para analizar tal fenómeno considerando cada panel en forma separada, asumiendo condiciones de borde libre o de apoyo simple en las juntas con otros paneles. En primer lugar se determinan las cargas en el plano de tales estructuras a partir de la teoría de vigas descripta anteriormente. Luego, se evalúa su seguridad con respecto al pandeo local empleando fórmulas analíticas para los paneles. De acuerdo con este cálculo se puede estimar cual de los paneles se inestabilizará con menor carga crítica y entonces se reanaliza el mismo considerando en forma aproximada la restricción elástica producida por las paredes adyacentes. Esto permite la determinación mejorada de la carga de pandeo local. La descripción completa de tal enfoque puede consultarse en Tarján et al. (2009) y Reguera y Cortínez (2016).

### 3 DISEÑO ÓPTIMO

Se pretenden determinar las características geométricas de la sección transversal y la arquitectura de laminación (secuencia de láminas reforzadas en diferentes orientaciones) de una viga con dadas condiciones de borde de manera tal de optimizar una función objetivo (FO) y al mismo tiempo verificar restricciones asociadas con la falla del material, la falla por inestabilidad y falla debida a desplazamientos excesivos. Se consideran tres situaciones de diseño: a) maximización de la carga de pandeo global, b) maximización de la frecuencia fundamental de vibración y c) minimización del área de la sección transversal. El primer caso (a) corresponde a la consideración de una carga externa estática dada aplicada a la estructura. Se denomina  $\lambda$  al factor por el cual debe multiplicarse tal carga para que se produzca inestabilidad estática. Entonces, el problema puede establecerse de la siguiente manera:

$$\mathbf{x} = \max \lambda(\mathbf{x}) \quad (23)$$

s.a.

$$R_{m\acute{a}x}(\mathbf{x}) < 1, \quad \lambda(\mathbf{x}) > 1, \quad \delta(\mathbf{x}) \leq \delta_{m\acute{a}x}, \quad \mathbf{x}^I \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^S \quad (24)$$

En las expresiones anteriores  $\mathbf{x}$  es el vector de variables de diseño,  $R$  es el indicador de falla dado por la expresión (22),  $\delta_{m\acute{a}x}$  es el máximo desplazamiento admisible de la estructura y  $\mathbf{x}^I$  y  $\mathbf{x}^S$  son las cotas inferiores y superiores de las variables de diseño. La composición del vector  $\mathbf{x}$  será discutida en los ejemplos específicos.

El segundo problema de diseño considerado no contempla la existencia de cargas externas sino que busca maximizar la frecuencia fundamental de vibración  $\omega$  de la estructura considerada. Consecuentemente puede formularse de la siguiente manera:

$$\mathbf{x} = \max \omega(\mathbf{x}) \quad (25)$$

sujeto a restricciones geométricas.

En el tercer problema de diseño se pretende minimizar la cantidad de material empleado en una estructura sometida a carga estática y/o dinámica verificando la seguridad respecto a falla del material, falla por pandeo o desplazamientos excesivos. Luego, este problema puede formularse de la siguiente manera:

$$\mathbf{x} = \min A(\mathbf{x}) \quad (26)$$

sujeto a las mismas restricciones que en el caso anterior. En la situación de cargas dinámicas las restricciones de falla por resistencia o inestabilidad se verifican con respecto al máximo valor de la carga.

### 4 SOLUCIÓN COMPUTACIONAL

En este trabajo se utiliza el método de Recocido Simulado en el proceso de optimización. El algoritmo comienza con una solución inicial factible y genera a partir de ella una nueva solución en el entorno de la misma. Si la solución vecina es mejor que la actual, es decir aumenta el valor de la FO se acepta automáticamente. Si no, aún existe la posibilidad de que dicha solución sustituya a la solución actual de acuerdo a un cierto criterio probabilístico que depende de la diferencia entre la solución actual y la nueva ( $\Delta FO = FO \text{ nueva} - FO \text{ anterior}$ ) y del parámetro  $T$  conocido como temperatura. A medida que el algoritmo avanza se va disminuyendo  $T$  de manera tal de disminuir la probabilidad de aceptar soluciones factibles que

no produzcan una mejora en la función objetivo. El algoritmo acepta soluciones mucho peores que la actual al principio de la ejecución (exploración) pero no al final (explotación). Si la temperatura decrece muy lentamente, el proceso converge a una solución cercana a la óptima. En cada paso del proceso de optimización, a efectos de evaluar las restricciones estructurales y la F.O. (en el primer y segundo problema de diseño) debe resolverse el modelo estructural. Para esto último debe efectuarse el siguiente procedimiento.

Para una estructura y para un estado de carga dados debe obtenerse, en primer lugar, el centroide elástico de la sección, el que se tomará como origen del sistema de coordenadas principal de la misma y a partir de éste se realiza el análisis seccional para determinar las rigideces  $\overline{EA}$ ,  $\overline{EI_z}$ ,  $\overline{EI_y}$  y  $\overline{EI_{yz}}$ . Este primer paso se efectúa considerando los módulos de elasticidad  $E^*$  y  $G^*$  equivalentes, calculados con la ecuación (20) de acuerdo al tipo de laminado. Posteriormente, se obtienen las funciones de alabeo  $\varphi_y$  y  $\varphi_z$  mediante la solución de las ecuaciones (10) y (11). Las coordenadas del centro de corte elástico  $y_s$ ,  $z_s$  pueden ser entonces determinadas a partir de las expresiones (14). Seguidamente, se obtiene la función de alabeo de Saint Venant de la solución de la ecuación (13), con la cual pueden determinarse  $\overline{EC_w}$  y  $\overline{GJ}$ . Finalmente la función de alabeo torsional secundario  $\varphi_\omega$  se obtiene mediante la resolución de la ecuación (12). Una vez determinadas las funciones de alabeo mencionadas es posible determinar las rigideces seccionales  $\overline{GA_y}$ ,  $\overline{GA_z}$ ,  $\overline{GA_{yz}}$  y  $\overline{GD_\omega}$ . De esta manera todas las rigideces seccionales que figuran en las ecuaciones constitutivas (15) quedan determinadas.

Para analizar el comportamiento estructural deben introducirse las expresiones (15) en las (4 y 5) y resolver las ecuaciones gobernantes unidimensionales así obtenidas, tanto para problemas estáticos o dinámicos, y determinación de frecuencias naturales y cargas de pandeo (en este caso deben primeramente obtenerse las tensiones iniciales).

Luego, es posible determinar los desplazamientos generalizados a partir de (3), y las tensiones ficticias mediante las expresiones (6). Con estas tensiones se evalúa la seguridad al pandeo local y global.

Utilizando las expresiones (19) se calculan los esfuerzos tipo lámina, las deformaciones mejoradas con (21) y las tensiones con las correspondientes ecuaciones constitutivas del material seleccionado y por último la falla del material de acuerdo a (22).

Como puede apreciarse, el modelo requiere la resolución de cuatro problemas de contorno bidimensionales (10 a 13) y siete ecuaciones de movimiento acopladas unidimensionales (4, 5 y 15). Todos estos problemas se resuelven mediante el método de los Elementos Finitos utilizando el programa FlexPDE® (2015).

El enfoque de optimización fue implementado en el programa Matlab a efectos de dirigir la búsqueda del óptimo mediante el método de Recocido Simulado invocando al programa FlexPDE en cada paso iterativo.

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

La eficiencia del modelo estructural presentado se ha discutido en Cortínez et al. (2016) para materiales isotrópos no homogéneos y en Dominguez et al. (2017) para materiales laminados. Por tal razón tal tipo de estudio no se reporta en el presente trabajo.

En esta sección se describen los ejemplos referidos a los problemas de diseño previamente enunciados. La sección analizada es la que se muestra en la Figura 2. En todos los casos se utilizó un laminado  $[0_\alpha/90_\beta/\pm 45_\gamma]_s$  de grafito-epoxi (AS4/3501-6)

con las siguientes características:  $E_1 = 142\text{GPa}$ ,  $E_2 = 10,2\text{GPa}$ ,  $G_{12} = 7,2\text{GPa}$ ,  $G_{13} = G_{12}$ ,  $G_{23} = 3,45\text{GPa}$ ,  $\nu_{12} = 0,27$ ,  $\rho = 1580\text{N/m}^3$ ,  $F_{1t} = 1830\text{MPa}$ ,  $F_{2t} = 57\text{MPa}$ ,  $F_{1c} = 1096\text{MPa}$ ,  $F_{2c} = 228\text{MPa}$ ,  $F_6 = 71\text{MPa}$ ,  $F_4 = 57\text{MPa}$ ,  $F_5 = 57\text{MPa}$ .  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  corresponden a la razón del espesor de cada capa con respecto al espesor total de la lámina adoptándose en los ejemplos presentados  $\alpha = \beta$ . Durante el proceso de optimización se aplicaron las siguientes restricciones: desplazamiento  $\delta < L/250$ , cotas de las variables de diseño (m):  $0,4 \leq h \leq 0,8$ ;  $h/4 \leq b \leq h$ ;  $0,01 \leq t \leq 0,05$  y  $0,3 \leq \alpha \leq 0,7$ , debiendo cumplirse además  $A < 1,3A_b$  siendo  $A$  el área de la sección transversal evaluada y  $A_b$  el área de la sección de un perfil base definido mediante las siguientes dimensiones:  $h=0,6$  m,  $b=0,6$  m y  $t=0,03$  m.

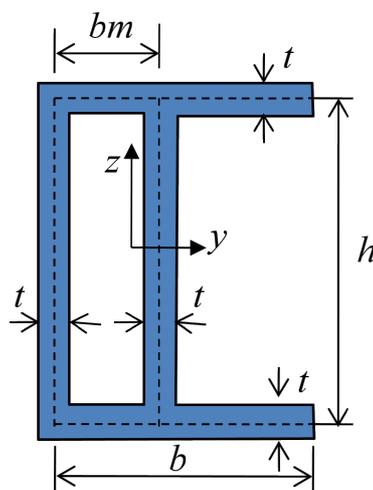


Figura 2: Sección transversal de las vigas analizadas

En primer lugar se ha buscado maximizar la frecuencia natural de vibración de una viga “doblemente articulada” ( $u_0 = v_s = w_s = \phi = B = M_z = M_y = 0$ ) con una longitud  $L=6$  m,  $bm=b/2$  cumpliendo las restricciones mencionadas. Las dimensiones óptimas pueden verse en la primera fila de la Tabla 1.

$h$ (m)	$b$ (m)	$t$ (m)	$t_{0-90}$ (m)	$t_{\pm 45}$ (m)	Área (m <sup>2</sup> )	$v$ (m)	$w$ (m)	$R$	$f$ (Hz)	$\lambda$	Seg. al pandeo local
0,68	0,68	2,4E-2	4,2E-3	1,8E-3	6,53E-2	---	---	---	<b>53,76</b>	---	---
0,66	0,64	3,6E-2	7,2E-3	1,8E-3	9,36E-2	-1.79E-3	-4.78E-3	0,0443	52,85	<b>46,64</b>	verifica
0,48	0,44	3,0E-2	6,0E-3	1,5E-3	<b>5,52E-2</b>	-1.55E-2	-6.38E-3	0,1251	37,82	14,14	verifica

Tabla 1: valores óptimos para una viga A-A.

A continuación se considera el diseño que maximice la seguridad al pandeo global de la estructura para la misma viga que en el caso anterior a la cual se aplica la superposición de un esfuerzo normal de compresión y de momentos flectores aplicados en ambos extremos:  $N=-1E6$  N,  $M_y=-5E5$  Nm y  $M_z=-1E5$  Nm. Las dimensiones óptimas para este caso se pueden ver en la segunda fila de la Tabla 1 donde también es posible apreciar que se verifican las restricciones impuestas.

Finalmente, el diseño de acuerdo a la minimización del área de la sección transversal

para la estructura con las mismas cargas consideradas en el caso anterior puede apreciarse en la tercera fila de la Tabla 1.

Se puede apreciar que el diseño de acuerdo al primer criterio arroja un valor similar de frecuencia natural que el segundo criterio de diseño. En cambio, comparado al tercero, es posible notar un aumento significativo del valor de la frecuencia fundamental (46% mayor). Por otra parte, la comparación entre los diseños de la estructura de acuerdo a los criterios 2 y 3 refleja claramente los objetivos buscados. En efecto, ambos diseños son factibles para la misma estructura aunque al pretender maximizar la seguridad al pando se logra un aumento en este sentido mayor al 300% con respecto al tercer caso. Inversamente, si lo que se busca es una estructura más económica, el volumen del material a emplear con el criterio de diseño óptimo en tal sentido es casi la mitad que en el segundo caso.

Es interesante mostrar la evolución de la técnica de optimización utilizada. Así en la Figura 3 se observan los valores de la función objetivo en función del número de iteraciones para el segundo caso. Los otros casos se comportan de manera similar.

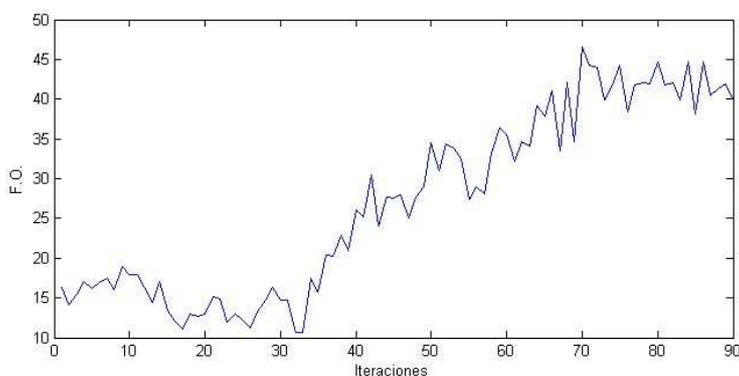


Figura 3: Evolución de la función objetivo en el caso de maximización de la carga de pandeo.

## 6 CONCLUSIONES

Se ha presentado un enfoque teórico y computacional para el diseño óptimo de las dimensiones seccionales y la arquitectura de laminación de vigas de sección arbitraria (sólidas, de paredes delgadas multicelda, etc.). El modelo estructural es una versión mejorada de la teoría de Timoshenko-Vlasov que permite obtener apropiadamente la rigidez seccional asociada al efecto de corte. El diseño óptimo se realiza a partir de la combinación del método de Elementos Finitos para resolver el problema estructural en combinación con el método de optimización de Recocido Simulado. Se han dado algunos ejemplos para ilustrar las posibilidades de la metodología presentada.

### Agradecimientos

El presente trabajo es parte del proyecto “Mecánica estructural no lineal: diseño óptimo e identificación de fallas estructurales” (Secyt, Universidad Tecnológica Nacional) y del proyecto “Problemas de optimización en Ingeniería Civil” (Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur).

### REFERENCIAS

Barbero, E.J. *Introduction to Composite Material Design*, London: Taylor & Francis Inc,

- 1999.
- Cortínez, V. H. y Piovan, M. T. Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4), 701–723, 2002.
- Cortínez, V.H., Dominguez, P.N y Bender, N.G. Una generalización del modelo Timoshenko-Vlasov para el análisis dinámico de vigas no homogéneas. *Mecánica Computacional* Vol. XXXIV, 1327-1346, 2016.
- Cortínez, V.H. y Dominguez, P.N. Diseño óptimo de vigas de sección arbitraria sólidas o de paredes delgadas. Congress on Numerical Methods in Engineering, Valencia, España, 1427-1445, 2017. [http://congress.cimne.com/cmn2017/frontal/Doc/Ebook\\_CMN2017.pdf](http://congress.cimne.com/cmn2017/frontal/Doc/Ebook_CMN2017.pdf)
- Dikaros, I.C., Sapountzakis, E.J. y Argyridi, A.K. Generalized warping effect in the dynamic analysis of beams. *Journal of Sound and Vibration* 369, 119–146, 2016.
- Dominguez, P.N., Cortínez, V.H y Bender, N.G. Un modelo Timoshenko-Vlasov para vigas PRF de sección arbitraria, 225-228, Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, MACI 6, 225-228, ISSN 2314-3282, 2017. <https://drive.google.com/file/d/Bzm25j13qMsocjYzcUt5UjdVN1k/view>
- El Fatmi, R. Non-uniform warping including the effect of torsion an shear forces. Part I: A general beam theory. *International Journal of Solids and Structures* 44, 5912-5929, 2007.
- FlexPDE<sup>®</sup>, PDE Solutions Inc. [www.pdesolutions.com](http://www.pdesolutions.com), (2015).
- Karim, A. y Adeli, H. Global optimum design cold-formed steel hat-shape beams. *Thin-Walled Structures* 35, 275-288, 1999.
- Magnucki, K. y Monczak, T. Optimum shape of the open cross-section of a thin-walled beam. *Engineering Optimization* 32, 335-351, 2000.
- Lee, J., Kim, S-M., Park, H-S. y Woo, B-H. Optimum design of cold-formed steel channel beams using micro genetic algorithm. *Engineering Structures* 27, 17-24, 2005.
- Magnucki, K. y Paczos, P. Theoretical shape optimization of cold-formed thin-walled channel beams with drop flanges in pure bending. *Journal of Constructional Steel Research* 65, 1731-1737, 2009.
- Nguyen, X-H., Kim, N-I. y Lee, J. Optimal design of thin-walled composite beams for flexural-torsional buckling problem. *Composite Structures* 132, 1065-1074, 2015.
- Nguyen, H.X. , Lee, J., Vo, T.P. y Lanc, D. Vibration and lateral buckling optimization of thin-walled laminated composite channel-section beams. *Composite Structures* 143, 84-92, 2016.
- Pagani, A., de Miguel, A.G., Petrolo, M. y Carrera, E. Analysis of laminated beams via unified formulation and Legendre polynomial expansions. *Composite Structures*. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.01.095>, 2016.
- Petrolo, A.S. y Casciaro, R. 3D beam element base on Saint Venant's rod theory. *Computers & Structures* 82, 2471-2481, 2004.
- Prokic, A. A new finite element for analysis of shear lag. *Computers & Structures* 80, 1011-1024, 2002.
- Reguera, F. y Cortínez, V. H. Optimal design of composite thin-walled beams using Simulated Annealing. *Thin-Walled Structures* 104, 71–81, 2016.
- Sapountzakis, E.J. y Protonotariou, V.M. A displacement solution for transverse shear loading of beams using the boundary element method. *Computers & Structures* 86, 771–779, 2008.
- Tarján, G., Sapkás, A. y Kollár, L.P. Local buckling of composite beams. In ICCM International Conferences on Composite Materials. 17th International Conference on Composite Materials, ICCM-17, Edinburgh, United Kingdom, 2009.

## Apéndice A

### Características inerciales seccionales

$$\begin{aligned}\overline{\rho A} &= \int_A \rho dA, \quad \overline{\rho C_w} = \int_A \rho \omega^2 dA, \quad \overline{\rho I_s} = \int_A \rho (\tilde{z}^2 + \tilde{y}^2) dA, \quad \overline{\rho I_z} = \int_A \rho y^2 dA, \\ \overline{\rho I_y} &= \int_A \rho z^2 dA, \quad \overline{\rho I_{yz}} = \int_A \rho yz dA, \quad \overline{\rho S_y} = \int_A \rho z dA, \quad \overline{\rho S_z} = \int_A \rho y dA, \\ \overline{\rho S_\omega} &= \int_A \rho \omega dA, \quad \overline{\rho S_{\omega y}} = \int_A \rho \omega y dA, \quad \overline{\rho S_{\omega z}} = \int_A \rho \omega z dA, \quad \overline{\rho S_{\tilde{z}}} = \int_A \rho \tilde{y} dA, \quad \overline{\rho S_{\tilde{y}}} = \int_A \rho \tilde{z} dA\end{aligned}$$

### Coefficientes asociados a los esfuerzos iniciales

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_A \frac{E}{EA} \left( (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 \right) dA, \quad I_2 = \int_A \left( E \frac{z \overline{EI_z} - y \overline{EI_{yz}}}{EI_y EI_z - EI_{yz}^2} \right) \left( (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 \right) dA \\ I_3 &= \int_A \left( E \frac{-z \overline{EI_{yz}} + y \overline{EI_y}}{EI_y EI_z - EI_{yz}^2} \right) \left( (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 \right) dA, \quad I_4 = \int_A \frac{EC_w}{EC_w} \left( (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 \right) dA\end{aligned}$$

### Coefficientes de rigidez seccional

$$\begin{aligned}\overline{EA} &= \int_A E dA, \quad \overline{GA} = \int_A G dA, \quad \overline{EI_z} = \int_A E y^2 dA, \quad \overline{EI_y} = \int_A E z^2 dA, \quad \overline{EI_{yz}} = \int_A E yz dA, \\ \overline{EC_w} &= \int_A E \omega^2 dA, \quad \overline{GD} = \int_A G \left( \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right) dA, \quad \overline{GJ} = \int_A G \left( \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 - \tilde{z} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \tilde{y} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dA \\ \overline{GA_y} &= \frac{1}{\Delta^*} \int_A \psi_{yy} dA \left( \int_A \frac{\psi_{zy}^2}{G} dA + \int_A \frac{\psi_{zz}^2}{G} dA \right) - \int_A \psi_{zy} dA \left( \int_A \frac{\psi_{zy} \psi_{yy}}{G} dA + \int_A \frac{\psi_{zz} \psi_{yz}}{G} dA \right) \\ \overline{GA_{yz}} &= \frac{1}{\Delta^*} \int_A \psi_{yy} dA \left( \int_A \frac{\psi_{zy} \psi_{yy}}{G} dA + \int_A \frac{\psi_{zz} \psi_{yz}}{G} dA \right) - \int_A \psi_{zy} dA \left( \int_A \frac{\psi_{yy}^2}{G} dA + \int_A \frac{\psi_{yz}^2}{G} dA \right) \\ \overline{GA_z} &= \frac{1}{\Delta^*} \int_A \psi_{yz} dA \left( \int_A \frac{\psi_{zy} \psi_{yy}}{G} dA + \int_A \frac{\psi_{zz} \psi_{yz}}{G} dA \right) - \int_A \psi_{zz} dA \left( \int_A \frac{\psi_{yy}^2}{G} dA + \int_A \frac{\psi_{yz}^2}{G} dA \right) \\ \Delta^* &= \left( \int_A \frac{\psi_{yy}^2}{G} dA + \int_A \frac{\psi_{yz}^2}{G} dA \right) \left( \int_A \frac{\psi_{zy}^2}{G} dA + \int_A \frac{\psi_{zz}^2}{G} dA \right) - \left( \int_A \frac{\psi_{yy} \psi_{zy}}{G} dA + \int_A \frac{\psi_{zz} \psi_{yz}}{G} dA \right)^2 \\ \overline{GD_\omega} &= \frac{G_0 \int_A \frac{\partial \omega}{\partial y} \psi_{wy} dA + \int_A \frac{\partial \omega}{\partial z} \psi_{wz} dA}{\int_A \frac{1}{g} (\psi_{wy}^2 + \psi_{wz}^2) dA}\end{aligned}$$

## Esfuerzos seccionales

$$N = \int_A \sigma_x dA, \quad M_y = \int_A \sigma_x z dA, \quad M_z = \int_A \sigma_x y dA,$$

$$B = \int_A \sigma_x \omega dA, \quad Q_y = \int_A \tau_{xy} dA, \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} dA,$$

$$T_{sv} = \int_A \left( \tau_{xy} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} - \tilde{z} \right) + \tau_{xz} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} + \tilde{y} \right) \right) dA, \quad T_w = - \int_A \left( \tau_{xy} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dA$$