

## DINÁMICA ESTRUCTURAL, COMPARACIÓN Y ANÁLISIS DE LA PROPAGACIÓN DE VIBRACIONES EN ESTRUCTURAS

**Pablo L. Sierra<sup>a</sup>, Oscar Möller<sup>a,b</sup>, Juan P. Ascheri<sup>a</sup> y Mauro Poliotti<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Instituto de Mecánica Aplicada y Estructuras (IMAE), Facultad de Cs.Ex., Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Riobamba y Berutti, 2000 Rosario, Argentina, sierrapa@fceia.unr.edu.ar, <http://www.imaefceia.unr.edu.ar>*

<sup>b</sup>*Consejo de Investigaciones (CIUNR), Universidad Nacional de Rosario, Maipú 1065, 2000 Rosario, Argentina, <http://www.unr.edu.ar>*

**Palabras Clave:** Análisis sísmico de estructuras, Propagación de ondas en estructuras, Dinámica estructural

**Resumen.** Con los métodos clásicos de análisis dinámico de estructuras solicitadas por movimientos en la base producida por el arribo de ondas que viajan por el suelo, se analiza la respuesta con una excitación que impacta uniformemente sobre toda la fundación. Además se considera que las aceleraciones y las fuerzas de inercia en todas las masas del sistema se producen de manera instantánea con el arribo de la excitación en la base. La metodología de análisis de estructuras por medio de la propagación de ondas tiene en cuenta la evolución temporal y espacial de la perturbación, desde el arribo de las ondas en diferentes instantes a las bases de la estructura, aceleraciones no instantáneas en las masas del sistema, y posibles reflexiones en sectores dañados o con diferente rigidez. En la siguiente presentación se analizan distintas estructuras simples comparando la respuesta obtenida por métodos clásicos y analizando la propagación de vibraciones, identificando algunos casos donde las diferencias son relevantes como para justificar abordar el problema con el método de propagación de ondas.

## 1. INTRODUCCIÓN

Con los métodos clásicos de análisis dinámico de estructuras solicitadas por movimientos en la base producida por el arribo de ondas que viajan por el suelo, como es el caso de terremotos, se analiza la respuesta con una excitación que impacta uniformemente sobre toda la fundación. Es decir, todas las bases de la estructura son perturbadas por la misma aceleración de manera simultánea, cuando la excitación puede resultar muy distinta en cada base, principalmente en estructuras de grandes luces y fundaciones importantes, y la influencia del retardo en llegar a cada una de ellas puede ser significativo, modificando considerablemente la respuesta de la estructura. Estos efectos están siendo estudiados para estructuras de grandes puentes, viaductos de gran longitud y estructuras emplazadas en zonas epicéntricas de terremotos de foco superficial, donde los desplazamientos horizontales y verticales son significativos, ([Dulinska y Fabijanska-Kopacz, 2017](#)).

Además se considera que las aceleraciones y las fuerzas de inercia en todas las masas del sistema se producen de manera instantánea con el arribo de la excitación en la base. Una simplificación adicional de los códigos es considerar solamente las componentes horizontales de la excitación sísmica y en forma aproximada la influencia de la componente vertical.

La metodología de análisis de estructuras por medio de la propagación de ondas tiene en cuenta la evolución temporal y espacial de la perturbación, desde el arribo de las ondas en diferentes instantes a las bases de la estructura, aceleraciones no instantáneas en las masas del sistema y posibles reflexiones en sectores plastificados o dañados, o con diferente rigidez. El desarrollo actual de los métodos numéricos computacionales hace posible la aplicación de estas técnicas con el objetivo de mejorar la aproximación de la respuesta en algunos casos, y utilizarlas en verificación de diseños sismorresistentes incluyendo elementos disipadores o de aislación.

La robustez computacional permite analizar la respuesta de sistemas discretizados con elementos suficientemente pequeños y pasos de tiempo adecuados al seguimiento de la propagación de ondas, como es expuesto en el trabajo de ([Carydis y Markantonis, 2017](#)) donde se compara la respuesta entre el método de respuesta modal espectral y el método de propagación de ondas en pórticos. En ese trabajo, entre los dos análisis realizados se muestran diferencias significativas en los esfuerzos internos de la estructura.

Además permite tener en cuenta la evolución temporal y espacial de la respuesta estructural, contrario a la metodología clásica donde la estructura responde de manera integral e instantánea a la aplicación de la perturbación. Esto también permite contemplar que la evolución espacial de la excitación en la estructura se modifique en función de que pueda producirse plastificación o debilitamiento de alguna sección.

Esta metodología está siendo empleada para analizar la interacción suelo-estructura, ([Chen y Fu, 2017](#)), evaluación cuantitativa del daño en estructuras de grandes luces, ([Nazarko y Ziemianski, 2007](#)), obtención de modos y frecuencias en estructuras no convencionales, ([Cottrell et al., 2007](#)), entre otros.

Continuando con trabajos anteriores, donde se analiza la propagación de ondas en medios elásticos, ([Sierra et al., 2016](#)), y la interacción con estructuras en medios tridimensionales, ([Möller et al., 2014](#)), en la siguiente presentación se analizan distintas estructuras simples comparando la respuesta obtenida por métodos clásicos y analizando la propagación de vibraciones, identificando algunos casos donde las diferencias son relevantes como para justificar abordar el problema con el método de propagación de ondas.

## 2. INTRODUCCIÓN TEÓRICA

En esta sección se resumen brevemente las ecuaciones principales de la dinámica de estructuras y de la propagación de ondas en medios elásticos, para profundizar ver (Chopra, 2001), (Clough y Penzien, 2003), (Doyle, 1997) y (Das y Ramana, 2010)

### 2.1. Metodología clásica

Se plantea un breve resumen de la metodología clásica para la obtención de la respuesta dinámica, utilizada en este trabajo, para la resolución de los distintos ejemplos y casos planteados. Partiendo del sistema clásico de masa - resorte - amortiguador de un grado de libertad, que se observa en la Figura 1

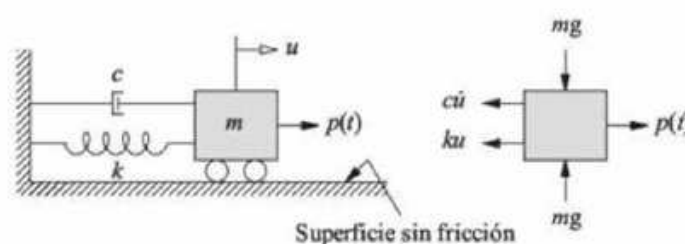


Figura 1: Sistema masa - resorte - amortiguador

Considerando que el resorte y el amortiguador no tienen masa, que la masa es rígida y que todo movimiento ocurre en la dirección del eje  $x$ , el sistema resulta de un grado de libertad. En el diagrama de cuerpo libre se muestran las fuerzas que actúan sobre la masa, la fuerza restauradora elástica ejercida por un resorte lineal de rigidez  $k$ ,  $ku$ , y la fuerza restauradora de amortiguamiento debida a un amortiguador viscoso lineal,  $c\dot{u}$ . Aplicando la Segunda ley de Newton, resulta

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (1)$$

Donde  $p(t)$  representa una fuerza aplicada variable en el tiempo.

La solución analítica de la ecuación del movimiento, Ec. (1), no es posible si la excitación varía arbitrariamente con el tiempo o si el sistema es no lineal. Tales problemas pueden abordarse mediante métodos numéricos paso a paso en el tiempo para la integración de ecuaciones diferenciales.

La fuerza aplicada  $p(t)$  está dada por un conjunto de valores discretos  $p_i = p(t_i)$ ,  $i = 0$  a  $N$ , quedando dividida en intervalos de tiempo, generalmente tomados constantes

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \quad (2)$$

La respuesta se determina en los instantes de tiempo discretos  $t_i$ , los valores satisfacen la Ec. (1) en los instantes de tiempo  $i$

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + ku_i = p_i \quad (3)$$

El procedimiento numérico de Newmark permite determinar las cantidad de respuesta  $u_{i+1}$ ,

$\dot{u}_{i+1}$  y  $\ddot{u}_{i+1}$  en el instante  $i + 1$ . Aplicado sucesivamente, el procedimiento paso a paso proporciona la respuesta deseada en todos los instantes de tiempo. Las condiciones iniciales conocidas

$$u_0 = u(0) \quad \dot{u}_0 = \dot{u}(0) \quad (4)$$

Proporcionan la información necesaria para iniciar el proceso.

El método de Newmark se basa en las siguientes ecuaciones

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1 - \gamma)\Delta t]\ddot{u}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{u}_{i+1} \quad (5)$$

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta t)\dot{u}_i + [(0,5 - \beta)(\Delta t)^2]\ddot{u}_i + [\beta(\Delta t)^2]\ddot{u}_{i+1} \quad (6)$$

Donde los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$  definen la variación de la aceleración durante un paso de tiempo y determinan las características de la estabilidad y precisión del método. Estas ecuaciones, en combinación con la ecuación de equilibrio Ec. (1) proporcionan la base para calcular  $u_{i+1}$ ,  $\dot{u}_{i+1}$  y  $\ddot{u}_{i+1}$  en el tiempo  $i + 1$  a partir de  $u_i$ ,  $\dot{u}_i$  y  $\ddot{u}_i$  conocidas en el tiempo  $i$ . Para implementar estos cálculos es necesario iterar debido a que la  $\ddot{u}_{i+1}$  desconocida aparece en el lado derecho de las ecuaciones.

En la metodología descrita y en otros métodos más simples que son usualmente aceptados por los códigos sísmicos, como el método modal espectral y los métodos de la carga o desplazamiento equivalentes, la perturbación es producida de manera simultánea en todas las bases en el caso de una acción sísmica o los puntos de aplicación de la carga, además que la rigidez de la totalidad de la estructura entra en consideración de manera instantánea a la excitación y que efectos locales, como un debilitamiento de un sector en el interior de la estructura, pueden afectar la evolución temporal y espacial de la perturbación.

## 2.2. Método de propagación de ondas

En el método de la propagación de ondas, el cual es comparado en este trabajo con la metodología clásica antes descrita, parte de la aplicación de la segunda ley de Newton y resuelve la misma ecuación dinámica Ec. (1), en cada paso de tiempo utilizado, de manera local en cada nodo y elemento del sistema. El software utilizado para el análisis con esta metodología es COMSOL Multiphysics (Comsol, 2016). El desempeño del mismo y de los métodos de integración que incluye ya fueron analizados en un trabajo anterior (Sierra et al., 2016)

Se plantea un breve resumen de la transmisión de ondas en barras de comportamiento elástico. Para ello se considera una barra de sección transversal  $A$ , constituida por un material de módulo de elasticidad igual a  $E$  y una densidad  $\rho$ . En la Figura 2 se esquematiza la barra y se separa un elemento diferencial de la misma.

Aplicando la segunda Ley de Newton en el elemento diferencial, resulta

$$\sum F = m a \rightarrow -\sigma A + \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx\right)A = \frac{\gamma A dx}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7)$$

Siendo  $\gamma$  el peso específico del material. Considerando al material elástico lineal, utilizando la ley de elasticidad de Hooke, podemos expresar la tensión en función de la deformación de la siguiente forma:

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8)$$

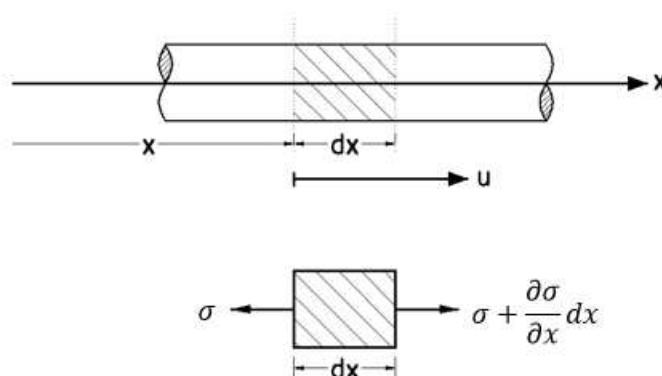


Figura 2: Barra elástica

Reemplazando Ec. (8) en Ec. (7) resulta:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (9)$$

Haciendo:

$$v_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (10)$$

Resulta:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v_c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (11)$$

La Ec. (11) es la ecuación de la onda de presión longitudinal y el término  $v_c$  es la velocidad de propagación de la misma. La ecuación resultante resulta una Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales o EDP, de 2º orden del tipo hiperbólico. La solución más general para una ecuación hiperbólica a coeficientes constantes es la siguiente:

$$u(x, t) = F(v_c t + x) + G(v_c t - x) \quad (12)$$

Donde  $F$  y  $G$  son funciones dependientes de las condiciones iniciales. Se puede interpretar como la superposición de dos pulsos que viajan en sentidos opuestos con una velocidad  $v_c$ .

A continuación, se realiza una introducción teórica al problema tridimensional de propagación de ondas, para un material elástico lineal e isótropo.

Considerando las tensiones actuantes en un elemento diferencial de un medio elástico de lados  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$ , se obtienen las ecuaciones diferenciales del movimiento sumando las fuerzas en las tres direcciones.

En la dirección del eje  $x$  se obtiene:

$$\left[ \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) - \sigma_x \right] (dy)(dz) + \left[ \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) - \tau_{zx} \right] (dx)(dy) + \left[ \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \tau_{yx} \right] (dx)(dz) = \rho(dx)(dy)(dz) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (13)$$

Donde  $\rho$  es la densidad del medio y  $u$  es la componente del desplazamiento en dirección  $x$ . Operando se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (14)$$

Análogamente se obtienen las sumatorias según  $y$  y  $z$ . Ec. (15) y Ec. (16).

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (16)$$

Donde  $v$  y  $w$  son las componentes del desplazamiento en la dirección  $y$  y  $z$  respectivamente.

Siendo el material elástico lineal e isótropo son válidas las relaciones dadas por la ley de Hooke. Teniendo en cuenta la simetría del tensor de tensiones de Cauchy, derivando la Ec. (14) con respecto a  $x$ , Ec. (15) respecto a  $y$  y Ec. (16) con respecto a  $z$  y sumándolas, resulta: (ver Das y Ramana (2010) para el desarrollo completo)

$$\frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2G}{\rho} \nabla^2 \bar{\varepsilon} = v_p^2 \nabla^2 \bar{\varepsilon} \quad (17)$$

Donde  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  y las constantes del material son:

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (18)$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad y  $\mu$  el coeficiente de Poisson. La Ec. (17) es la ecuación de onda primaria, onda-P u onda de compresión y el término  $v_p$  es la velocidad de propagación de las mencionadas ondas.

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (19)$$

Comparando la Ec. (19) con Ec. (10) se observa que la velocidad de propagación de las ondas-P es mayor a la velocidad de la onda de presión longitudinal.

Teniendo en cuenta las siguientes rotaciones:

$$\bar{\omega}_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \bar{\omega}_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \bar{\omega}_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (20)$$

Derivando la Ec. (15) con respecto a  $z$  y la Ec. (16) con respecto a  $y$  y restando las mismas, operando se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}_x}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \nabla^2 \bar{\omega}_x = v_s^2 \nabla^2 \bar{\omega}_x \quad (21)$$

Operando de manera similar se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}_y}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \bar{\omega}_y \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}_z}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \bar{\omega}_z \quad (23)$$

Las ecuaciones Ec. (21), Ec. (22) y Ec. (23) son las ecuaciones de las ondas de distorsión, ondas de corte u ondas-S y el término  $v_s$  es la velocidad de propagación de dichas ondas.

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (24)$$

En resumen, hay dos tipos de ondas que se propagan en el medio elástico infinito, las ondas-P y las ondas-S. Cada una tiene una velocidad de propagación diferente  $v_p$  y  $v_s$ , que se relacionan de la siguiente forma:

$$\frac{v_p}{v_s} = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}} \quad (25)$$

La Ec. (25) muestra que la relación es siempre mayor que 1, por lo que la velocidad de las ondas-P es mayor a la de las ondas-S. Además para  $\nu = 0,5$  (caso incompresible) la  $v_p$  tiende a infinito.

### 3. EJEMPLO DE VALIDACIÓN

Se realiza un modelo simple, con solución analítica, para adoptar una discretización espacial y temporal que sea estable y verificar los resultados obtenidos con ambos métodos de cálculo. Se plantea resolver un sistema masa - resorte, compuesto de una columna empotrada en la base con una masa concentrada en el extremo superior, sin inercia rotacional, a la cual se le aplica una carga variable  $P(t)$  que consiste de un pulso como se describe en la Figura 3.

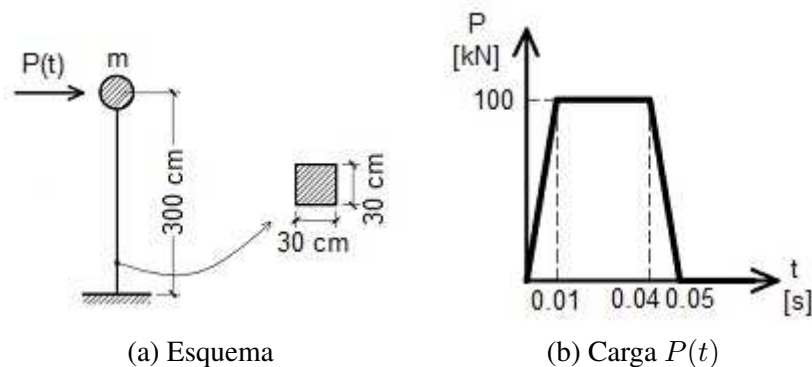


Figura 3: Modelo de verificación

Los valores de los parámetros se adoptan

$$E = 5000 [MPa] \quad \nu = 0,3 \quad \rho = 2400 \frac{kg}{m^3} \quad m = 179 ton \quad A = 900 cm^2 \quad (26)$$

El coeficiente de amortiguamiento estructural se adopta

$$\xi = 0,05 \quad (27)$$

Para el método clásico se utiliza un único elemento con un  $\Delta t = 0,01 s$ .

Para el modelo de propagación de onda, se obtiene la velocidad de onda en el elemento tipo Viga, con las características de material de la Ec. (26) del modelo de COMSOL.

$$c = 1674,7 \frac{m}{s} \quad (28)$$

Utilizando el criterio de Courant, la longitud del elemento  $l$ , según el paso del tiempo  $\Delta t$  para la integración adoptado debe ser menor a

$$l < \Delta t c \quad (29)$$

Adoptando por estabilidad numérica del método de integración el paso de tiempo en

$$\Delta t = 0,00179 s \quad (30)$$

La longitud de discretización del elemento resulta

$$l < 0,30 m \quad (31)$$

Se adopta, para evitar estar en el límite de los valores de la relación de Courant, una longitud de elemento

$$l = 0,12 m \rightarrow \frac{L}{l} = \frac{3 m}{0,12 m} = 25 \text{ divisiones} \quad (32)$$

En ambos casos se modela con un material elástico lineal.

Se obtiene el desplazamiento horizontal,  $u$ , en  $cm$  en función del tiempo,  $t$ , en el punto extremo, donde se encuentra la masa concentrada, para ambos casos y se presenta en el siguiente gráfico hasta  $t = 25 s$ .

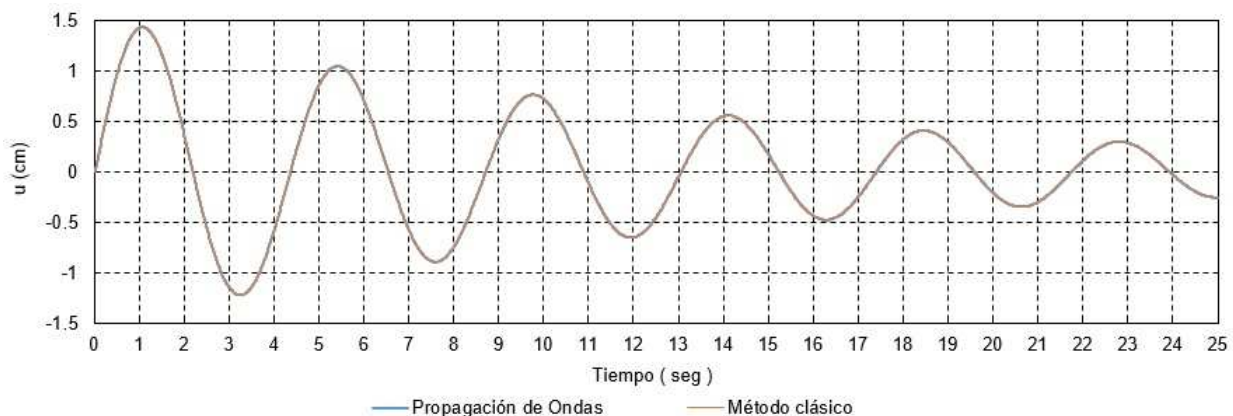


Figura 4: Desplazamiento horizontal en masa concentrada

Como puede observarse en la Figura 4 las respuestas obtenidas con ambos métodos son idénticas. En la Tabla 1 se observan los valores máximos y mínimos del desplazamiento en  $cm$  obtenidos por ambos métodos y la relación entre ellos.

Se concluye que la discretización empleada en el modelo de verificación es estable y conduce a resultados satisfactorios. Se obtuvieron resultados equivalentes por ambas metodologías, lo cual era esperable ya que para la discretización temporal utilizada en el análisis de resultados y gráficas ( $\Delta t = 0,01 s$ ) la onda avanza ( $\Delta t c = 1674,7 cm$ ), más de cinco veces la altura de la columna de la estructura analizada.



	Max	Min
Propagación de ondas (a)	1,4310 cm	-1,2229 cm
Métodología clásica (b)	1,4315 cm	-1,2232 cm
Relación (b)/(a)	1,0004	1,0003

Tabla 1: Desplazamientos horizontales máximos y mínimos

#### 4. EJEMPLO COMPLEMENTARIO

En este ejemplo se complejiza la estructura del punto anterior, agregando otro nivel más, también con la misma carga concentrada, que esta vez se le agrega inercia rotacional. En la Figura 5 pueden observarse las características del mismo.

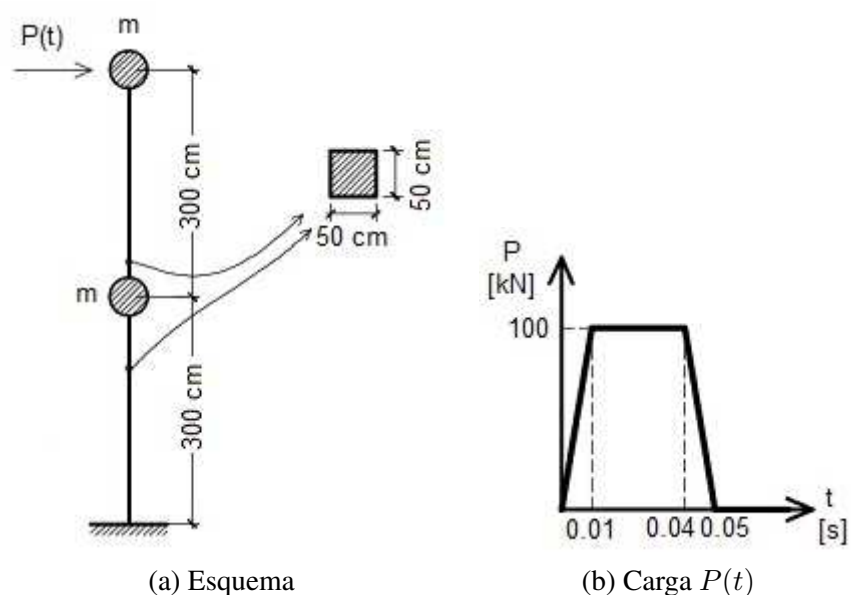


Figura 5: Modelo del ejemplo complementario

Los valores de los parámetros se adoptan

$$E = 5000 [MPa] \quad \nu = 0,3 \quad \rho = 2400 \frac{kg}{m^3} \quad A = 2500 cm^2 \quad (33)$$

$$I_0 = 75653,3 kgm^2 \quad m = 113,5 ton \quad (34)$$

Donde  $I_0$  es la inercia rotacional de las masas concentradas. El coeficiente de amortiguamiento estructural se adopta

$$\xi = 0,05 \quad (35)$$

Para el método clásico se utilizan dos elementos,  $l = 3 m$  con un  $\Delta t = 0,01 s$ .

Para el modelo de propagación de onda, se discretiza con la misma longitud Ec. (32) y mismo paso de tiempo Ec. (30). Resulta

$$\frac{L}{l} = \frac{6 m}{0,12 m} = 50 \text{ divisiones} \quad (36)$$

En las Figuras 6 y 7 se presentan el desplazamiento horizontal,  $u$ , de la masa intermedia y de la masa superior en función del tiempo,  $t$ , hasta los 10 s.

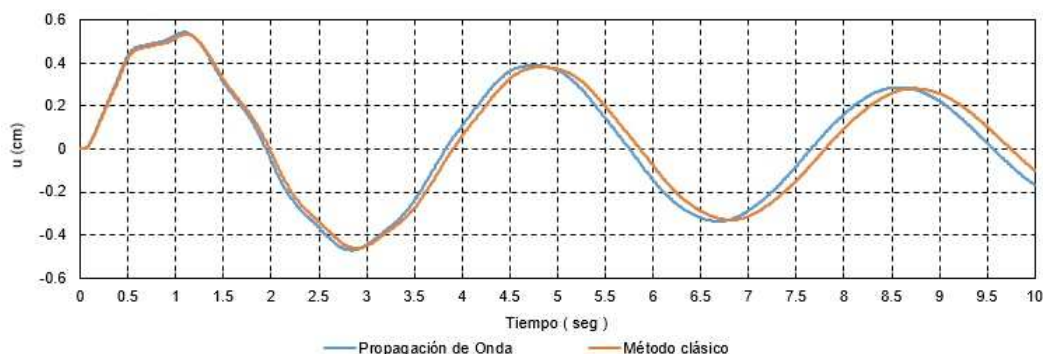


Figura 6: Desplazamiento horizontal en masa concentrada intermedia

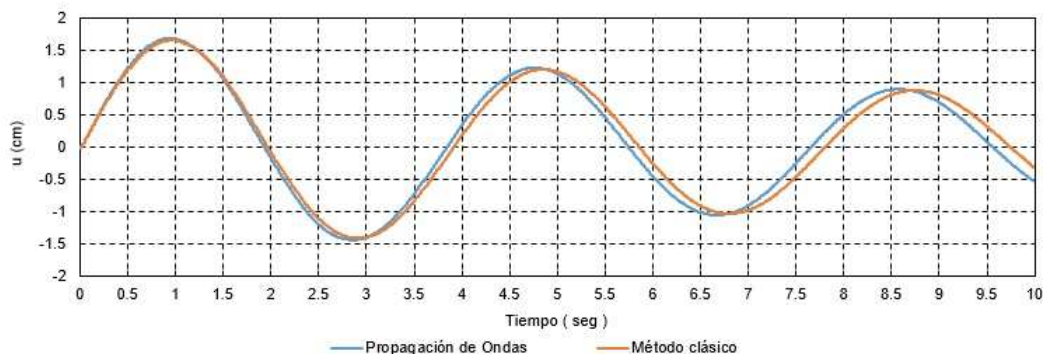


Figura 7: Desplazamiento horizontal en masa concentrada del extremo superior

Como pueden observarse en las Figuras 6 y 7 las respuestas obtenidas con ambos métodos son similares. Se observa un desfase entre las respuestas, es decir, un cambio en los períodos de las estructuras, lo que evidencia distintas rigideces de los sistemas analizados. Esto puede deberse a la diferencia en la discretización espacial de ambos sistemas y a la aproximación en el método de integración numérico de Newmark. En la Tabla 2 se observan los valores máximos y mínimos del desplazamiento en cm obtenidos por ambos métodos y la relación entre ellos para ambos puntos.

	Masa Intermedia		Masa Superior	
	Max	Min	Max	Min
Propagación de ondas (a)	0,5432 cm	-0,4712 cm	1,6923 cm	-1,4397 cm
Métodología clásica (b)	0,5327 cm	-0,4622 cm	1,6599 cm	-1,4120 cm
Relación (b)/(a)	0,9807	0,9808	0,9809	0,9808

Tabla 2: Desplazamientos horizontales máximos y mínimos

Para este nuevo ejemplo se obtuvieron resultados prácticamente equivalentes, con la salvedad del cambio en el período de la estructura según el método empleado mencionado con anterioridad. Pese a esto último los resultados se consideran satisfactorios.

## 5. PRIMER EJEMPLO DE ANÁLISIS

Una de las diferencias enunciadas en la introducción teórica entre las metodologías analizadas en el presente trabajo, es que en las metodologías clásicas todo el mecanismo resistivo de la estructura reacciona instantáneamente a la acción de la carga, lo que en el análisis por propagación de ondas no sucede, sino que la respuesta de la estructura se produce acorde a la evolución espacial de la perturbación sobre la misma. Para analizar este efecto en una estructura simple, se plantea este primer ejemplo, el cual es un caso similar al anterior, pero esta vez la estructura es 10 veces más alta. En la Figura 8 pueden observarse las características de la misma.

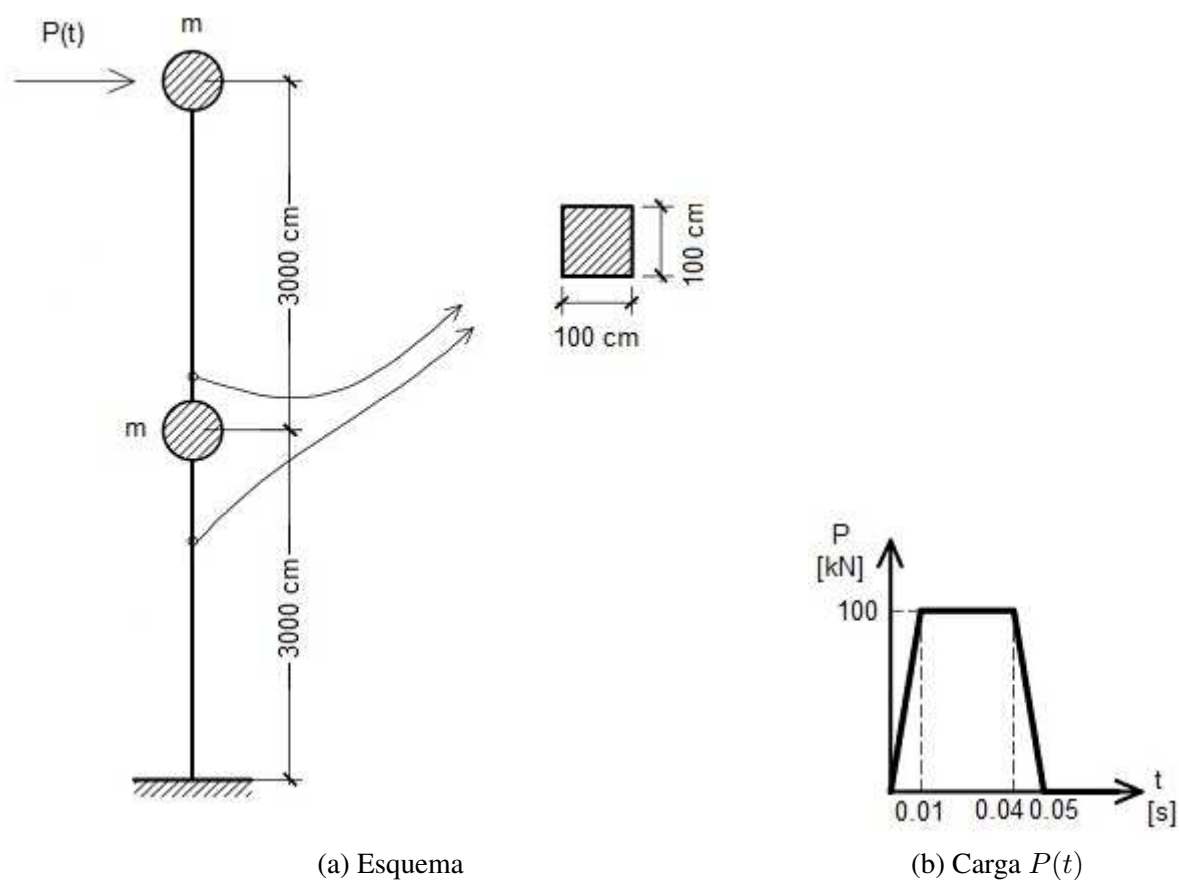


Figura 8: Modelo del primer ejemplo de análisis

Además se reduce el paso del tiempo considerado para el método clásico y para el análisis y gráfico de resultados del método de propagación de ondas, el cual el paso de tiempo del método de integración es el de la Ec. (30), para que en cada uno la onda avance alrededor de un décimo de la altura de cada columna.

$$\Delta t = 0,002 \text{ s} \longrightarrow \Delta x = c \Delta t = 3,35 \text{ m} \quad (37)$$

Los valores de los parámetros se adoptan

$$E = 5000 \text{ [MPa]} \quad \nu = 0,3 \quad \rho = 2400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad A = 10000 \text{ cm}^2 \quad (38)$$

$$I_0 = 75653,3 \text{ kgm}^2 \quad m = 113,5 \text{ ton} \quad (39)$$

Donde  $I_0$  es la inercia rotacional de las masas concentradas. El coeficiente de amortiguamiento estructural se adopta

$$\xi = 0,05 \tag{40}$$

En las Figuras 9 y 10 se observan el desplazamiento horizontal,  $u$ , de la masa intermedia y de la masa extrema superior en función del tiempo,  $t$ , y la reacción horizontal,  $R$  en la base hasta los 25 s. La gráfica de la reacción se repite con valor extremo  $t = 5$  s para observar las diferencias iniciales obtenidas.

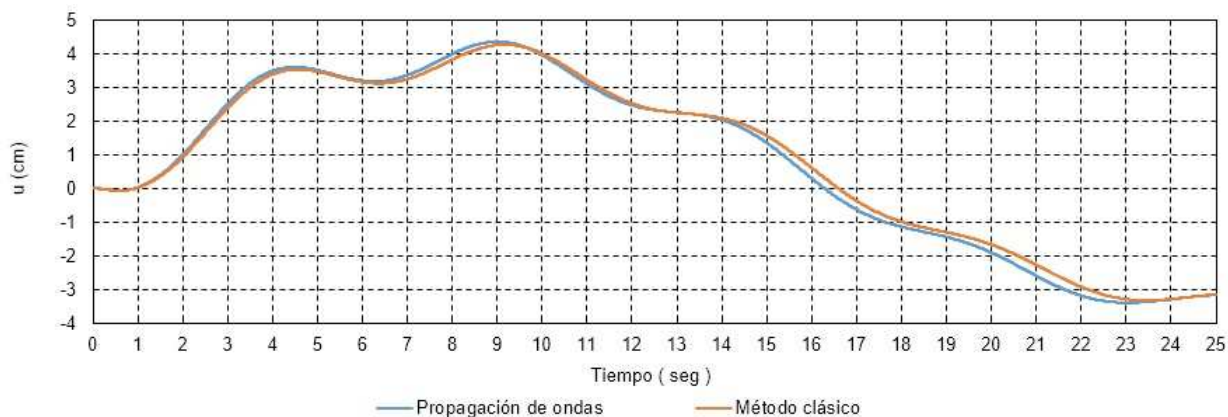


Figura 9: Desplazamiento horizontal en masa concentrada intermedia

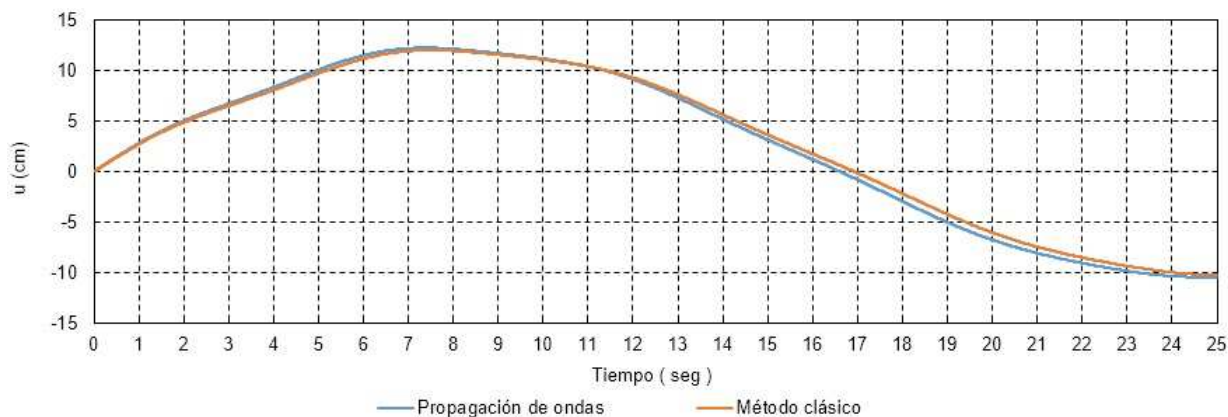


Figura 10: Desplazamiento horizontal en masa concentrada extrema superior

Los desplazamientos de las masas concentradas, ver Figuras 9 y 10, resultan similares por ambos métodos. En el caso de la reacción horizontal de la base, al comienzo se obtienen comportamientos distintos, ver Figura 12, debido lo expuesto al comienzo de la sección, pero luego de 2 s las gráficas se aparean. Se observa el mismo desfase expuesto en la sección anterior. En la Tabla 3 se observan los valores máximos y mínimos del desplazamiento en cm para ambos puntos y de la reacción en la base en KN obtenidos por ambos métodos y la relación entre ellos.

Los valores máximos y mínimos fueron muy similares, excepto el caso del valor máximo de la reacción en la base.

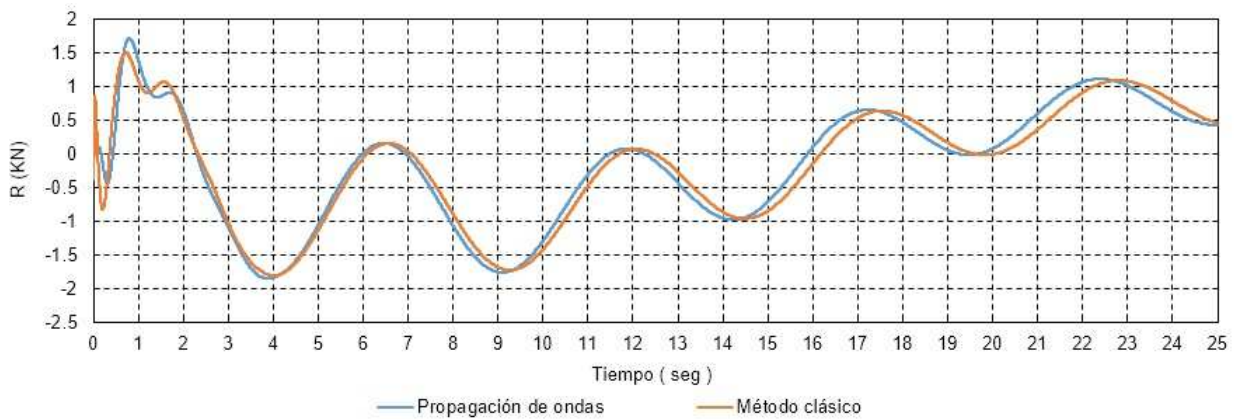


Figura 11: Reacción en la base hasta 25 s

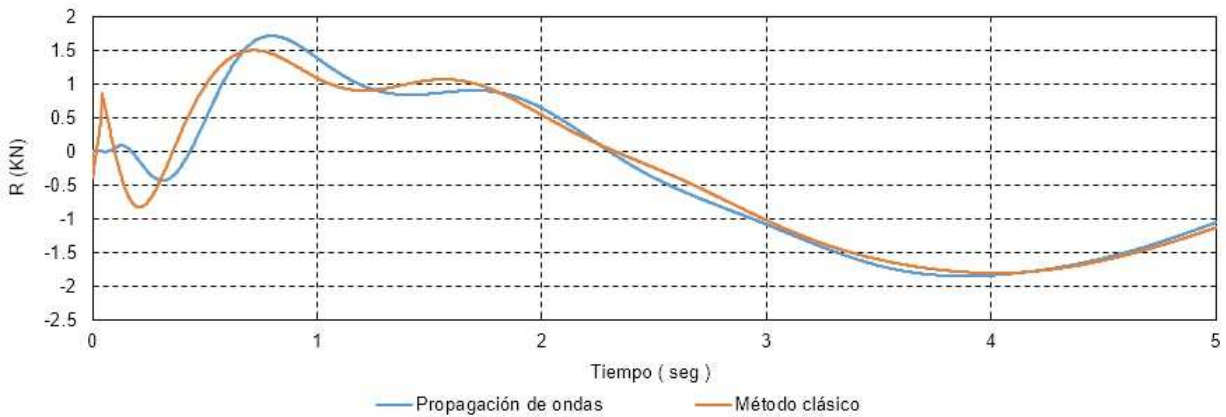


Figura 12: Reacción en la base hasta 5 s

### 6. SEGUNDO EJEMPLO DE ANÁLISIS

En este segundo ejemplo se plantea la comparación de ambas metodologías en una estructura similar a la del ejemplo anterior, pero que esta vez presenta en la columna superior un sector, de un décimo de la altura de la misma, con una sección reducida, simulando un debilitamiento. En la Figura 13 se muestra un esquema de la estructura planteada.

Se utiliza el mismo paso de tiempo indicado en la Ec. (37). Los valores de los parámetros se adoptan

$$E = 5000 [MPa] \quad \nu = 0,3 \quad \rho = 2400 \frac{kg}{m^3} \quad A = 10000 \text{ cm}^2 \quad A_1 = 625 \text{ cm}^2 \quad (41)$$

$$I_0 = 75653,3 \text{ kgm}^2 \quad m = 113,5 \text{ ton} \quad (42)$$

	Masa Intermedia		Masa Superior		Reacción en la base	
	Max	Min	Max	Min	Max	Min
Ondas (a)	4,351 cm	-3,388 cm	12,220 cm	0 cm	1,71 KN	-1,85 KN
Clásica (b)	4,270 cm	-3,320 cm	11,986 cm	0 cm	1,50 KN	-1,80 KN
Relación (b)/(a)	0,981	0,980	0,981	-	0,876	0,976

Tabla 3: Desplazamientos horizontales y reacción en la base, máximos y mínimos

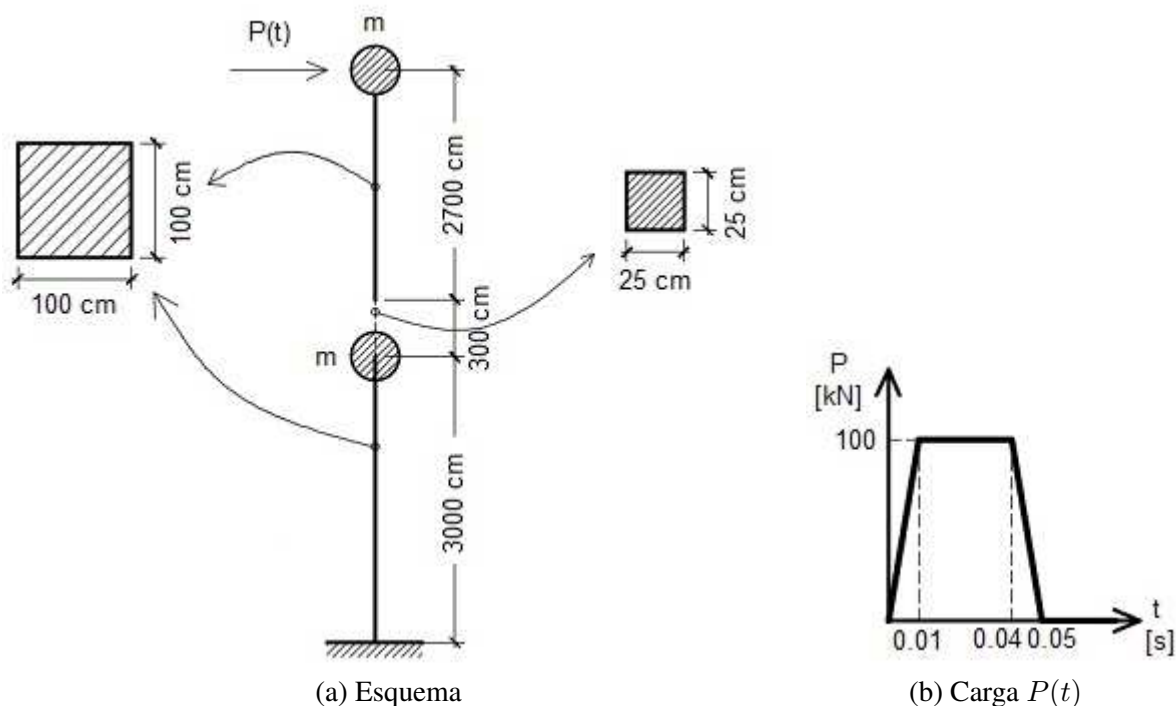


Figura 13: Modelo del segundo ejemplo de análisis

Donde  $I_0$  es la inercia rotacional de las masas concentradas. El coeficiente de amortiguamiento estructural se adopta

$$\xi = 0,05 \tag{43}$$

En las Figuras 14 y 15 se observan el desplazamiento horizontal,  $u$ , de la masa intermedia y de la masa extrema superior en función del tiempo,  $t$ , y la reacción horizontal,  $R$  en la base hasta los 25 s. La gráfica de la reacción se repite con valor extremo  $t = 5$  s para observar las diferencias iniciales obtenidas.

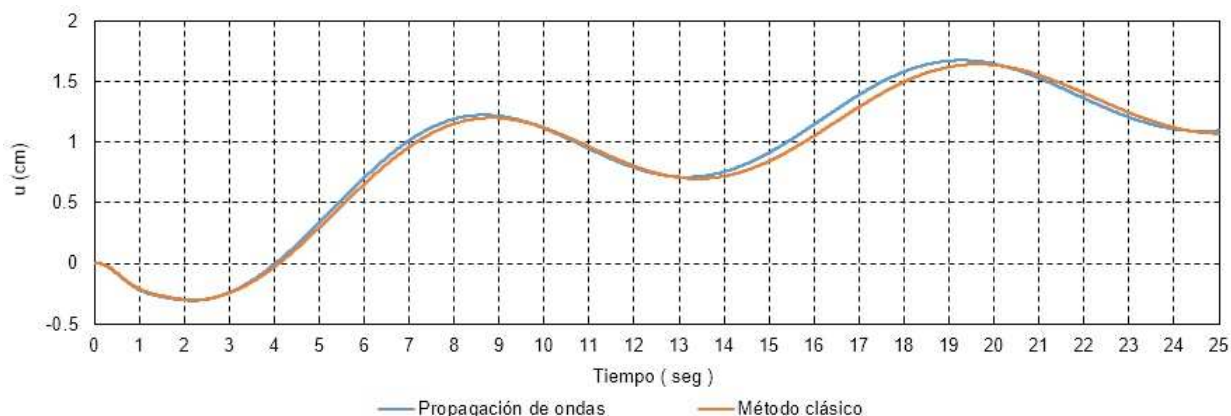


Figura 14: Desplazamiento horizontal en masa concentrada intermedia

Como puede observarse en las Figuras 14 y 15, los desplazamientos son similares con ambas metodologías. Al igual que en el ejemplo anterior se observan diferencias en la reacción

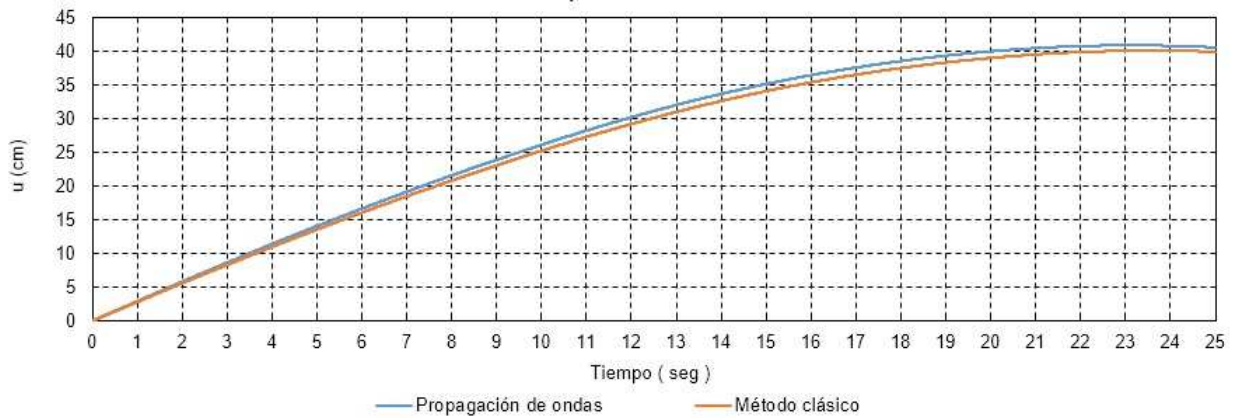


Figura 15: Desplazamiento horizontal en masa concentrada extrema superior

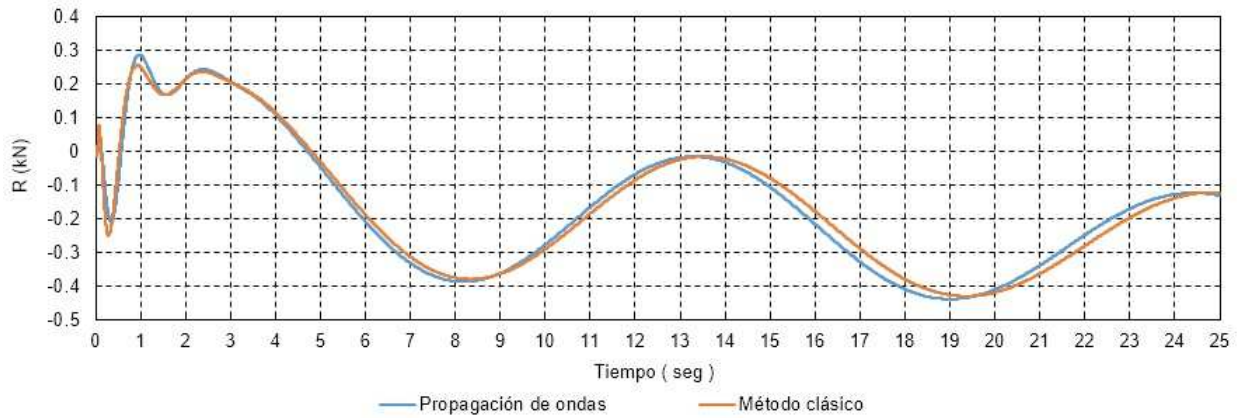


Figura 16: Reacción en la base hasta 25 s

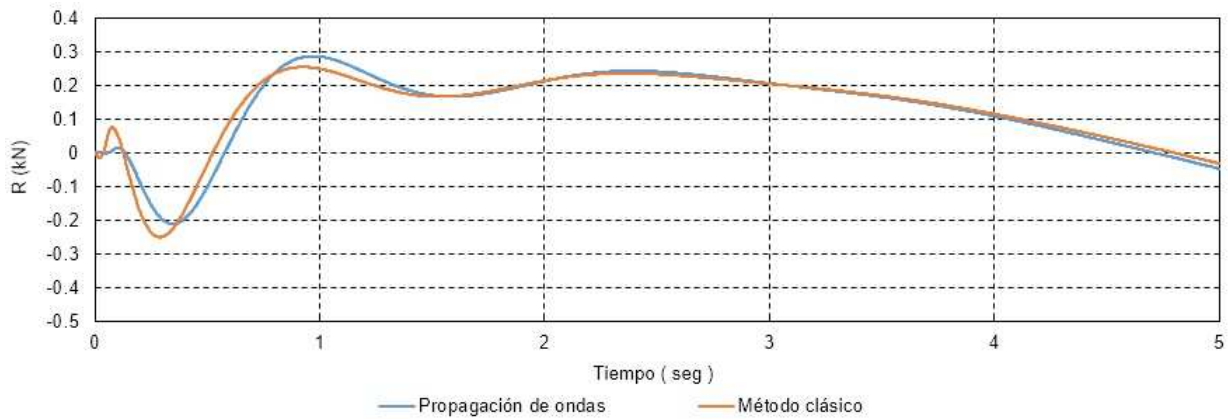


Figura 17: Reacción en la base hasta 5 s

en los primeros segundos. En la Tabla 4 se observan los valores máximos y mínimos del desplazamiento en cm para ambos puntos y de la reacción en la base en KN obtenidos por ambos métodos y la relación entre ellos.

Se aumenta el paso del tiempo a  $\Delta t = 0,02 s$  y se muestran los resultados para mas ciclos, hasta  $t = 250 s$ . Además de los desplazamientos de las masas y la reacción en la base, se muestra el corte,  $Q$ , y el momento,  $M$ , en el elemento a la altura de la masa concentrada intermedia, a

	Masa Intermedia		Masa Superior		Reacción en la base	
	Max	Min	Max	Min	Max	Min
Ondas (a)	1,675 cm	-0,305 cm	40,847 cm	0 cm	0,29 KN	-0,44 KN
Clásica (b)	1,643 cm	-0,300 cm	40,067 cm	0 cm	0,25 KN	-0,43 KN
Relación (b)/(a)	0,981	0,982	0,981	-	0,887	0,981

Tabla 4: Desplazamientos horizontales y reacción en la base, máximos y mínimos

fin de observar si el paso por la reducción de sección produjo distintos comportamientos según la metodología de cálculo.

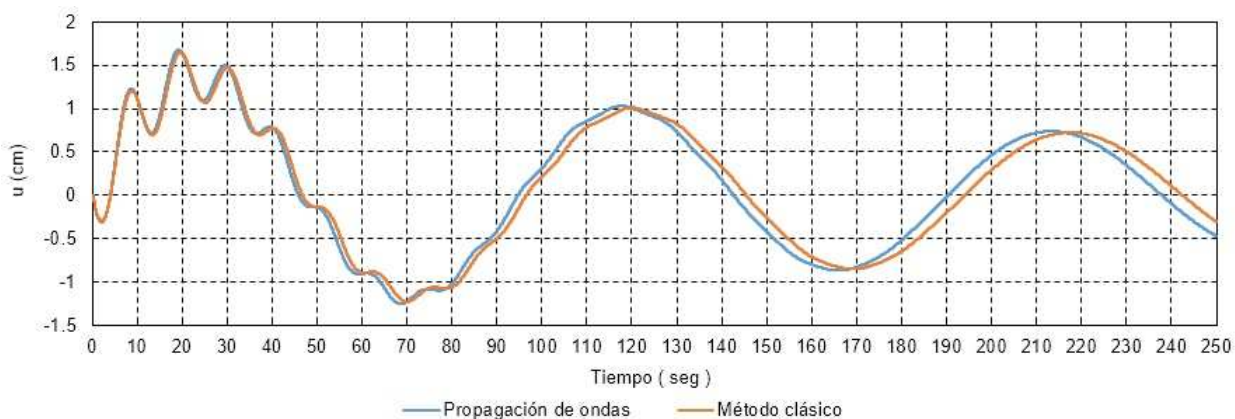


Figura 18: Desplazamiento horizontal en masa concentrada intermedia

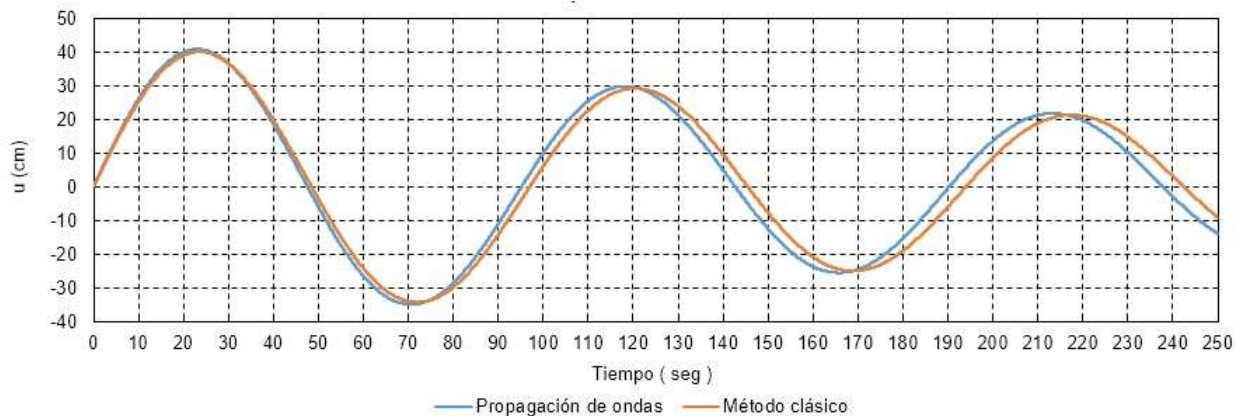


Figura 19: Desplazamiento horizontal en masa concentrada extrema superior

En las Figuras 21 22 puede observarse que no hay modificaciones en los esfuerzos internos.



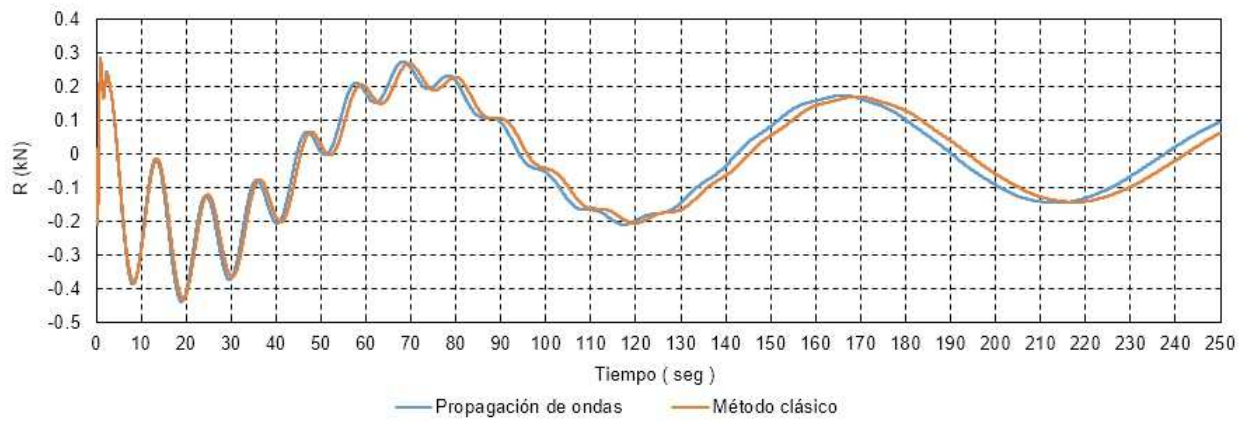


Figura 20: Reacción en la base

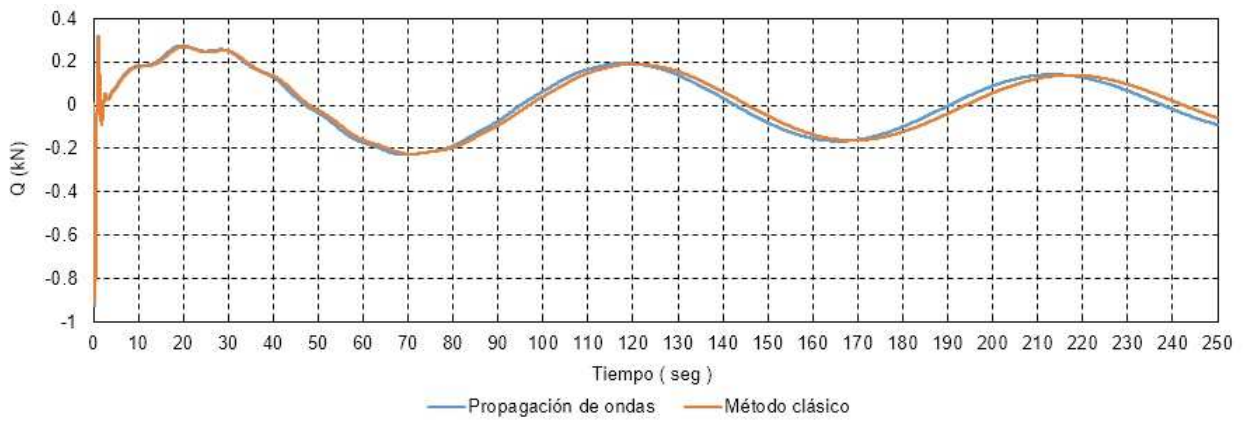


Figura 21: Corte en masa concentrada intermedia

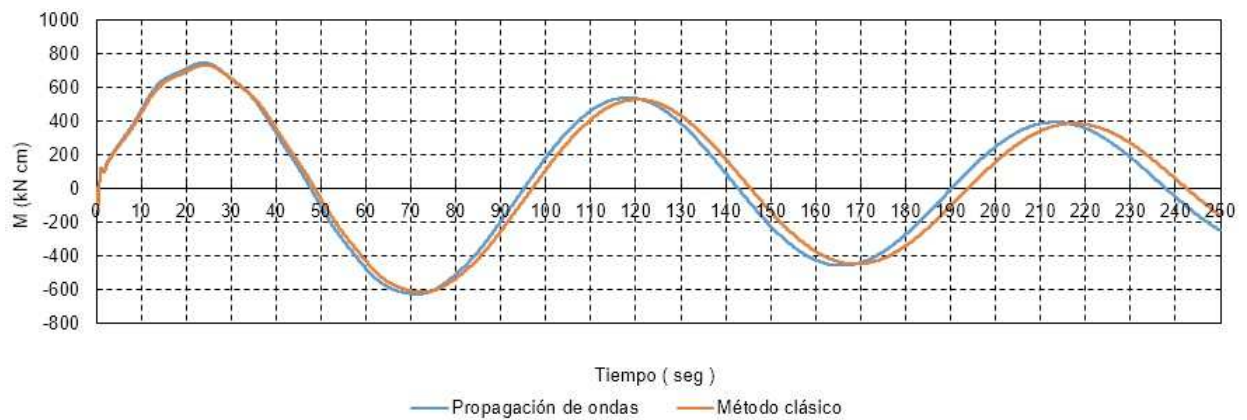


Figura 22: Momento en masa concentrada intermedia

### 7. TERCER EJEMPLO DE ANÁLISIS

En esta sección se va a analizar la respuesta estructural del pórtico esquematizado en la Figura 23. Se aplican tres impactos sobre el suelo, utilizando un modelo descrito en (Sierra et al., 2016) a una cierta distancia de la estructura y se obtiene la historia de los desplazamientos verticales y horizontales de “campo libre” en 3 puntos distantes entre sí la misma separación que las bases del pórtico, los que se aplican sobre el modelo del pórtico y se analiza con la técnica de propagación de ondas. Los desplazamientos impuestos pueden observarse en las Figuras 24 y 25.

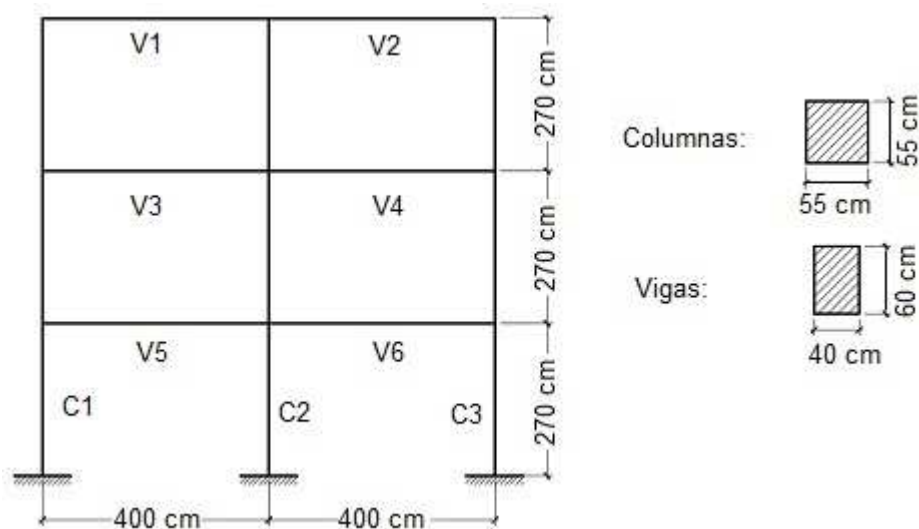


Figura 23: Modelo del tercer ejemplo de análisis

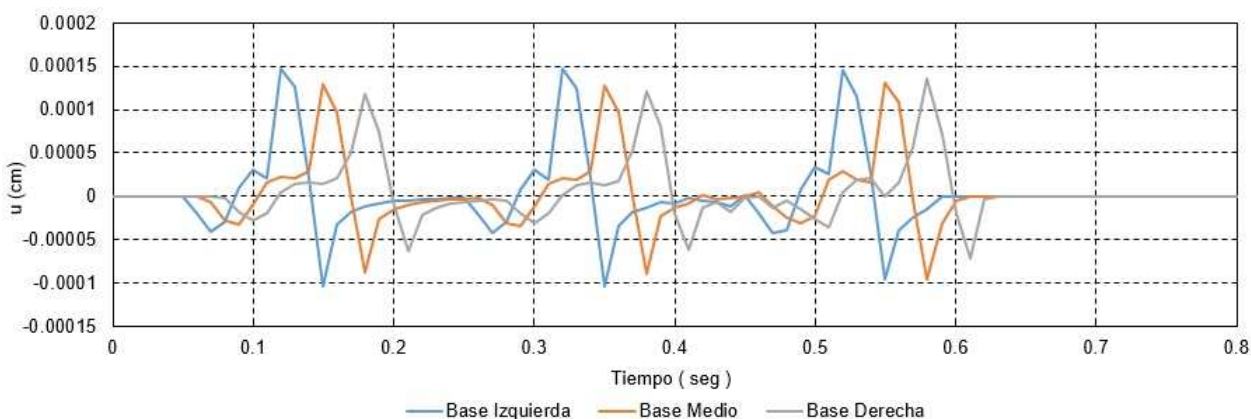


Figura 24: Desplazamiento impuesto horizontal en bases

Además, del mismo análisis del modelo de suelo, se obtiene la historia de aceleración horizontal y vertical en el punto que corresponde a la ubicación de la base central del pórtico, la que se aplica a las 3 bases simultáneamente, y el pórtico es analizado con la metodología clásica. En la Figura 26 se observan los acelerogramas horizontales y verticales obtenidos. Complementariamente se analiza el pórtico con la metodología clásica, pero únicamente con la aceleración horizontal.

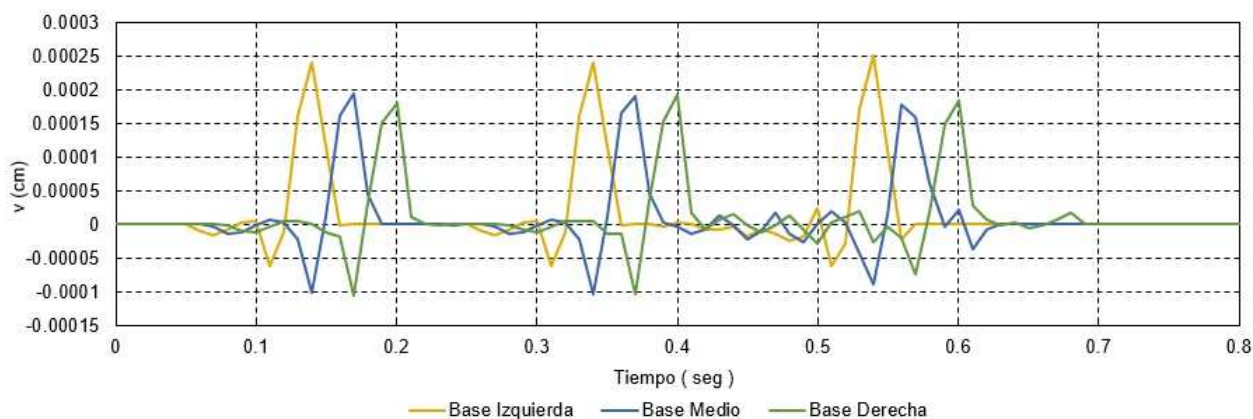


Figura 25: Desplazamiento impuesto vertical en bases

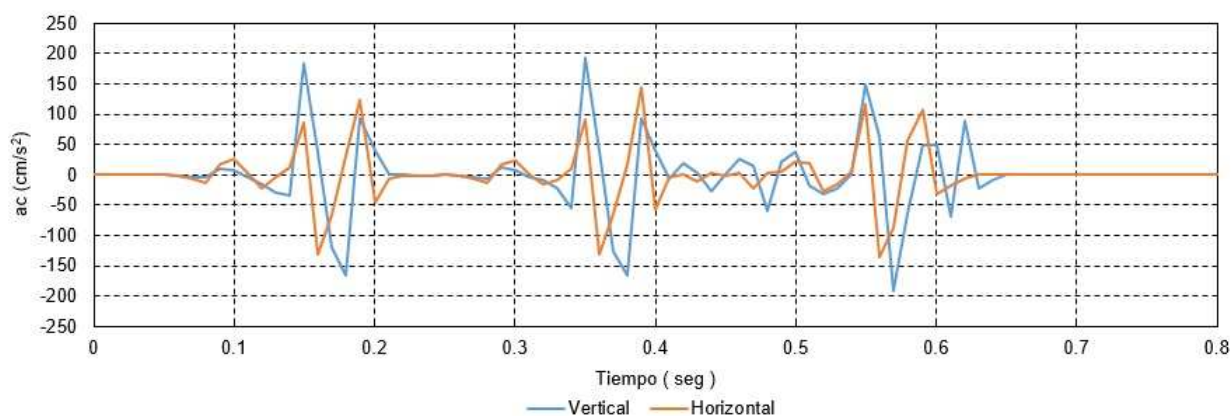


Figura 26: Acelerogramas

Se utiliza el mismo paso de tiempo indicado en la Ec. (37). Los valores de los parámetros se adoptan

$$E = 23500 [MPa] \quad \nu = 0,3 \quad \rho = 2400 \frac{kg}{m^3} \quad A_c = 3025 \text{ cm}^2 \quad A_v = 2400 \text{ cm}^2 \quad (44)$$

El coeficiente de amortiguamiento estructural se adopta

$$\xi = 0,05 \quad (45)$$

Se observan los esfuerzos internos máximos y mínimos obtenidos en los distintos elementos de la estructura por medio de los distintos análisis realizados, en las Figuras 27 y 28.

En la Figura 29 se observa la evolución del momento, en la sección central de la viga V1 en función del tiempo, obtenido por el análisis de propagación de ondas y por el método clásico con aceleración horizontal y vertical.

En la Tabla 5 se exponen los valores % de la relación entre los máximos y mínimos obtenidos por la metodología de la propagación de ondas con respecto a la metodología clásica con aceleración horizontal vertical. En lo que respecta a los momentos y cortes se obtuvieron valores de 3 veces lo obtenido por metodología clásica, en lo que respecta a normal más de 7 veces en las vigas, cuyos valores son bajos, y de 2 veces en las columnas donde el normal es considerable.

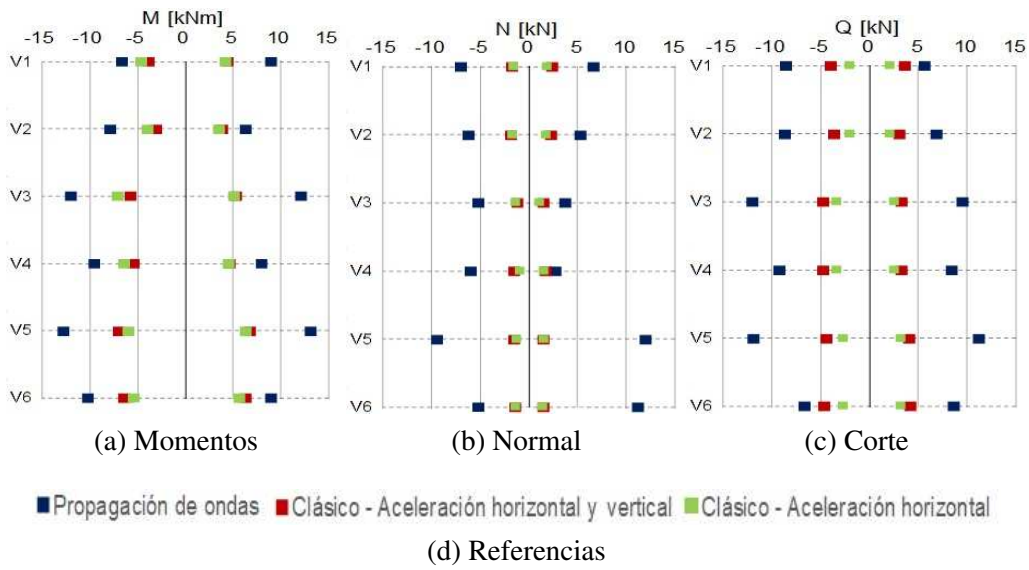


Figura 27: Máximos y mínimos en vigas

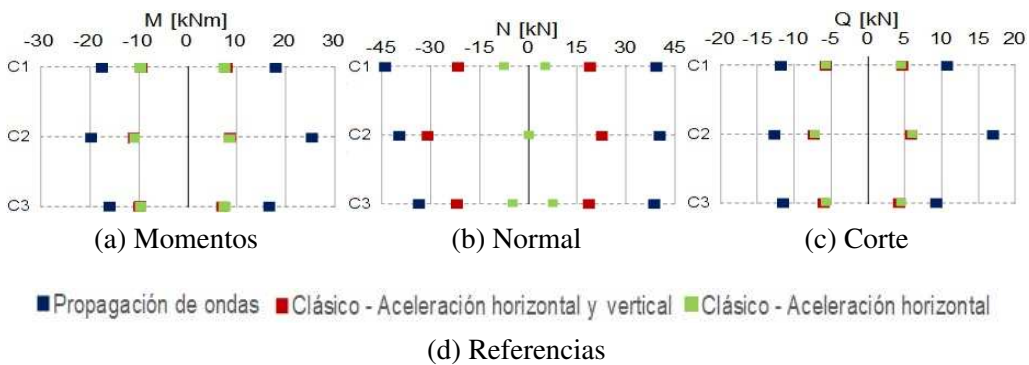


Figura 28: Máximos y mínimos en columnas

Elemento	Mz		N		Q	
	Max	Min	Max	Min	Max	Min
V1	202 %	171 %	274 %	421 %	154 %	215 %
V2	160 %	263 %	234 %	352 %	220 %	238 %
V3	228 %	211 %	238 %	438 %	285 %	253 %
V4	169 %	177 %	157 %	407 %	257 %	195 %
V5	194 %	183 %	772 %	666 %	272 %	272 %
V6	119 %	159 %	713 %	405 %	204 %	145 %
C1	227 %	185 %	208 %	205 %	226 %	210 %
C2	292 %	179 %	177 %	128 %	284 %	173 %
C3	232 %	163 %	206 %	154 %	216 %	192 %

Tabla 5: Relación en % de los resultados obtenidos por el método propagación de ondas con respecto a los de metodología clásica con aceleración horizontal y vertical.

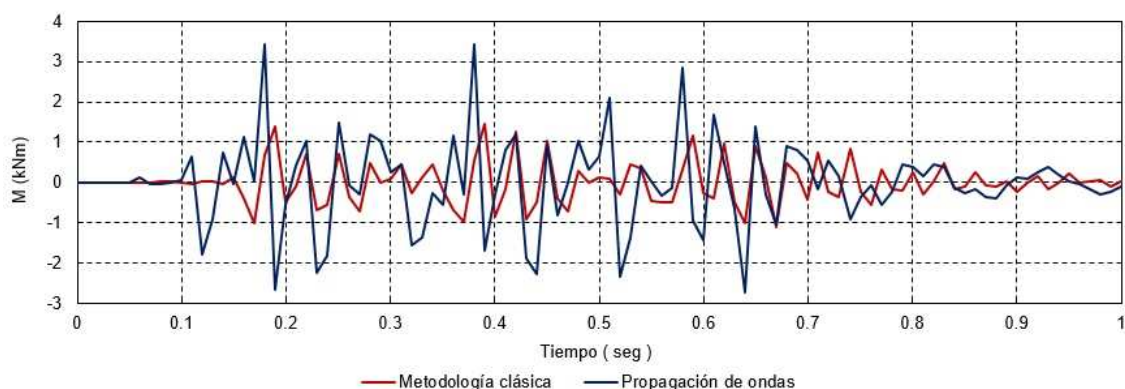


Figura 29: Momentos en V1 en función del tiempo

Como puede observarse en la Figura 29, los valores obtenidos por el método de la propagación de ondas son considerablemente mayores que en la metodología clásica. Se destaca que los picos de momento obtenidos con propagación de ondas guardan relación con los picos de desplazamiento impuesto en las bases del pórtico.

## 8. RESUMEN Y CONCLUSIONES

En el presente trabajo se analizaron distintos ejemplos simples, con comportamiento elástico lineal, para analizar las diferencias entre la respuesta obtenida resolviendo mediante metodología clásica y mediante la propagación de ondas.

En el primer ejemplo de validación se analizó una columna en voladizo con una masa concentrada en el extremo superior a la cual se le aplica un impacto horizontal. En el mismo se definió la discretización espacial y temporal que permita analizar la propagación de ondas, sin problemas de precisión ni de estabilidad de integración numérica. En el ejemplo complementario se analiza la estructura, agregando un nivel más al ejemplo de validación y agregando inercia rotacional a las masas concentradas.

En el primer ejemplo de análisis se evalúa la diferencia obtenida en la respuesta, considerando que el mecanismo resistivo de la estructura reacciona instantáneamente a la acción de la carga con la metodología clásica, cuando en la propagación de ondas la respuesta se produce acorde a la evolución espacial de la perturbación. Para realizar la evaluación se analiza una estructura de considerable longitud con un paso de tiempo menor a los casos anteriores.

El segundo ejemplo de análisis es similar al primero, pero se agrega una reducción de sección para evaluar si la presencia del debilitamiento modifica el comportamiento en análisis elástico lineal.

En el tercer ejemplo se analiza un pórtico con el método de propagación de ondas introduciendo desplazamientos impuestos en las bases, tanto horizontales como verticales, con diferentes tiempo de arribo para cada base. También se analiza la estructura con la metodología clásica introduciendo aceleración horizontal y vertical a todas las bases por igual, correspondiente a la base intermedia. Se encontraron diferencias considerables en los esfuerzos internos de los elementos, siendo mayores en el análisis de propagación de ondas que con la metodología clásica. En conclusión, estas diferencias abren la posibilidad de poder explicar fallas observadas en terremotos no predichas con los análisis clásicos.

En trabajos futuros se van a analizar estas diferencias en otras estructuras y condiciones de carga que hagan incursionar la estructura en el campo no lineal, para evaluar la sensibilidad de los resultados a los distintos parámetros adoptados.

## REFERENCIAS

- Carydis P. y Markantonis S. A comparative earthquake analysis of structures by a wave propagation method. *16<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering, 16WCEE, ID 2063*, 2017.
- Chen S. y Fu Y. Application of neural networks and structural wave propagation phenomenon to quantitative damage evaluation. *16<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering, 16WCEE, ID 381*, 2017.
- Chopra A.K. *Dynamics of Structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering, Second Edition*. Prentice-Hall, 2001.
- Clough R.W. y Penzien J. *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, 2003.
- Comsol. *Reference Manual*. COMSOL, 2016.
- Cottrell J., Hughes T., Reali A., y Sangalli G. Isogeometric discretizations in structural dynamics and wave propagation. *ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, ID 1034*, 2007.
- Das B. y Ramana G. *Principles of Soil Dynamics*. Cengage Learning, 2010.
- Doyle J.F. *Wave propagation in structures*. Springer, 1997.
- Dulinska J. y Fabijanska-Kopacz M. Wave passage and incoherence effects on dynamic response of a pre-stressed viaduct under a natural earthquake. *16<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering, 16WCEE, ID 4817*, 2017.
- Möller O., Ascheri J., y Poliotti M. Predicción numérica de vibraciones en estructuras producidas por fuentes distantes. *XXI Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones ENIEF 2014. Publicado en Mecánica Computacional Vol. XXXIII, AMCA*, páginas 1666–1670, 2014.
- Nazarko P. y Ziemianski L. An efficient three-dimensional soil-structure interaction analysis for incident plane waves. *ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, ID 1528*, 2007.
- Sierra P.L., Möller O., Ascheri J., y Poliotti M. Comparación de métodos numéricos en problemas de propagación de vibraciones en medios elásticos. *XXII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones ENIEF 2016. Publicado en Mecánica Computacional Vol. XXIV, AMCA*, páginas 439–458, 2016.