

SIMULACIÓN DE GRANDES VÓRTICES DE UNA CAPA LÍMITE TURBULENTO SOBRE UNA SUPERFICIE RUGOSA

Gabriel Narancio, José Cataldo y Gabriel Usera

*Instituto de Mecánica de los Fluidos e Ingeniería Ambiental, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Julio Herrera y Reissig 565, Montevideo, Uruguay, gnaranci@fing.edu.uy,
<https://www.fing.edu.uy/imfia/>*

Palabras Clave: Simulación de Grandes Vórtices, Capa Límite, Superficie Rugosa.

Resumen. En este trabajo se simulan mediante el método de grandes vórtices (LES) dos capas límites con diferente valor del parámetro de blending entre un esquema upwind y uno centrado. Estas simulaciones se hacen con el programa de código abierto para resolución de flujos de fluidos viscosos *caffa3d.MBRi*. Las simulaciones se hacen en un dominio prismático de $3,84m$ por $3,84m$ de base por $2m$ de altura. Se imponen condiciones de periodicidad en las caras laterales, adherencia en la inferior y simetría en la superior. En la superficie inferior, mediante el método de condiciones de borde inmersas, se fija un arreglo de cubos que forman una rugosidad aerodinámica. Se utiliza una malla uniforme en la dirección del flujo y transversal con un paso de $0,01m$ y variable en la vertical. En total la simulación utiliza 16515072 celdas. El paso temporal es de $0,01s$. Los resultados se analizan en base a las tensiones rasantes, el campo de velocidad, la turbulencia, el balance de energía cinética turbulenta y las escalas. Se obtienen concordancias razonables con el flujo esperado. Por otro lado se encuentran algunos problemas que se relacionan con la disipación numérica que agrega el código.

1. INTRODUCCIÓN

La construcción de edificios altos o con formas inusuales requiere que se realicen ensayos en túnel de viento para evaluar diferentes aspectos: presiones sobre las fachadas, el comportamiento aeroelástico de la estructura, el nivel de confort y riesgo asociado al viento a nivel peatonal, ruido inducido por la interacción entre el viento y la estructura, entre otros aspectos. Para estos ensayos se utilizan túneles de viento tipo capa límite atmosférica, que cuentan con una zona aguas arriba de la ubicación del modelo a escala del complejo edificio en la que se genera el perfil del viento que incide sobre el modelo. El flujo incidente tiene que reproducir las características de la capa límite atmosférica desarrollada sobre el terreno circundante en la situación prototipo. Las características del viento dependen de la rugosidad de la superficie en la que este se desarrolla, cambiando no solo la forma del perfil de velocidad media, sino también aspectos de la turbulencia. La modelación numérica tiene el potencial de sustituir o complementar los estudios que se hacen en el túnel de viento, bajando costos y tiempos de realización. Para ello el método que tiene las características más adecuadas es la simulación de grandes vórtices, ya que en la mayoría de los casos es necesario obtener la evolución temporal de las magnitudes relevantes. Además, en la interacción del viento y edificios, se presentan fenómenos no estacionarios como desprendimientos de vórtices que convierten a LES en el método apropiado para el estudio de estos problemas. De la misma forma que en una simulación física se debe generar el perfil de velocidad incidente, también en una simulación numérica esto debe hacerse.

Los comienzos de la investigación en capa límite rugosa se remontan a los trabajos de [Nikuradse \(1933\)](#) y [Colebrook y White \(1937\)](#). Estos trabajos se enfocaron en efecto de la rugosidad sobre el flujo medio y las tensiones rasantes. Posteriormente se realizaron trabajos destinados a comprender la estructura turbulenta de estos flujos, por ejemplo [Perry y Joubert \(1963\)](#), [Perry et al. \(1969\)](#), [Ligrani y Moffat \(1986\)](#), [Bandyopadhyay \(1987\)](#) y [Krogstad et al. \(1992\)](#). [Raupach et al. \(1991\)](#) publican la revisión, en la que concluyen que la estructura turbulenta de la capa exterior es sensiblemente independiente de la rugosidad a suficientemente altos números de Reynolds, a la cual llaman la hipótesis de similitud de pared. Luego varios trabajos en capas límite rugosa se concentran en evaluar esta hipótesis, por ejemplo [Tachie et al. \(2000\)](#) o [Keirsbulck et al. \(2001\)](#). [Leonardi et al. \(2003\)](#), [Bhaganagar et al. \(2004\)](#) realizaron simulaciones numéricas directas (DNS) del flujo en un canal rugoso y [Coceal et al. \(2007\)](#) en capa límite. El interés en comprender estos flujos sigue vigente y eso puede apreciarse en publicaciones recientes ([Inagaki et al., 2017](#)). Este interés radica en la necesidad de comprender mecanismos de transporte que son vitales en dispersión de contaminantes en ambientes urbanos, entre otros problemas.

El objetivo de este trabajo es evaluar una metodología para simular mediante LES capas límites desarrolladas sobre una superficie rugosa que permita generar condiciones de entrada al dominio principal de la simulación con las características correctas.

Para ello se analiza el flujo desde distintos puntos de vista. Se evalúa el campo de velocidades, la turbulencia, las características de la subcapa rugosa, el balance de energía cinética turbulenta, las escalas y las correlaciones espaciales.

2. ANTECEDENTES

Las superficies reales son rugosas. Por más esmero que el fabricante ponga en hacerlas lisas si un observador se acerca lo suficiente podrá encontrar las imperfecciones. La manera usual de caracterizar estas imperfecciones es mediante al valor medio de la altura de las protuberancias h . Del punto de vista de la capa límite, la variable que define si una superficie actúa como una

superficie lisa o rugosa es la relación de h respecto a la longitud viscosa δ_v . Si $h < 5\delta_v$ la superficie se considera aerodinámicamente lisa (Raupach et al., 1991). Si $5\delta_v < h$, la magnitud h y todas las otras longitudes que definen la geometría (L_i) de la superficie comienzan a ser relevantes.

En una superficie rugosa no es trivial la definición del origen de la coordenada z . La presencia de los elementos de rugosidad desplazan el flujo alejandolo de la superficie, de manera que se puede considerar que el plano de origen está desplazado una distancia d llamada altura de desplazamiento nulo. Thom (1971) propuso calcular d de la manera siguiente:

$$d = \frac{\int_0^h z D_z(z) dz}{\int_0^h D_z(z) dz} \quad (1)$$

donde D_z es la media de la fuerza de arrastre en la dirección del flujo por unidad de altura z . O sea que d es la altura donde se aplica la fuerza de arrastre media. Se cumple que $0 \leq d \leq h$ y $d = 0$ si la superficie es lisa. Aunque existen otras maneras de calcular d , esta es la más usada y tiene el respaldo de haber sido verificada experimentalmente (Raupach et al., 1991). En vista de lo anterior se define la coordenada $Z = z - d$.

Los elementos de rugosidad alteran el flujo de forma que en una región cercana a la pared y los elementos de rugosidad, se tiene un flujo altamente dependiente de la geometría de estos elementos. A esta región se la conoce como Subcapa rugosa. Esta subcapa tiene una altura que va desde $2h$ hasta $5h$.

Es importante destacar que se tiene la misma estructura teórica que en una capa límite sobre una superficie lisa, es decir, se tienen dos zonas: una capa exterior y una interior. En la capa externa se tiene la ley de defecto de velocidad igual que en una capa límite sobre una superficie lisa:

$$\frac{U_e - U}{u^*} = \Psi(\eta, \beta) \quad (2)$$

Lo que se modifica es la dependencia en la capa interior, donde aparecen nuevas variables. O sea que la velocidad media es una función de la forma

$$U = f(\rho, \mu, \tau_w, L_i, h, Z) \quad (3)$$

Eligiendo las variables básicas (ρ , μ y τ_w) se obtiene la relación adimensional

$$\frac{U}{u^*} = \Phi_2(L_i^+, h^+, Z^+) \quad (4)$$

Donde

$$L_i^+ = \frac{L_i}{\delta_v}$$

y

$$h^+ = \frac{h}{\delta_v}.$$

En la capa externa la dependencia es la misma que la dada por la relación 2. Si se tiene una separación de escalas externas e internas lo suficientemente grande, o sea que simultáneamente se cumpla $\delta/\delta_v \gg 1$, $\delta/h \gg 1$ y $\delta/L_i \gg 1$, se tendrá una zona en donde ambas expresiones (2 y 4) serán válidas, dando origen a una capa de superposición análoga a la encontrada en una capa límite lisa. Derivando respecto a z las expresiones 2 y 4 e igualando:

$$\frac{u^{*2}}{\nu} \frac{\partial \Phi_2}{\partial Z^+} = -\frac{u^*}{\delta} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \Rightarrow \frac{Z u^*}{\nu} \frac{\partial \Phi_2}{\partial Z^+} = -\frac{Z}{\delta} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \Rightarrow Z^+ \frac{\partial \Phi_2}{\partial Z^+} = -\eta \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \frac{1}{\kappa}$$

Integrando se obtiene

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Z^+) + C(h^+, L_i^+) \quad (5)$$

donde C es una función de la geometría de la superficie rugosa, siendo habitual expresarla de la siguiente manera:

$$C = B - \left[\frac{\Delta U}{u^*} \right] (h^+, L_i^+).$$

A $\Delta U/u^*$ se le conoce como función de rugosidad y B es la constante universal de la ley logarítmica para una superficie lisa. En la revisión acerca de capa límite sobre superficies rugosas de Raupach et al. (1991) se compilan valores de la función de rugosidad para diferentes h^+ obtenidos experimentalmente en situaciones que abarcan desde ductos hasta capa límite atmosférica sobre vegetación.

Cuando el número de Reynolds es suficientemente alto se alcanza la situación de similitud de Reynolds, en la cual la viscosidad deja de ser una variable relevante. Esto se da en muchos casos, entre los que se cuentan flujos atmosféricos sobre vegetación o edificios. Teniendo este efecto en cuenta es que es mejor utilizar h como variable básica en lugar de μ para adimensionar la relación funcional 3, de lo cual resulta:

$$\frac{U}{u^*} = \Phi_3(\xi, h^+, \sigma_i) \quad (6)$$

donde $\xi = Z/h$ y $\sigma_i = L_i/h$.

El argumento de acople entre la capa externa e interna, formando una capa de superposición, conduce a

$$\frac{U}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln(\xi) + c(h^+, \sigma_i) \quad (7)$$

En el ambiente meteorológico es usual expresar la relación 7 de la forma siguiente:

$$\frac{U}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{Z}{z_0}\right) \quad (8)$$

donde la longitud de rugosidad z_0 es

$$z_0 = h e^{-\kappa c(h^+, \sigma_i)} \quad (9)$$

Se puede obtener relaciones que vinculan las tres maneras de expresar la ecuación 5:

$$\begin{aligned} \ln \frac{z_0}{h} &= -\kappa c(h^+, \sigma_i) \\ &= -\kappa C(h^+, L_i^+) - \ln(h^+) \\ &= -\kappa \left[B - \left[\frac{\Delta U}{u^*} \right] (h^+, \sigma_i) \right] - \ln(h^+) \end{aligned}$$

Como se mencionó anteriormente, cuando el número de Reynolds es alto y se alcanza la similitud de Reynolds, se pierde la dependencia de h^+ , de manera que la constante $c(h^+, \sigma_i) \rightarrow c_\infty(\sigma_i)$, o sea que solo depende del tipo de rugosidad que se tenga. Por ejemplo, se tiene un valor de $c_\infty = 8,5$ para rugosidad tipo arena, un valor de $c_\infty = 5,1$ en campos y cultivos, $c_\infty = 6,9$ en zonas boscosas, tal como se presenta en Raupach et al. (1991). Estos valores redundan en $z_0/h \approx 0,03$, $z_0/h \approx 0,12$ y $z_0/h \approx 0,06$, respectivamente.

Para este caso la función de rugosidad queda

$$\frac{\Delta U}{u^*} = -c(\sigma_i) + B + \kappa^{-1} \ln(h^+) \quad (10)$$

Cuando la rugosidad es artificial, ya sea cubos montados sobre una superficie lisa o barras horizontales, es común definir la densidad de rugosidad λ como el cociente del área frontal de cada elemento y el área horizontal asignada a cada elemento. Se ha encontrado que z_0/h es una función de este parámetro λ . z_0/h crece en la medida que λ aumenta hasta llegar a un máximo en $\lambda \approx 0,1$ y luego decrecer. Este efecto está relacionado con la protección mutua que se obtiene al tener los elementos de rugosidad muy cerca unos de otros. En la zona con $\lambda < 0,1$, $z_0/h \approx \lambda$.

La hipótesis de similitud de pared (ver (Raupach et al., 1991)) establece que “fuera de la subcapa rugosa o la viscosa, los movimientos turbulentos en una capa límite a números de Reynolds suficientemente altos son independientes de la rugosidad de la pared y de la viscosidad, excepto por el rol de la pared en fijar la escala de velocidad u^* , la altura $Z = z - d$ y la altura de la capa límite δ ”. Evidencia que sustenta el uso de esta hipótesis se encuentra principalmente en el hecho de que la constante de Von Karman tiene sensiblemente el mismo valor para distintos tipos de rugosidad, desde superficies lisas hasta rugosidad de terrenos a nivel meteorológico.

Tomando en cuenta esta hipótesis se puede establecer que las tensiones de Reynolds fuera de la subcapa rugosa tienen una dependencia de la forma:

$$\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} = \mathbf{R}(Z, \rho, \tau_w, \delta) \quad (11)$$

Adimensionando,

$$\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} = u^{*2} \mathbf{R}^*(\eta) \quad (12)$$

donde ahora $\eta = Z/\delta$.

De manera que si se adimensionan las tensiones de Reynolds con δ y u^* , el perfil en altura debería colapsar en curvas universales.

3. ESQUEMA NUMÉRICO

3.1. Esquema del flujo a simular

El flujo que se va a simular tiene algunas particularidades que surgen de las posibilidades y limitaciones de la modelación numérica. Se propone simular un flujo en un dominio que es un prisma rectangular. Dentro de este prisma se aplica una densidad de fuerza de masa F_e constante paralela a una de sus aristas. En las caras perpendiculares a la fuerza de masa, se impone una condición de borde periódica, es decir, que todos los valores sobre una de estas caras son copiados en la otra. Se elige una de las caras laterales para oficial de superficie sobre la que se desarrolla la capa límite; en esta se impone la condición de borde de adherencia, de aquí en más cuando se hable de “la superficie” se estará haciendo referencia a esta superficie. En la cara opuesta la condición de borde es de simetría, o sea que no hay flujo a través de ella y la proyección de los gradientes de todas las propiedades del flujo en la dirección perpendicular a esta son nulos. En las caras laterales se impone periodicidad. Sobre la superficie donde se desarrollará la capa límite se ubica un arreglo de cubos impuestos mediante condiciones de borde inmersas. El flujo comienza su evolución desde el reposo, hasta alcanzar una condición estadísticamente estacionaria. En (Coceal et al., 2006) se utiliza el mismo conjunto de condiciones de borde.

Solidario al prisma se define una base ortonormal dada por el versor \hat{i} colineal a F_e , el versor \hat{j} perpendicular a la superficie y el versor $\hat{k} = \hat{i} \wedge \hat{j}$. Ver figura 1.

Este esquema no es realizable físicamente, por lo tanto la simulación no corresponde a ningún flujo real en un sentido estricto. Por un lado, se puede decir que no es una capa límite desarrollada espacialmente. Por otro lado, si las paredes laterales y las entradas están lo suficientemente lejos una de otra, el flujo tiene similitudes con el flujo en un canal. En el flujo en un canal, se tienen dos superficies opuestas iguales en las que se desarrollan capas límite hasta que estas se unen en un flujo turbulento completamente desarrollado. El plano central es un plano de simetría en las propiedades estadísticas, pero a través de este circula fluido, por lo cual no es un plano de simetría del flujo tridimensional. El esquema utilizado considera que el plano superior es un plano de simetría del flujo tridimensional, lo cual es una diferencia importante.

Aunque el esquema de condiciones de borde presenta las dificultades mencionadas, se elige porque permite generar un flujo que presenta variaciones espaciales principalmente en la dirección perpendicular a la superficie, además de que otros grupos lo han usado con éxito (Coceal et al., 2006).

3.2. `caffa3d.MBRi`

El programa `caffa3d.MBRi` desarrollado por el Grupo de Mecánica de Fluidos Computacional del IMFIA, es un solver para flujos incompresibles. Es un programa de código abierto basado en el enfoque de volúmenes finitos escrito en Fortran 90, lo cual permite a estudiantes no expertos en escritura de programas hacer modificaciones en el código fuente de manera de adaptar el código a los requerimientos del caso de estudio.

El modelo matemático consta de la ecuación de balance de masa, la de balance de cantidad de movimiento y una ecuación de balance de un escalar pasivo genérico. Esta última ecuación puede utilizarse, por ejemplo, para resolver el transporte de un contaminante o para codificar un modelo RANS tipo $k - \epsilon$.

En este se utiliza mallas estructuradas por bloques tanto para alcanzar flexibilidad geométrica como para explotar la capacidad de computadores paralelos (clusters) haciendo uso de la librería MPI. Cada celda de la malla es un hexaedro, con exactamente seis celdas adyacentes, no se superponen, y no existen espacios vacíos entre ellas. La malla se divide en regiones y

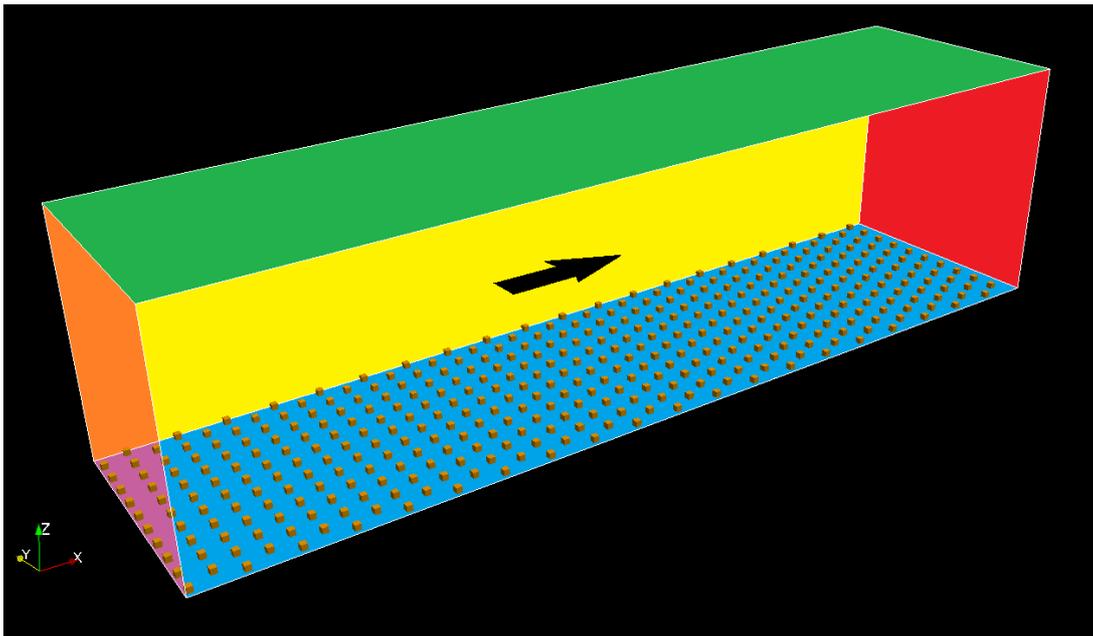


Figura 1: Esquema del flujo

cada región puede estar dividida en bloques. La paralelización de las actividades se hace utilizando esta estructura, es decir, cada región es resuelta por un núcleo diferente. Finalmente es importante destacar que aun cuando el bloque de malla tenga una forma curva, siempre las coordenadas usadas son cartesianas.

Cada ecuación del modelo matemático es discretizada en cada celda de manera de obtener una ecuación lineal de la forma

$$A_P^u u_P + A_E^u u_E + A_W^u u_W + A_N^u u_N + A_S^u u_S + A_T^u u_T + A_B^u u_B = Q_P^u$$

donde el supraíndice u refiere a que es la ecuación de balance de cantidad de movimiento en la dirección de u , y los subíndices P, E, W, N, S, T y B identifican las celdas adyacentes en: actual, este, oeste, norte, sur, arriba y abajo. Para ver en detalle la discretización utilizada en cada termino se recomienda ver [Usera et al. \(2008\)](#).

Para calcular los flujos convectivos en cada celda se utiliza un blending de un esquema upwind de primer orden implícito y un esquema de interpolación lineal de segundo orden explícito. El acople entre la velocidad y la presión se hace usando el método SIMPLE ([Usera et al., 2008](#)).

Como es sencillo ver, cada bloque forma un sistema de ecuaciones lineales que es heptadiagonal. O sea que globalmente es heptadiagonal por bloques. Estos sistemas son resueltos de forma eficiente por una variante estructurada por bloques del método Stone-SIP, este es el método utilizado ([Usera et al., 2008](#)).

Para cada paso temporal se registran iteraciones a dos niveles, para lograr el acople de la velocidad, presión y escalares pasivos. El esquema de estas iteraciones se presenta en la figura 2.

Finalmente es importante destacar una funcionalidad del `caffa3d.MBRi` que es utilizada en las simulaciones realizadas, esto es: condiciones de borde inmersas. Las condiciones de borde inmersas permiten representar sólidos inmersos en un flujo sin necesidad de adaptar la malla a la frontera sólida. Esto se logra imponiendo en las celdas que están dentro del sólido una fuerza de masa tal que logre que la velocidad sea la de este. Si el sólido está en reposo esta velocidad es

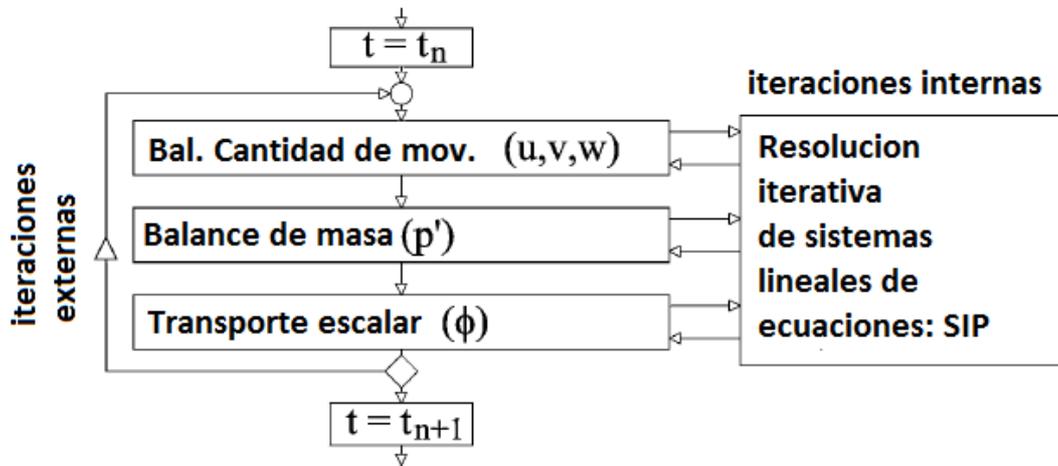


Figura 2: Esquema de las iteraciones

nula. En caso de celdas que están parcialmente dentro y parcialmente fuera del sólido se pondera la fuerza en relación con el volumen. Para una explicación de los fundamentos matemáticos del método se recomienda ver (Peskin, 2002).

3.3. Detalles de la simulación

Se fija de forma arbitraria la altura del canal en $H = 2m$. Para asegurar que se establezca una zona logarítmica, en Jiménez (2004) se propone que se debe obedecer el criterio $40h \leq H$, de manera que se debe cumplir $h \leq 0,05m$. Por otro lado, el paso de la grilla en la zona próxima a los obstáculos deberá ser proporcional a h , o sea que si se elige un valor de h muy pequeño se estará aumentando la cantidad de celdas necesarias para realizar la simulación. Es por ello que se elige $h = 0,048m$.

El número de Reynolds de la simulación se elige de manera que el flujo sea completamente rugoso dinámicamente (o sea que se verifique la similitud de Reynolds), de forma que el valor de este no tenga influencia. El flujo es completamente rugoso dinámicamente si $70 < h^+$ (Raupach et al., 1991) para rugosidad tipo arena (sand roughness). Coceal et al. (2006) utilizó un valor de $h^+ \approx 500$ en su simulación numérica directa de un canal rugoso para asegurar un flujo completamente rugoso dinámicamente. Si se impone $h^+ \approx 500$, entonces usando aire como fluido $500\nu/h = 0,14m/s < u^*$. Finalmente, se elige el valor de $u^* \approx 1m/s$. La tensión rasante sobre la superficie será $\tau_w \approx \rho u^{*2} \approx 1,2kg/s^2m$. Usando la ecuación ?? se tiene

$$F_e = \frac{\tau_w}{\rho(H_1 - H)} \approx 0,51m/s^2$$

La fuerza por unidad de masa F_e es el parámetro que se fija en el modelo para lograr la velocidad deseada, de acuerdo a lo anterior se elige en $F_e = 0,5m/s^2$. O sea que $u^* \approx 0,99m/s$.

Es posible determinar el perfil de velocidad media que se espera obtener. Para ello se debe determinar el valor de c_∞ . Como se mencionó anteriormente, el valor de c_∞ (σ_i) depende del tipo de rugosidad que se está considerando. La rugosidad que se utilizará en las simulaciones serán cubos montados sobre la superficie. Se fija el valor de $\lambda = 0,0625$ de manera de estar cerca del valor máximo de Z^0/h . Con cubos de $h = 0,048m$ resulta en un área plana por cubo

de $A = 0,0369$, como se muestra en la figura 3. Con esta rugosidad el valor esperado de $z_0/h \approx 0,06$. O sea que $z_0 \approx 0,003m$ y

$$c_\infty(\sigma_i) = -\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{z_0}{h}\right) \approx 6,9 \quad (13)$$

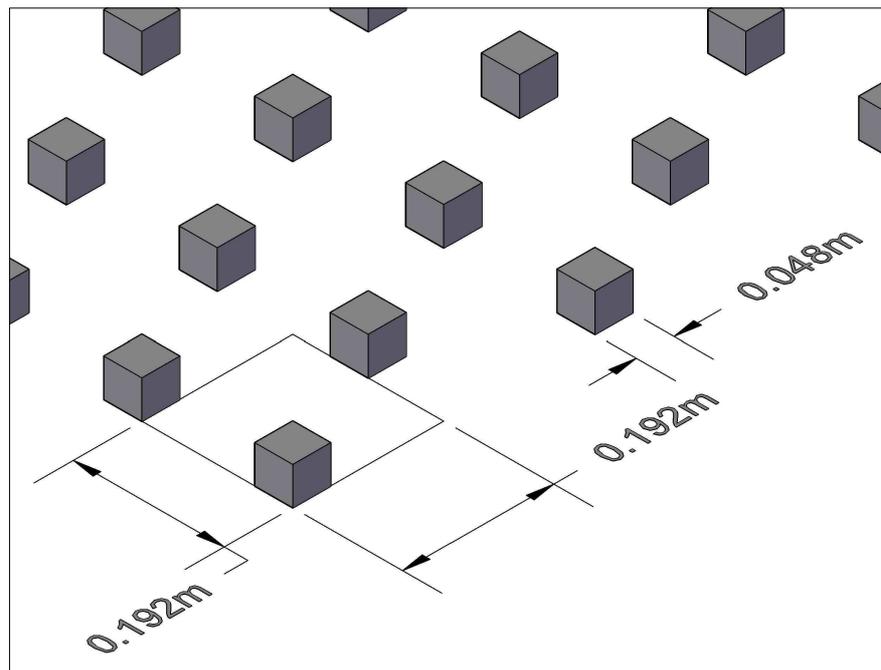


Figura 3: Esquema de la rugosidad utilizada

La altura de desplazamiento nulo, se estima de acuerdo con (Raupach et al., 1991) en $d/h \approx 0,75$, de modo que $d \approx 0,036m$.

En canales y tuberías, el parámetro de Coles $\Pi \approx 0$, entonces el perfil de velocidad esperado se puede aproximar por encima de la subcapa rugosa con la expresión logarítmica siguiente:

$$U = \frac{u^*}{\kappa} \ln\left(\frac{z-d}{z_0}\right)$$

con $u^* = 0,99m/s$, $d = 0,036m$ y $z_0 = 0,003m$.

Las tensiones rasantes deben seguir el andamiaje descrito en la sección ??, o sea:

$$T_{13}^{S**} = 1,2 - 0,6z \quad (14)$$

La componentes de la diagonal del tensor de Reynolds adimensionadas con u^* , $\frac{u'^2}{u^{*2}}$, $\frac{v'^2}{u^{*2}}$ y $\frac{w'^2}{u^{*2}}$ tienen un pico sobre la superficie del orden de 4, 2 y 1,2 respectivamente. O sea que $k \approx 3,6u^{*2}$

Finalmente, se debe elegir el paso de la malla a utilizar. En el entorno de los cubos se espera tener vórtices del orden del tamaño de los cubos $\ell_0 \approx 0,05m$. Se estima que las escalas mayores en el rango inercial es $\ell_{EI} \approx \frac{1}{6}\ell_0 \approx 8 \cdot 10^{-3}m$ (ver Pope (2000)), de manera que el paso de la malla debería ser menor a este valor en el entorno de los cubos. La escala de velocidad de los vórtices es $\mathcal{U}_0 \approx \left(\frac{2}{3}k\right)^{1/2} = 1,55u^* \approx 1,55m/s$. Manteniendo el valor de la escala de velocidad, es decir, $\mathcal{U}_0 \approx \mathcal{U}_{EI} = 1,5m/s$, la escala de tiempo de los vórtices en el comienzo del rango inercial es $\mathcal{T}_{EI} \approx 0,005s$. Por encima de la subcapa rugosa, en la zona logarítmica, la escala $L = \frac{k^{3/2}}{\epsilon}$ se puede aproximar por $L \approx C_L z$ con $C_L = 2,5$ (Pope, 2000). La escala $\ell_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} L$. O sea que hasta un valor de $z \approx 0,25m$ (la altura de la capa de superposición) la escala de longitud $\ell_0 \approx 1,35z$ y $\ell_{EI} \approx 0,23z$. Si se asume que el valor de \mathcal{U}_{EI} en esta zona es $1,5m/s$ constante, la escala de tiempo de los vórtices en el comienzo del rango inercial es $\mathcal{T}_{EI} \approx 0,15z$. Resumiendo:

- En la subcapa rugosa $\ell_{EI} \approx 8 \cdot 10^{-3}m$ y $\mathcal{T}_{EI} \approx 0,005s$
- En la zona logarítmica ($z < 0,25m$), $8 \cdot 10^{-3}m < \ell_{EI} < 5,6 \cdot 10^{-2}m$ y $0,005s < \mathcal{T}_{EI} < 0,037s$.
- Por encima de la capa de superposición $\ell_{EI} \approx 5,6 \cdot 10^{-2}m$ y $\mathcal{T}_{EI} \approx 0,037s$

Por razones de tiempo de las simulaciones el paso temporal utilizado fue $0,01s$ que es del orden del mínimo de \mathcal{T} aunque mayor. La malla es regular en las direcciones \hat{i} y \hat{j} con un paso de $0,01m$. En la vertical se usó un paso variable que aumenta con la altura de forma lineal, de la siguiente manera:

$$\Delta z (m) = 0,004 + 2,22 \cdot 10^{-2}z$$

Como la malla no es uniforme se puede calcular un diámetro efectivo de las celdas como sigue:

$$\Delta_m (m) = \left[(0,004 + 2,22 \cdot 10^{-2}z) \cdot 0,01 \cdot 0,01 \right]^{1/3}$$

A modo de referencia se pueden calcular las escalas de Kolmogorov y de Taylor. En la subcapa rugosa, la producción $\mathcal{P} \approx \frac{\mathcal{U}_0^3}{\ell_0} \approx 70m^2/s^3$, asumiendo $\mathcal{P} \approx \epsilon$, las escalas de Kolmogorov quedan: $\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4} \approx 8 \cdot 10^{-5}m$, $\tau_\eta = (\nu\epsilon)^{1/4} \approx 5 \cdot 10^{-4}s$ y $\mathcal{U}_\eta = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2} \approx 0,18m/s$; la escala de Taylor es: $\lambda \approx \sqrt{15\nu}\mathcal{U}_0 \approx 3 \cdot 10^{-3}m$.

De la misma manera se pueden calcular estas escalas en el tope de la capa de superposición: $\eta \approx 1 \cdot 10^{-4}m$, $\tau_\eta = 0,1s$, $\mathcal{U}_\eta = 1 \cdot 10^{-3}m/s$ y la escala de Taylor $\lambda \approx 7 \cdot 10^{-3}m$.

Un resumen de las escalas puede verse en la figura 4. Puede verse que salvo en alguna parte mínima de la subcapa rugosa el paso de malla utilizado resolvería el flujo hasta el comienzo del rango inercial.

Se hicieron simulaciones preliminares para determinar las dimensiones ideales del dominio de la simulación. El criterio utilizado fue que la correlación de la velocidad se haga nula de manera que la condición de periodicidad no impusiera condiciones sobre el flujo. En simulaciones

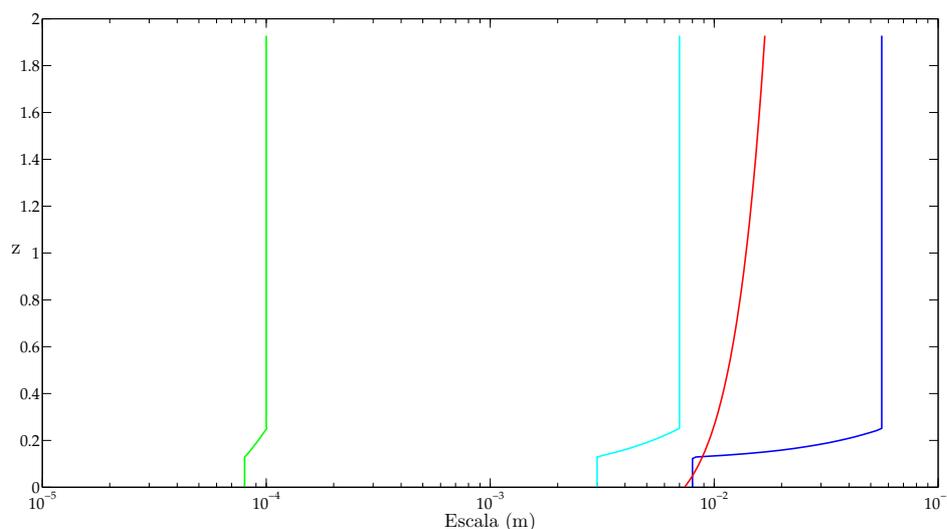


Figura 4: Escalas de longitud esperadas en el flujo. En azul (—) la escala del comienzo del rango inercial ℓ_{EI} , en rojo (—) el paso de la grilla λ_m , en cian (—) la microescala de Taylor λ y en verde (—) la escala de Kolmogorov η .

con un ancho de aproximadamente $2m$ se registraba la presencia de un par de vórtices horizontales con un diámetro del orden de la altura del dominio; estos vórtices eran bidimensionales y no interactuaban con el resto del flujo. Para evitar este problema se aumentó el ancho a $3,84m$. Por otro lado, se limitó a 16 la cantidad de regiones totales para poder trabajar en la cola Small-Jobs del cluster. Con estas restricciones el dominio se conforma por 16 regiones de $96 \times 96 \times 112$ celdas o sea 1032192 celdas por región y 16515072 celdas totales. Las 16 regiones tienen una sección horizontal cuadrada de $0,96m$ de lado y $2m$ de altura. Estas regiones se acomodan de manera de formar un prisma de $3,84m \times 3,84m \times 2m$.

4. RESULTADOS

Las simulaciones realizadas comienzan desde el reposo. La velocidad aumenta en la medida que el flujo se acelera, hasta que la capa límite alcanza la superficie superior. Una vez que esto sucede se debe dejar un tiempo para que se estabilice y la simulación sea estacionaria en valores medios. Esto requiere alrededor de 40 segundos de simulación que en tiempo de máquina, a 11 hs/seg , redonda en una simulación de alrededor de 20 días. Recién después de este tiempo se comienza la simulación real, que puede llevar entre 20 y 30 días de trabajo en máquina.

En este capítulo se presentan los resultados de dos simulaciones para las que se modificó el coeficiente de blending.

Simulación	Coef. Blending	No. de iteraciones internas	Tiempo simulación
CLIM46	0.7	10	44 seg
CLIM49	0.95	10	38 seg

Los tiempos presentados en la tabla anterior no incluyen el período de estabilización.

4.1. Tensiones rasantes

Se sumó en todo instante y lugar la fuerza de masa que impone el método de condiciones de borde inmersas, y se calculó el valor medio de la fuerza sobre todos los obstáculos por unidad de altura, la cual se presenta en el gráfico de la figura 5 para la simulación CLIM46.

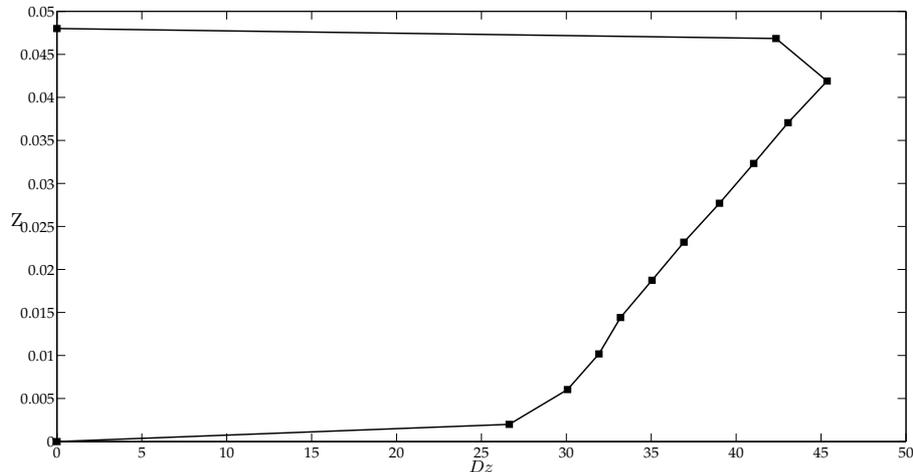


Figura 5: Perfil de la media de la fuerza horizontal por unidad de superficie y altura sobre los obstáculos. CLIM46

Con esta información se calcula τ_w (la tensión rasante sobre la superficie), u^* (la velocidad de fricción) y d (la altura de desplazamiento nulo).

	τ_w (N/m^2)	u^* (m/s)	d (m)
CLIM46	1.855	1.243	0.0268
CLIM49	2.281	1.379	0.0260

En la figura 6 se muestra las diferentes contribuciones a

$$T_{13}^{s**} = \mu \left\langle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} + \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial z} \right\rangle_H + \rho \left\langle \nu_r \left(\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} + \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial z} \right) \right\rangle_H - \rho \left\langle \overline{\langle u \rangle' \langle w \rangle'} \right\rangle_H - \rho \left\langle \widetilde{\langle u \rangle \langle w \rangle} \right\rangle_H .$$

para la simulación CLIM46.

El primer término está representado en color verde, y es casi nulo en todo el intervalo de alturas. Tiene un pico justo encima de los obstáculos debido principalmente a la derivada de U respecto a z .

El segundo término, representado en color cian, tiene el mismo andamiaje que el primero aunque algo mayores valores, eso es debido a que la viscosidad turbulenta es algunas veces mayor que la molecular. El pico máximo se da, de la misma forma que en el primero, justo por encima de los obstáculos.

En azul está representado el tercer término, el cual es claramente el más significativo. Este término representa el intercambio de cantidad de movimiento por medios turbulentos del flujo representado. La forma del perfil está bien representada aunque se advierte que hay una cierta concavidad que no es natural.

Finalmente, en rojo se muestran las tensiones dispersivas, estas son mayores en términos absolutos que el primer y segundo término. Se puede apreciar un cambio de signo a la altura de los obstáculos, donde pasa a ser negativo y luego cambia otra vez a positivo. La altura de influencia de estas tensiones alcanza aproximadamente $2h$, lo cual indica que la subcapa rugosa tiene una extensión de por lo menos $2h$.

En ambas simulaciones se obtienen resultados cualitativamente similares, cambiando levemente los valores.

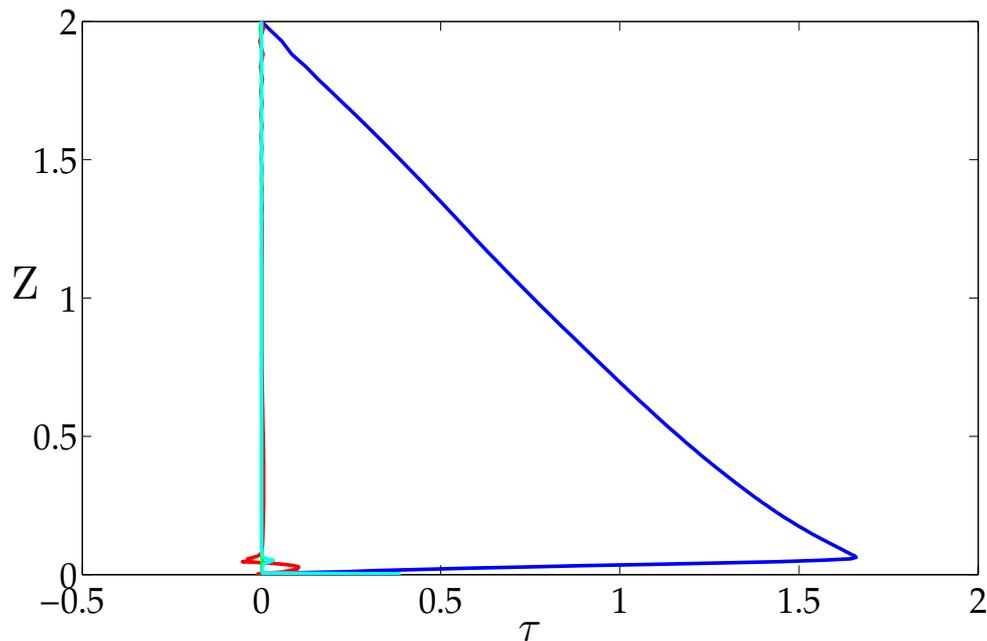


Figura 6: Componentes de T_{13}^{s**} en función de la altura z . CLIM46

La figura 6 representa la tensión rasante horizontal adimensionada con τ_w en un plano horizontal a $6cm$ de altura en la subcapa rugosa. Las tensiones son aproximadas sólo por el término $-\rho\overline{\langle u \rangle' \langle w \rangle'}$ ya que, como se puede apreciar en la figura 6, es mucho más importante que los otros términos.

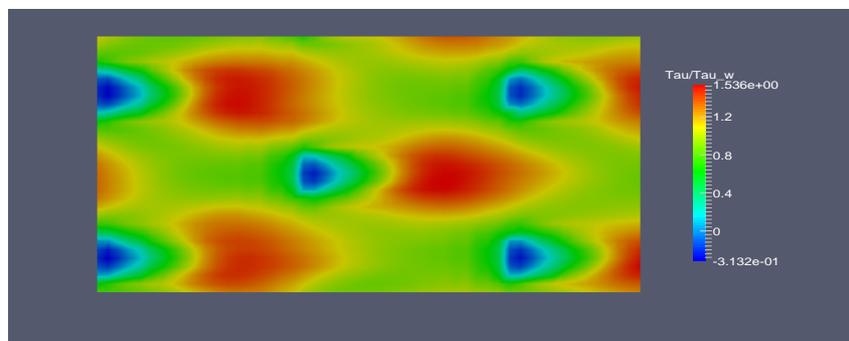


Figura 7: Tensión rasante en un plano horizontal a diferentes alturas. CLIM46

4.2. Perfil de velocidad media

En la figura 8 se presenta el perfil de velocidad media en la dirección del flujo para la simulación CLIM46 y en la figura 9 lo mismo pero en lugar de z se grafica $z - d$ en escala semilogarítmica. Es evidente que en ambos casos se tiene una región logarítmica que va desde una altura cercana a la de los obstáculos hasta casi la altura del canal, pudiendo apreciarse una mínima estela. En base al ajuste logarítmico, y usando los valores hallados de forma independiente de u^* y d , se puede encontrar el valor que tiene la constante de von Karman (κ) y la longitud de rugosidad (z_o) en cada simulación.

	κ	$Z_o (m)$
CLIM46	0.71	5.1e-4
CLIM49	0.80	3.3e-4

Ambos valores obtenidos de κ son altos, si se toma en cuenta que la constante de von Karman varía entre 0,33 y 0,43 (Bailey et al., 2014). De todas formas se considera razonable la discrepancia obtenida.

Por otra parte, los valores de Z_o son casi un orden de magnitud menores que los esperados, siendo el de la simulación CLIM46 más cercano al valor predicho; seis veces menor.

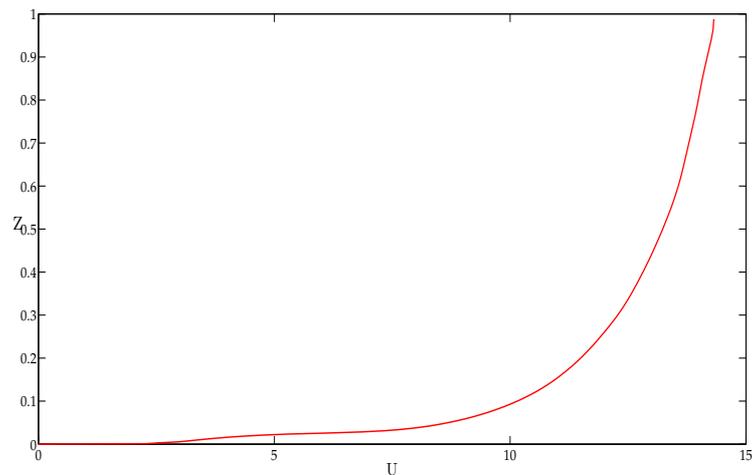


Figura 8: Velocidad media en altura.

4.3. Turbulencia

Los valores de σ_u/u^* (azul), σ_v/u^* (rojo) y σ_w/u^* (verde) en altura se presentan en las figuras 10 y 11.

La principal observación que se puede realizar es que los valores inmediatamente encima de los obstáculos de estas magnitudes en las tres componentes tienen valores correctos. En Raupach et al. (1991) se presentan resultados para muchas capas límite y se encuentran valores sobre el suelo de:

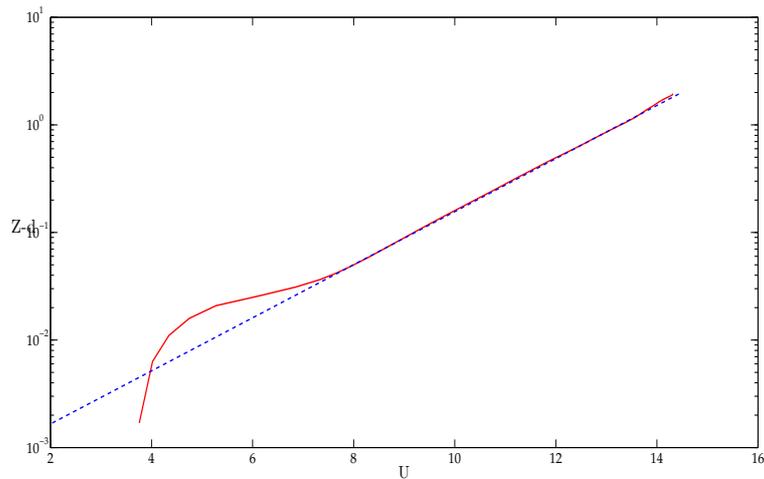


Figura 9: Velocidad media en altura (escala semilogarítmica).

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_u}{u^*} \Big|_w &= 2 \\ \frac{\sigma_v}{u^*} \Big|_w &= 1,4 \\ \frac{\sigma_w}{u^*} \Big|_w &= 1,1 \end{aligned}$$

En la simulación CLIM46 estos valores resultaron:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_u}{u^*} \Big|_w &= 2 \\ \frac{\sigma_v}{u^*} \Big|_w &= 1,3 \\ \frac{\sigma_w}{u^*} \Big|_w &= 1,05 \end{aligned}$$

Mientras que en la simulación CLIM49:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_u}{u^*} \Big|_w &= 2 \\ \frac{\sigma_v}{u^*} \Big|_w &= 1,5 \\ \frac{\sigma_w}{u^*} \Big|_w &= 1,2 \end{aligned}$$

Los valores en la simulación CLIM46 se corresponden de mejor manera con la bibliografía.

Por otra parte, la forma de los perfiles es cualitativamente correcta. En la medida que z aumenta, las tres componentes fluctuantes tienden a un mismo valor cercano a 1,0, o sea que

se pierde la anisotropía que se tiene sobre la superficie. Este comportamiento también es mejor representado en la simulación CLIM46. Al acercarse al límite superior de la simulación, el comportamiento difiere del esperable para un canal o una capa límite, debido a la condición de simetría impuesta en la superficie superior.

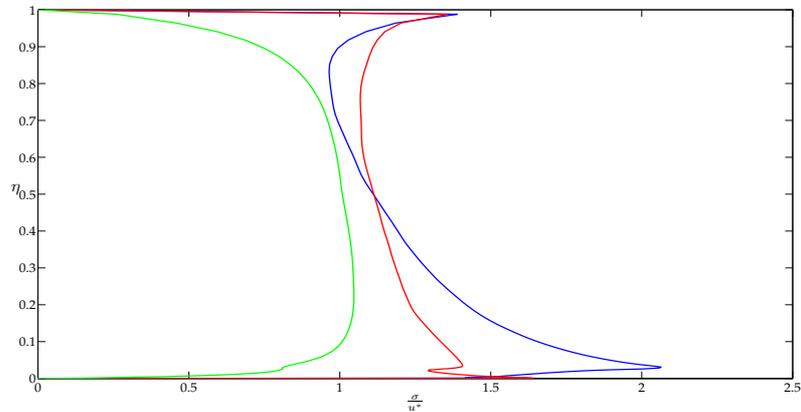


Figura 10: Intensidad de turbulencia en altura (CLIM46):

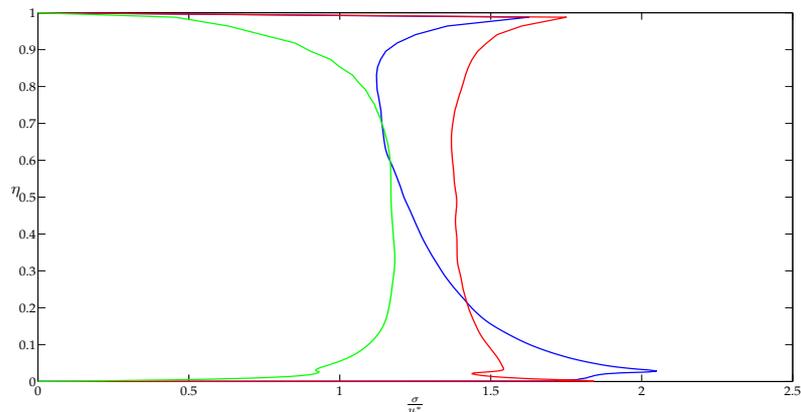


Figura 11: Intensidad de turbulencia en altura (CLIM46):

4.4. La subcapa rugosa.

En esta sección se analiza el campo de velocidades en la subcapa rugosa. Las figuras 12 y 13 muestran el campo de velocidad media en un plano vertical paralelo al sentido del flujo que pasa por el centro de una fila de cubos. En ambas figuras se advierte una burbuja de recirculación del tamaño de un cubo inmediatamente aguas abajo de cada cubo, donde la velocidad registra valores negativos aunque muy bajos (menos de 2 m/s). De igual manera es evidente una capa a aproximadamente $0,06 \text{ cm}$ donde se produce un gradiente pronunciado de velocidad media, por debajo de esta la velocidad registra valores inferiores a 4 m/s .

Las figuras 14 y 15 muestran líneas de flujo que nacen a una altura $z = 0,03 \text{ cm}$, entre los cubos. Estas figuras permiten ver el correcto desempeño del código en resolver el campo de velocidad medio en torno a los cubos, al menos de forma cualitativa. Se puede ver la formación

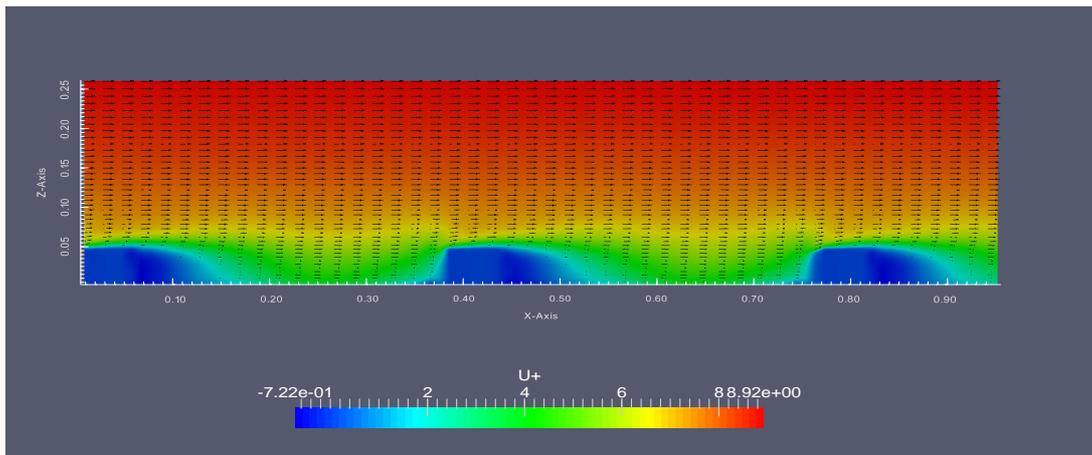


Figura 12: Velocidad media en el plano meridional a una fila de cubos. CLIM46

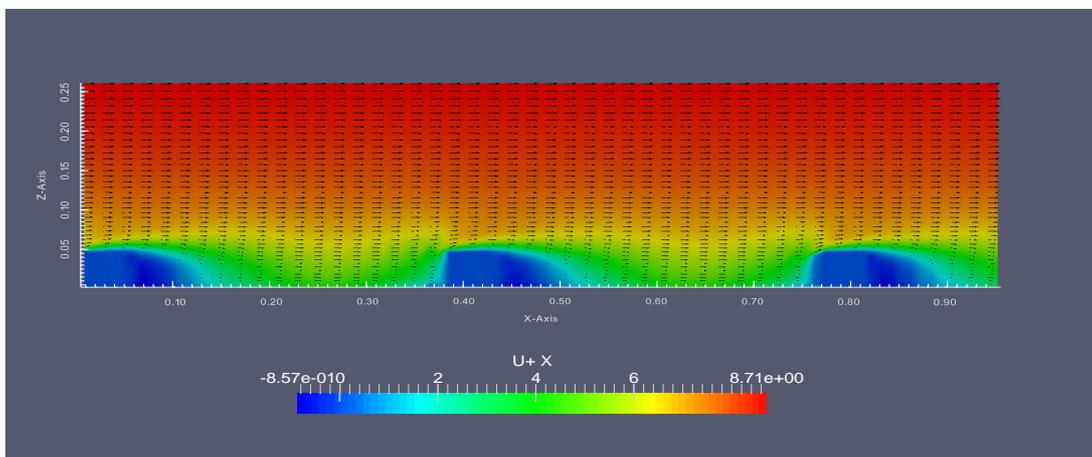


Figura 13: Velocidad media en el plano meridional a una fila de cubos. CLIM49

de vórtices gemelos verticales en la burbuja inmediatamente posterior a los cubos, además de la contracción que se produce entre estos.

4.5. Producción y disipación energía cinética turbulenta.

Las figuras 16 y 17 muestran el perfil de producción de energía cinética turbulenta promediada en cada plano horizontal en azul y la disipación en rojo, ambos adimensionados con u^* y h en las simulaciones CLIM46 y CLIM49. O sea $\epsilon^* = \frac{h\epsilon}{u^{*3}}$ y $\mathcal{P}^* = -\frac{h\mathcal{P}}{u^{*3}}$.

A primera vista es evidente que el valor máximo de la producción se da justo encima de los obstáculos, lo cual es coherente con lo que se espera ver. Por debajo de la altura de los obstáculos el tensor de deformación medio tiene componentes debido a las derivadas de la velocidad media en todas las direcciones que son del mismo orden. Por encima de la altura de los obstáculos la derivada que domina es $\frac{dU}{dz}$ y el tensor de tensiones turbulento es dominado por las tensiones horizontales que son lineales en altura. Entonces la producción en una zona superior a, digamos, $2h$ se puede aproximar por $\mathcal{P} \approx \tau \frac{dU}{dz}$, y como

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{dz} &= \frac{u^*}{\kappa Z} \\ \tau &= \tau_w \left(1 - \frac{Z}{\delta}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathcal{P} \approx -\frac{\tau_w u^*}{\kappa Z} \left(1 - \frac{Z}{\delta}\right) \Rightarrow \mathcal{P}^* \approx \frac{h/\delta}{\kappa} \left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$$

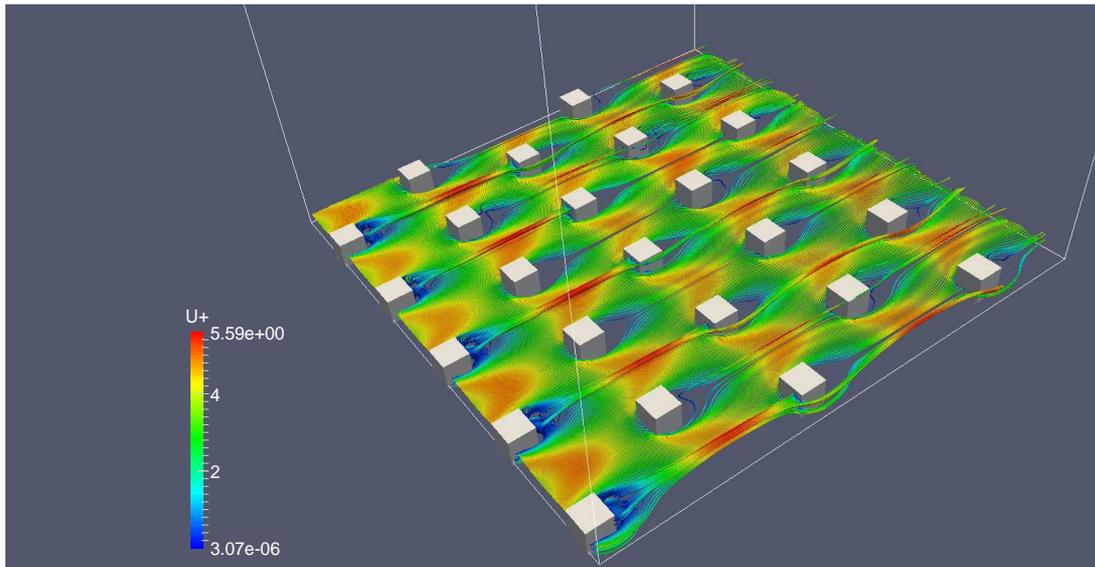


Figura 14: Líneas de flujo en la subcapa rugosa. CLIM46

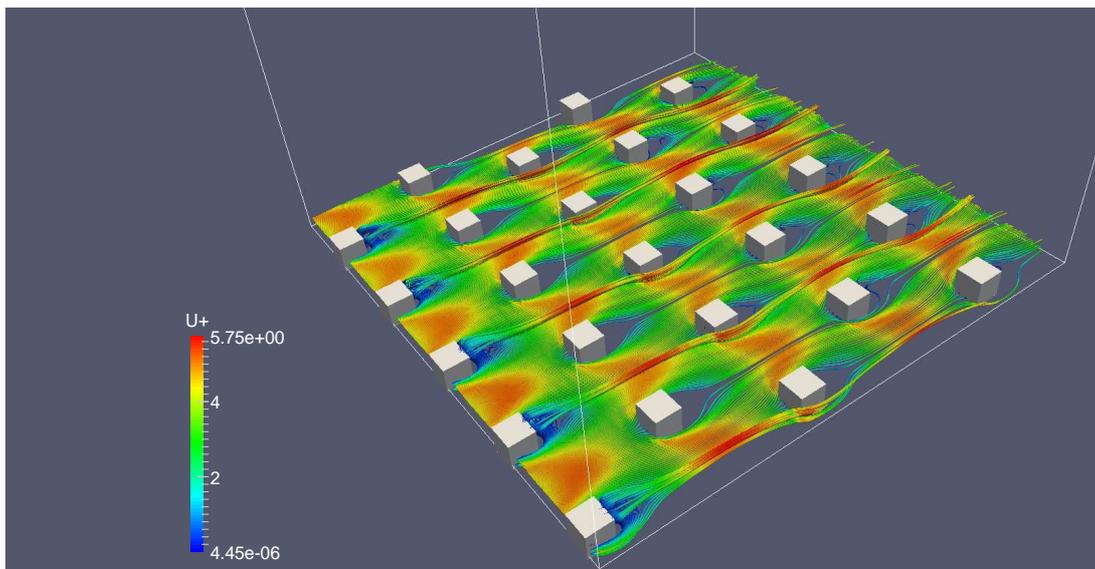


Figura 15: Líneas de flujo en la subcapa rugosa. CLIM49

lo cual se verifica.

La disipación es mucho más difícil de estimar, y en general se estima a partir de la producción en las zonas donde se puede asumir equilibrio. En la zona logarítmica la experiencia muestra que la producción y la disipación deben estar en equilibrio, o sea, ser iguales. Es evidente, por lo observado en las figuras 16 y 17, que esto no se cumple en ninguna de las simulaciones efectuadas. Aunque para que el balance de energía cinética turbulenta sea completo, falta mostrar los términos de transporte turbulento y convectivo, es conocido que estos solo son significativos en la subcapa rugosa, lo cual hace pensar que el balance de energía cinética turbulenta no se cumple. Esto es difícil de entender, ya que la energía que se produce debe ir a algún lado ya que si esto no sucede, se estaría acumulando, lo cual no sucede. O sea que en las simulaciones la energía producida se disipa de alguna manera. Una alternativa que explicaría este problema, es que el término de disipación calculado a partir de la viscosidad turbulenta no toma en cuenta toda

la disipación que introduce el modelo. Esto puede deberse a que este introduce una viscosidad numérica debido a los esquemas de discretización utilizados que actúa disipando energía que no se tiene en cuenta en los cálculos. Por otro lado, puede apreciarse que en la simulación CLIM49 (ver figura 17) la disipación calculada es notoriamente mayor a la calculada en la simulación CLIM46 (ver figura 16). La simulación CLIM46 se hizo con un coeficiente de blending de 0,7 y la CLIM49 con 0,95. Cuando el valor del coeficiente de blending es mayor, el esquema es menos disipativo, y, por lo tanto, la viscosidad que introduce el modelo de tensiones residuales actúa en mayor medida y como resultado la disipación calculada aumenta. En resumen, en base a lo discutido previamente, se sospecha que el modelo introduce una viscosidad numérica elevada. Esto traería como consecuencia que el modelo de subgrilla no estaría actuando como tal y no se tendría control sobre el "modelo" de subgrilla que realmente se está utilizando.

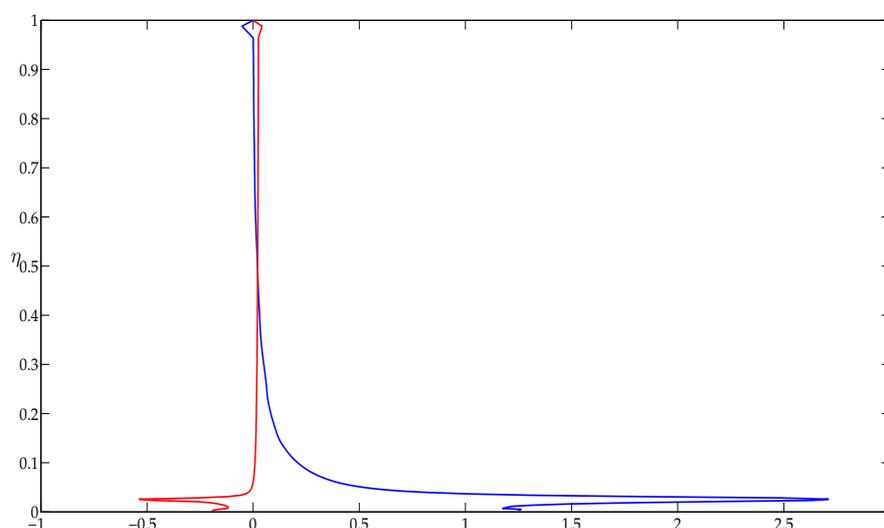


Figura 16: Producción y disipación de energía cinética turbulenta en altura. CLIM46

4.6. Correlaciones, escalas y espectros

En la figura 18 se presenta, a diferentes alturas, la función de correlación espacial de u' .

Es evidente el efecto de la periodicidad impuesta en las paredes. La correlación se pierde en la medida que ΔL aumenta hasta un mínimo que se da en $\Delta L = L/2$ para luego crecer. En valores de z bajos (dentro de la subcapa rugosa) se aprecia el efecto de la presencia de los cubos, generando una correlación que crece y decrece de forma periódica con un período de $0,384m$ que es la distancia entre los cubos en la dirección del flujo. En las correlaciones ρ_{11} se registran valores mínimos más bajos en la simulación CLIM49 que en la CLIM46 aunque es una diferencia mínima. Que el valor absoluto mínimo de la correlación en $\Delta L = L/2$ sea lo más bajo posible es una condición deseable ya que indica que se tiene un tamaño de dominio que permite que las estructuras del flujo se desarrollen libremente sin restricciones impuestas por la condición de periodicidad.

Las escalas integrales L_{11} y L_{22} calculadas en base a las correlaciones ρ_{11} y ρ_{22} son presentadas en la figura 19 para la simulación CLIM46.

La escala integral crece con la altura en una manera aproximadamente potencial hasta cierta altura en la que comienza a decrecer (Counihan, 1975).

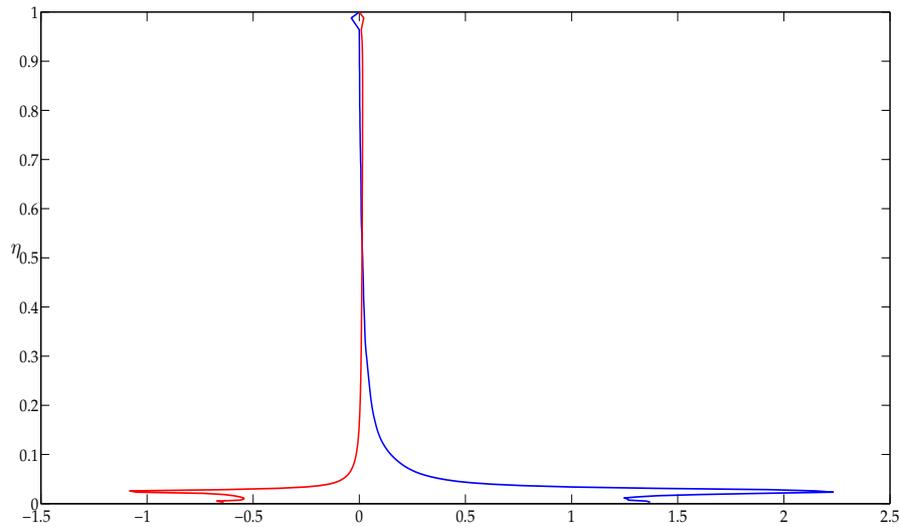


Figura 17: Producción y disipación de energía cinética turbulenta en altura. CLIM49

La escala de longitudes es correspondiente a la escala integral L_{11} es

$$e_L = 272$$

por lo tanto $z_{om} = \frac{z_{op}}{e_L} = 2,0 \cdot 10^{-4}$ m. Se recuerda que el valor de z_o hallado ajustando la velocidad es $z_o = 5,1 \cdot 10^{-4}$ m, lo cual es una buena concordancia. El mismo análisis para los valores obtenidos en la simulación CLIM49 resultan en un valor de $z_{om} = 1,9 \cdot 10^{-4}$ m.

Los espectros a $z = 0,052m$ muestran una serie de picos que están claramente relacionados con la presencia de las cubos, como puede verse en la figura. El hecho más importante que muestran los espectros es que no se registra la presencia del rango inercial, salvo en el espectro de v' a $z = 0,052m$. En todos los otros casos el espectro decae con κ^m siendo $m < -5/3$. Este comportamiento presenta una gran dificultad: el modelo de tensiones residuales usado se basa en que se resuelve el flujo a escalas que permiten apreciar el rango inercial, lo cual no sucede. Si no se llega a resolver el rango inercial, la hipótesis de que las tensiones residuales se pueden modelar con un solo parámetro (ν_r) pierde validez. Esto sugiere que se está haciendo una simulación VLES (Very Large Eddy Simulation). La causa no parece ser que la malla elegida sea muy gruesa, ya que los espectros decaen mucho antes de llegar al κ_{max} . En cambio este comportamiento refuerza la idea de la presencia de una viscosidad numérica que actúa disipando energía a una escala mucho mayor, tal como se intuyó en la subsección 4.5.

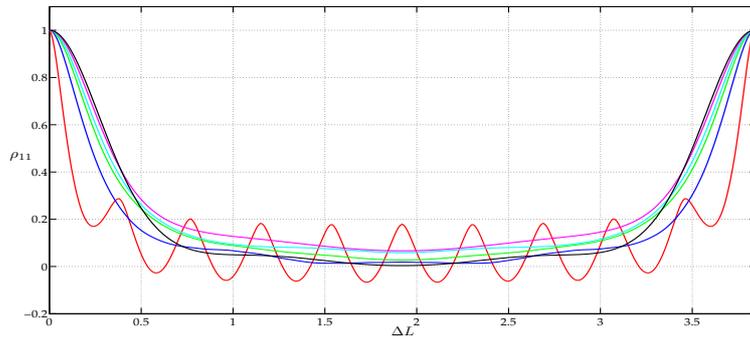


Figura 18: Correlación de u' a diferentes alturas. CLIM46

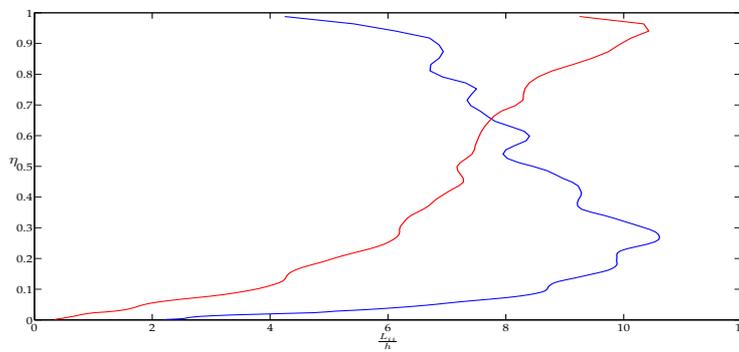


Figura 19: Escala integral longitudinal L_{11} en altura. CLIM46

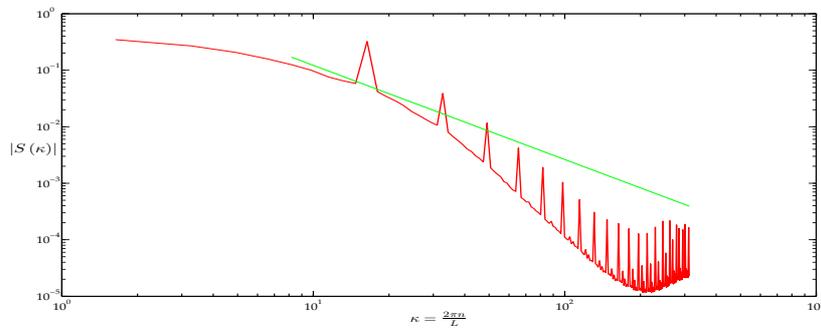


Figura 20: Espectros de u' a $z = 0,06m$. CLIM46

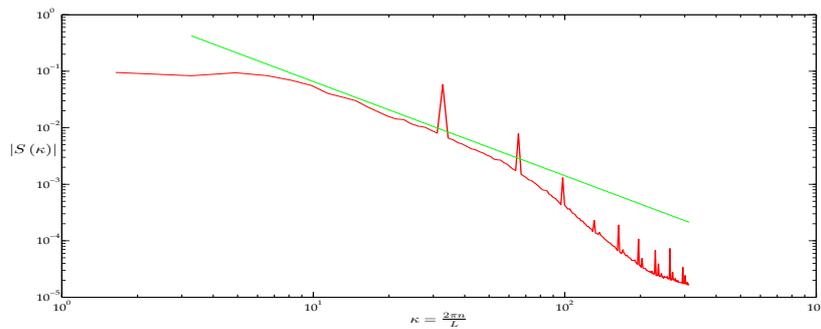


Figura 21: Espectros de v' a $z = 0,06m$. CLIM46

5. CONCLUSIONES

El esquema utilizado para simular una capa límite sobre una superficie rugosa arrojó resultados cualitativamente satisfactorios y en algunos aspectos, también en términos cuantitativos. Las dimensiones del dominio utilizado en las simulaciones permitió que el valor de la correlación de la velocidad cayera a un valor cercano a cero cuando la distancia es la mitad de la longitud del dominio. Esto permitió eliminar la presencia de vórtices de eje horizontal persistentes.

Se registró la tensión rasante horizontal en altura, discriminando las contribuciones de cada término, hallándose que el término de tensiones de Reynolds es el más significativo, siendo las tensiones viscosas, las debidas a la viscosidad turbulenta que impone el modelo de Smagorinsky y las dispersivas, de menor orden para ambas simulaciones. El cálculo de la altura de desplazamiento nulo resulta en un valor algo menor al esperado. A la altura de los cubos (donde se da el pico de tensión media), se detecta una variación espacial de la tensión rasante que va desde $-0,3\tau_w < \tau < 1,55\tau_w$.

El perfil de velocidad media en altura, tiene evidentemente una región logarítmica en ambas simulaciones. Un ajuste de los parámetros permitió calcular la longitud de rugosidad z_o y la constante de Von Karman κ . Los valores de z_o son algo menores a los esperados y los de κ algo mayores. Se considera aceptable la concordancia.

Los niveles de turbulencia son correctamente reproducidos en ambas simulaciones siendo el comportamiento de la simulación CLIM46 algo mejor en la medida que z aumenta.

En la subcapa rugosa el campo de velocidad media tiene cualitativamente un comportamiento correcto, pudiendo observarse la burbuja de recirculación aguas abajo de cada cubo.

La producción de energía cinética turbulenta es reproducida de buena manera, como es de esperar, ya que el campo de velocidad medio y las tensiones rasantes fueron bien reproducidas. Una característica interesante que se registra, es la presencia de zonas donde la producción es negativa. En estos casos se tiene flujo de energía desde la turbulencia hacia el flujo medio. Esto no puede ser captado por los modelos RANS simples, en los que la viscosidad turbulenta es siempre positiva y muestra la virtud de la simulación de grandes vórtices. La disipación no está en balance con la producción en la región logarítmica en ninguna de las simulaciones, tal como debería ocurrir. En la simulación CLIM46 este desbalance es más pronunciado que en la simulación CLIM49. Uno de los efectos del aumento en el parámetro de blending es reducir la disipación numérica que impone el código. Si la disipación numérica es menor en la simulación CLIM49 que en la CLIM46, los gradientes en las escalas menores serán mayores en la primera, aumentando no sólo la viscosidad impuesta por el modelo de Smagorinsky sino también la disipación calculada. Este efecto es el observado, por lo tanto es razonable suponer que el código impone una viscosidad numérica que es mayor a la que impone el modelo, lo cual constituye un problema, ya que si esto sucede, el modelo de viscosidad turbulenta no estaría actuando como tal y no se tendría control sobre como se disipa la energía. Esto no quiere decir que la energía no se esté disipando, pero sí que se disipa en escalas mayores a las esperadas. Si esto sucede, un efecto esperable es la ausencia de energía en las escalas menores del flujo resuelto, tal como se observa en los espectros.

Las escalas integrales que se calculan a partir de las correlaciones se comportan correctamente, registrándose un perfil potencial en la zona logarítmica y descendiendo en alturas superiores. Los parámetros de este perfil están en concordancia con el valor de la longitud de rugosidad obtenida. Un análisis de los espectros de potencia de las componentes fluctuantes de la velocidad muestra que solo a $z = 0,052m$ y en el espectro de v' parece captarse el rango inercial. En los demás espectros registrados, se observa una caída en los niveles de energía a escalas menores

muy por debajo de la esperada en el rango inercial. Se considera que este efecto es compatible con lo observado cuando se analizó la disipación.

Los problemas registrados con la disipación podrían solucionarse aumentando el paso de la malla, lo cual permitiría reducir la disipación numérica. La malla utilizada fue dimensionada con los argumentos esgrimidos en la sección 3.3. Por razones de tiempo de cálculo y capacidades necesarias no se juzgo pertinente usar una malla mas fina. Formalmente se debería haber repetido las simulaciones con mallas mas finas para analizar la independencia de la simulación con el paso de la malla. Este aspecto deberá ser considerado en futuros trabajos.

REFERENCIAS

- Bailey S.C.C., Vallikivi M., Hultmark M., y Smits A.J. Estimating the value of von kármán's constant in turbulent pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 749:79–98, 2014. ISSN 1469-7645. doi:10.1017/jfm.2014.208.
- Bandyopadhyay P.R. Rough-wall turbulent boundary layers in the transition regime. *Journal of Fluid Mechanics*, 180:231–266, 1987. doi:10.1017/S0022112087001794.
- Bhaganagar K., Kim J., y Coleman G. Effect of roughness on wall-bounded turbulence. *Flow, Turbulence and Combustion*, 72(2):463–492, 2004. ISSN 1573-1987. doi:10.1023/B:APPL.0000044407.34121.64.
- Coccal O., Dobre A., Thomas T.G., y Belcher S.E. Structure of turbulent flow over regular arrays of cubical roughness. *Journal of Fluid Mechanics*, 589:375–409, 2007. doi:10.1017/S002211200700794X.
- Coccal O., Thomas T., Castro I., y Belcher S. Mean flow and turbulence statistics over groups of urban-like cubical obstacles. *Boundary-Layer Meteorology*, 121(3):491–519, 2006. ISSN 0006-8314. doi:10.1007/s10546-006-9076-2.
- Colebrook C.F. y White C.M. Experiments with fluid friction in roughened pipes. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 161(906):367–381, 1937. ISSN 0080-4630. doi:10.1098/rspa.1937.0150.
- Counihan J. Adiabatic atmospheric boundary layers: A review and analysis of data from the period 1880–1972. *Atmospheric Environment (1967)*, 9(10):871 – 905, 1975. ISSN 0004-6981. doi:http://dx.doi.org/10.1016/0004-6981(75)90088-8.
- Inagaki A., Kanda M., Ahmad N.H., Yagi A., Onodera N., y Aoki T. A numerical study of turbulence statistics and the structure of a spatially-developing boundary layer over a realistic urban geometry. *Boundary-Layer Meteorology*, 164(2):161–181, 2017. ISSN 1573-1472. doi:10.1007/s10546-017-0249-y.
- Jiménez J. Turbulent flows over rough walls. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36(1):173–196, 2004. doi:10.1146/annurev.fluid.36.050802.122103.
- Keirsbulck L., Labraga L., Mazouz A., y Tournier C. Surface roughness effects on turbulent boundary layer structures. *Journal of Fluids Engineering*, 124:127–135, 2001. doi:10.1115/1.1445141.
- Krogstad P., Antonia R.A., y Browne L.W.B. Comparison between rough- and smooth-wall turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 245:599–617, 1992. doi:10.1017/S0022112092000594.
- Leonardi S., Orlandi P., Smalley R.J., Djenidi L., y Antonia R.A. Direct numerical simulations of turbulent channel flow with transverse square bars on one wall. *Journal of Fluid Mechanics*, 491:229–238, 2003. doi:10.1017/S0022112003005500.
- Ligrani P.M. y Moffat R.J. Structure of transitionally rough and fully rough turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 162:69–98, 1986. doi:10.1017/S0022112086001933.

- Nikuradse J. Laws of flow in rough pipes. *VDI Forschungsheft*, página 361, 1933.
- Perry A.E. y Joubert P.N. Rough-wall boundary layers in adverse pressure gradients. *Journal of Fluid Mechanics*, 17(2):193–211, 1963. doi:10.1017/S0022112063001245.
- Perry A.E., Schofield W.H., y Joubert P.N. Rough wall turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 37(2):383–413, 1969. doi:10.1017/S0022112069000619.
- Peskin C.S. The immersed boundary method. *Acta Numerica*, 11:479–517, 2002. doi:10.1017/S0962492902000077.
- Pope S. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000. ISBN 9780521598866.
- Raupach M., Antonia R., y Rajagopalan S. Rough-wall turbulent boundary layers. *Applied Mechanics Reviews*, 44(1):1–25, 1991. doi:10.1115/1.3119492.
- Tachie M.F., Bergstrom D.J., y Balachandar R. Rough wall turbulent boundary layers in shallow open channel flow. *Journal of Fluids Engineering*, 122:533–541, 2000. doi:10.1115/1.1287267.
- Thom A.S. Momentum absorption by vegetation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 97(414):414–428, 1971. ISSN 1477-870X. doi:10.1002/qj.49709741404.
- Usera G., Vernet A., y Ferré J.A. A parallel block-structured finite volume method for flows in complex geometry with sliding interfaces. *Flow, Turbulence and Combustion*, 81(3):471–495, 2008. ISSN 1573-1987. doi:10.1007/s10494-008-9153-3.