

## SIMULACIONES DE ALTA RESOLUCIÓN DE INTRUSIONES CON EFECTOS DE ROTACIÓN

**Santillán Pablo F.<sup>a,b</sup>, Cantero Mariano I.<sup>a,b,c</sup>, González Alejandra<sup>b</sup> y Arnica Daniela<sup>b</sup>**

<sup>a</sup>*Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, Av. Ezequiel Bustillos 9500, 8400 San Carlos de Bariloche, Rio Negro, Argentina.*

<sup>b</sup>*Departamento de Mecánica Computacional, Centro Atómico Bariloche, Comisión Nacional de Energía Atómica, Av. Ezequiel Bustillos 9500, 8400 San Carlos de Bariloche, Rio Negro, Argentina.*

<sup>c</sup>*CONICET, Centro Atómico Bariloche, Av. Ezequiel Bustillos 9500, 8400 San Carlos de Bariloche, Rio Negro, Argentina.*

**Palabras Clave:** Corrientes de gravedad, Intrusiones, Efectos de Rotación, Simulación directa de turbulencia, Turbulencia.

**Resumen.** Las intrusiones son flujos generados por el efecto de la gravedad sobre fluidos de diferentes densidad. Estos flujos se manifiestan como corrientes horizontales de un fluido en un medio estratificado. Un ejemplo de este tipo de flujos son las plumas volcánicas, que al encontrar el punto boyante neutro se convierten en intrusiones horizontales. En escalas geológicas, y debido al efecto de la rotación de la tierra, los efectos de rotación son de importancia y deben tenerse en cuenta para el modelado de las intrusiones.

En este trabajo se presenta la implementación realizada al código pseudo-espectral utilizado para realizar los cálculos, el cual consiste en la utilización de dos escalares para la simulación de las intrusiones. Con esta implementación se analiza la intrusión y el fluido ambiente por separado, pudiendo estudiar de manera detallada el frente y otras características de la intrusión. El enfoque principal de este trabajo es estudiar el comportamiento de estos flujos sometidos a elevados efectos de rotación, observando la dinámica de la intrusión tanto en el transitorio como en el estado geostrófico.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las corrientes de gravedad y las intrusiones son flujos generados por gradientes de presión horizontales resultantes del efecto de la gravedad sobre fluidos de diferente densidad. Estos flujos se manifiestan como una corriente horizontal de un fluido liviano por encima de un fluido pesado, como una corriente de fluido pesado debajo de un fluido liviano o como una corriente de un fluido en un medio estratificado, y puede ser producida por una pequeña diferencia de densidad entre los fluidos (L. Brekhovskikh y Tseng., 1992). Las configuraciones básicas de estos flujos se muestran en la figura 1.

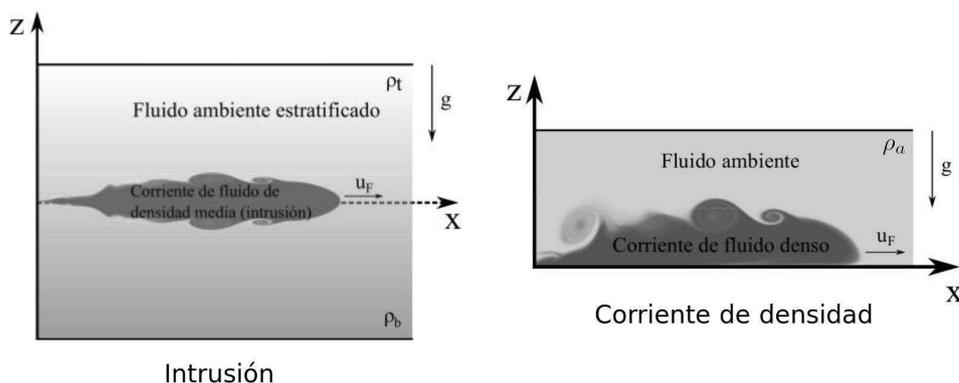


Figura 1: (*izq.*) Intrusión en un ambiente estratificado, con  $\rho_b$  y  $\rho_t$  densidades mínima y máxima del ambiente respectivamente, y  $\rho_c$  es la densidad del fluido de la corriente ( $\rho_b > \rho_c > \rho_t$ ); (*der.*) Corriente de gravedad de un fluido denso, con  $\rho_a$  densidad del fluido ambiente y  $\rho_c$  es la densidad del fluido de la corriente ( $\rho_c > \rho_a$ ). Imagen obtenida de Salinas (2014).

Las intrusiones están presentes en la naturaleza en muchas situaciones, un ejemplo son las plumas volcánicas, las cuales se transforman en intrusiones al encontrar el punto boyante neutro en el ambiente. En la atmósfera, la mayoría de las ráfagas severas asociadas con las tormentas son causadas por la llegada de una enorme corriente de gravedad de aire frío. Muchas veces estas corrientes se pueden identificar por la presencia de partículas de arena y polvo que han sido levantadas del piso por los fuertes vientos turbulentos.

Otros ejemplos de estas corrientes se encuentran en los procesos industriales como ser la propagación de gases pesados y los sistemas de ventilación que utilizan la fuerza boyante para conducir flujos horizontales que se mueven a lo largo de canales, techos o el suelo.

En este trabajo se estudia el comportamiento de las intrusiones sometidas a efectos de rotación por medio de simulaciones directas de turbulencia (*DNS*). Las simulaciones directas de turbulencia se realiza mediante un código pseudo-espectral que utiliza expansiones de Fourier en las dos direcciones horizontales, y expansiones de Chebyshev en la dirección vertical. Presentamos también una implementación realizada al código, la cual consiste en la utilización de dos escalares en las simulaciones, y una validación mediante la comparación con los datos reportados por Salinas (2014) para una corriente de gravedad cilíndrica.

Para el análisis de las intrusiones se realizaron tres simulaciones numéricas tridimensionales con grillas de resolución de hasta 120 millones de puntos, número de Schmidt  $Sc = 1$ , número de Reynolds  $Re = 4000$ , con condición de contorno de libre deslizamiento para todas las simulaciones en ambas paredes, y velocidades de rotación elevadas ( $C = 0,8$ ;  $C = 1,1$  y  $C = 1,5$ ). Las definiciones de estos números adimensionales se encuentran en la sección 2. Adicionalmente se presentan resultados sobre las cantidades macroscópicas, tales como la propagación del frente y la frecuencia de las oscilaciones de los sucesivos frentes.

## 2. MODELADO MATEMÁTICO

El sistema en cuestión se representa esquemáticamente en la figura 2. Se compone de un dominio rectangular que gira a una velocidad angular constante  $\Omega_z$  alrededor del eje vertical en sentido horario. Inicialmente, la región cilíndrica de radio  $r_0$  está llena de un fluido de densidad  $\rho_c$  (región gris sombreada), el cual está separado de dos fluidos ambiente, uno de densidad  $\rho_0$  ( $\rho_0 < \rho_c$ ) y el otro de densidad  $\rho_1$  ( $\rho_1 > \rho_c$ ). Los tres fluidos se encuentran en co-rotación con el dominio. Para este trabajo tomamos  $\rho_c = \frac{\rho_1 + \rho_0}{2}$ . Al comienzo de la simulación el fluido de densidad  $\rho_c$  se libera, produciendo un flujo que se desarrolla a lo largo de las dos direcciones horizontales ( $x$  e  $y$ ). Se consideran flujos en los que la diferencia de densidad es lo suficientemente pequeña como para que la aproximación de Boussinesq sea válida. Bajo estas circunstancias, las ecuaciones de conservación adimensionales para un fluido newtoniano en régimen incompresible en un sistema de referencia rotante son:

$$\frac{D\tilde{\mathbf{u}}}{D\tilde{t}} = -\nabla\tilde{p} + \frac{1}{Re}\nabla^2\tilde{\mathbf{u}} + \text{sgn}(g)\tilde{\rho}\hat{\mathbf{z}} + 2C(\tilde{u}_y\hat{\mathbf{x}} + \tilde{u}_x\hat{\mathbf{y}}), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{D\tilde{\rho}}{D\tilde{t}} = \frac{1}{Re Sc}\nabla^2\tilde{\rho}. \quad (3)$$

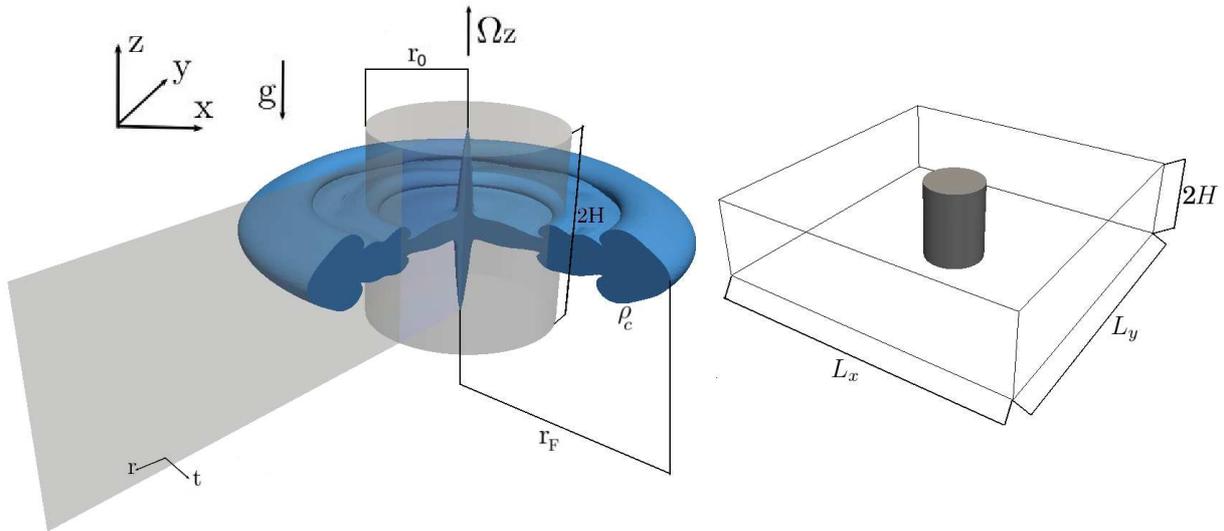


Figura 2: Esquema de configuración para las intrusiones cilíndricas. El dominio de dimensiones  $L_x \times L_y \times H$  se encuentra rotando a una velocidad angular  $\Omega_z$  alrededor del eje vertical  $z$  que pasa por el centro del dominio.

En estas ecuaciones  $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$  es el campo de velocidades adimensional,  $\tilde{p}$  la presión adimensional, y  $\tilde{\rho}$  la densidad adimensional. Los parámetros adimensionales en las ecuaciones (1)-(3) son el número de Reynolds  $Re$ , de Schmidt  $Sc$  y el parámetro de Coriolis  $C$  definidos como:

$$Re = \frac{UH}{\nu}, \quad (4)$$

$$Sc = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (5)$$

$$C = \frac{\Omega_z H}{U}, \quad (6)$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática y  $\kappa$  la difusividad molecular.

Para la adimensionalización de las ecuaciones (1)-(3) se emplea como escala de longitud la altura del dominio  $H$ , escala de velocidad  $U = \sqrt{\frac{\beta |g| H}{2}}$  con  $\beta = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0}$  y la escala de tiempo  $T = H/U$ . La densidad adimensional  $\tilde{\rho}$  se define como:

$$\tilde{\rho} = 2 \frac{\rho - \rho_0}{\rho_1 - \rho_0} \quad (7)$$

donde  $\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\beta}{2} \tilde{\rho}\right)$ . La densidad adimensional se encuentra en el intervalo  $0 \leq \tilde{\rho} \leq 2$ , siendo  $\rho = \rho_0$  cuando  $\tilde{\rho} = 0$ ,  $\rho = \rho_1$  cuando  $\tilde{\rho} = 2$ , y  $\rho = \rho_c$  cuando  $\tilde{\rho} = 1$ .

Las ecuaciones de conservación (1)-(3) se resuelven en un dominio rectangular de dimensiones  $\tilde{L}_x \times \tilde{L}_y \times 2\tilde{H}$ , con condiciones de contorno periódicas a lo largo de las direcciones horizontales  $x$  e  $y$  para todas las variables. Debido a que la corriente se desarrolla a lo largo de las dos direcciones horizontales de igual modo, utilizaremos  $\tilde{L}_x = \tilde{L}_y$ . El tamaño del dominio se selecciona de modo de que el frente de la intrusión no llegue al final del mismo.

### 3. MODELO NUMÉRICO

En esta sección se detallan la geometría utilizada y las características del código empleado. También documentamos las modificaciones realizadas al código para este trabajo.

#### 3.1. Geometría

El dominio está compuesto por dos paredes paralelas separadas una distancia  $2H$  en la dirección vertical  $z$  (ver figura 3). El modelo asume que el flujo es periódico en las direcciones  $x$  e  $y$ . El dominio de cálculo tiene dimensiones  $L_x \times L_y \times 2H$  en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

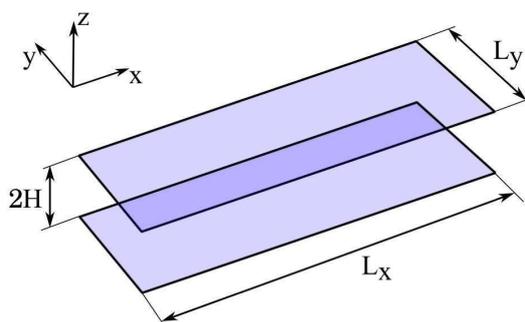


Figura 3: Sección del dominio periódico de dimensiones  $L_x \times L_y \times 2H$  (Salinas, 2014).

#### 3.2. Discretización temporal

Para resolver las ecuaciones de conservación (1)-(3), utilizaremos un método de pasos fraccionados (Deville et al., 2002). El campo de velocidades del flujo es avanzado desde el instante de tiempo  $t^{(n)}$  al  $t^{(n+1)}$  en dos pasos fraccionados. Primero utilizamos una ecuación de

advección-difusión para avanzar la velocidad desde el instante  $t^{(n)}$  al paso intermedio  $t^{(n*)}$  (las condiciones de contorno para este paso intermedio se pueden ver de manera detallada en Salinas (2014)). En el segundo paso fraccionado se realiza la corrección de presión, la cual se lleva a cabo en dos etapas. En la primera se resuelve una ecuación de Poisson y una vez que se determina la presión, se corrige el campo de velocidades para obtener una divergencia nula.

La discretización temporal del paso de advección-difusión y de la ecuación de transporte del escalar se logra utilizando un esquema mixto Runge-Kutta de tercer orden y Crank-Nicolson (Canuto et al., 2007). El paso de tiempo de  $t^{(n)}$  a  $t^{(n+1)}$  ( $\Delta t$ ) es fraccionado en tres pasos más pequeños, con corrección de presión al final de cada paso de Runge-Kutta.

De aquí en adelante, para simplificar la notación, omitiremos las tildes ( $\sim$ ) que identifican las variables adimensionales y definiremos los operadores de advección y difusión. El operador de difusión para la ecuación de conservación de momento es definido como:

$$D = \frac{1}{Re} \nabla^2(). \quad (8)$$

Para el campo de velocidades se utilizan dos operadores de advección:

$$A_c() = -\mathbf{u} \cdot \nabla(), \quad (9)$$

$$A_d() = -\nabla \cdot [\mathbf{u}()]. \quad (10)$$

Esto corresponde a las formas convectivas y divergentes del operador de advección. Alternando entre estos dos operadores de advección para sucesivos pasos de tiempos, se obtienen resultados similares a los que se ven con formas asimétricas de las ecuaciones de gobierno, pero con la ventaja de que el número de derivadas que se necesitan evaluar para un paso de tiempo se reduce a la mitad. De aquí en adelante, el operador de advección será referido como  $\mathbf{A}()$  sin mencionar su forma específica.

Además, se definen los operadores de advección y difusión para la ecuación de transporte del escalar. El operador de advección es

$$A_\rho() = -\nabla \cdot [\rho()], \quad (11)$$

y el de difusión

$$D_\rho = \frac{1}{Re Sc} \nabla^2 \rho. \quad (12)$$

El vector de fuerzas se define como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \rho) = (2Cv, -2Cu, \text{sgn}(g) \rho), \quad (13)$$

donde  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  es el campo de velocidades y  $\rho$  el campo escalar.

Para mostrar un paso de tiempo completo se define un número de etapa  $m$  de Runge-Kutta, un coeficiente para el primer término no lineal  $cnl1$ , un coeficiente para el segundo término no lineal  $cnl2$  y un coeficiente para el término difusivo  $cd$ .

$$m = (1, 2, 3), \quad (14)$$

$$cnl1(m) = \left( 0, -\frac{5}{9}, -\frac{153}{128} \right), \quad (15)$$

$$cnl2(m) = \left( \frac{1}{3}, \frac{15}{16}, \frac{8}{15} \right), \quad (16)$$

$$cd(m) = \left( \frac{\Delta t}{6}, \frac{5\Delta t}{24}, \frac{\Delta t}{8} \right). \quad (17)$$

Los campos en la etapa de nivel 0 (cero) son iguales a los correspondientes tiempos  $t^{(n)}$ :

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}(t^{(n)}), \quad (18)$$

$$\rho^{(0)} = \rho(t^{(n)}). \quad (19)$$

Las ecuaciones empleadas en un subpaso de Runge-Kutta son:

$$\mathbf{H}^{(m)} = \Delta t A(\mathbf{u}^{(m-1)}) + cnl1(m) \mathbf{H}^{(m-1)} + \Delta t \mathbf{F}^{(m-1)}, \quad (20)$$

$$H_{\rho}^{(m)} = \Delta t A_{\rho}(\mathbf{u}^{(m-1)}) + cnl1(m) H_{\rho}^{(m-1)}, \quad (21)$$

$$\mathbf{u}^{(m*)} = \mathbf{u}^{(m-1)} + cnl2(m) \mathbf{H}^{(m)} + cd(m) [D(\mathbf{u}^{(m-1)}) + D(\mathbf{u}^{(m*)})], \quad (22)$$

$$\rho^{(m)} = \rho^{(m-1)} + cnl2(m) H_{\rho}^{(m)} + cd(m) [D_{\rho}^{(m-1)} + D_{\rho}^{(m)}], \quad (23)$$

$$\nabla^2 p^{(m)} = \frac{1}{2 cd(m)} \nabla \cdot \mathbf{u}^{(m*)}, \quad (24)$$

$$\mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{u}^{(m*)} - 2 cd(m) \nabla p^{(m)}. \quad (25)$$

Primero se calcula el campo de velocidades auxiliar  $\mathbf{u}^{(m*)}$  con la ecuación (22) y el campo escalar de la etapa  $m$  con la ecuación (23). Luego, se calcula la presión correspondiente resolviendo la ecuación de Poisson (24) que hace uso del campo de velocidad auxiliar. Paso seguido, se corrige el campo de velocidades con la ecuación (25), obteniéndose el campo de velocidades de la etapa ( $m$ ) con divergencia nula. Una vez que se completa la última etapa, los campos son actualizados:

$$\mathbf{u}(t^{(n+1)}) = \mathbf{u}^{(3)}, \quad (26)$$

$$\rho(t^{(n+1)}) = \rho^{(3)}. \quad (27)$$

y el proceso comienza nuevamente.

### 3.3. Discretización espacial

En las direcciones horizontales  $x$  e  $y$  se utilizan expansiones de Fourier, mientras que en la dirección vertical  $z$  se utilizan expansiones de Chebyshev. La expresión utilizada para discretizar una variable  $u$  es:

$$u(x_j, y_k, z_l, t) = \sum_{k_x=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} \sum_{k_y=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} \sum_{k_z=0}^{N_z-1} \hat{u}(k_x, k_y, k_z, t) e^{i\frac{2\pi k_x}{L_x} x_j} e^{i\frac{2\pi k_y}{L_y} y_k} T_{k_z}(z_l), \quad (28)$$

donde  $T_{k_z}$  se refiere al  $k_z$ -ésimo polinomio de Chebyshev,  $k_x$  y  $k_y$  son los números de onda y  $\hat{u}(k_x, k_y, k_z, t)$  es la amplitud del modo correspondiente.

En las direcciones horizontales  $x$  e  $y$  los puntos de grilla son uniformemente espaciados. En la dirección vertical  $z$  se utilizan puntos de cuadratura de Gauss-Lobatto, los cuales proveen una mayor resolución cerca de las paredes así como puntos de grilla en las paredes superior e inferior. La posición de los puntos de grilla en las direcciones horizontales  $x$  e  $y$  y la dirección normal  $z$  son:

$$x_j = \frac{jL_x}{N_x}, \quad 0 \leq j \leq N_x - 1, \quad (29)$$

$$y_k = \frac{kL_y}{N_y}, \quad 0 \leq k \leq N_y - 1, \quad (30)$$

$$z_l = \frac{H}{2} \cos \left[ \frac{(l-1)\pi}{N_z-1} \right], \quad 1 \leq l \leq N_z, \quad (31)$$

donde  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_z$  son la cantidad de puntos en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

Un paso de tiempo se completa utilizando las ecuaciones (18)-(27). Las ecuaciones (20)-(25) deben ser resueltas para cada una de las tres etapas del esquema Runge-Kutta. Con trabajo algebraico de las ecuaciones (22) - (24) se pueden escribir como ecuaciones de Helmholtz/Poisson para las tres componentes de la velocidad, el campo escalar y para la presión. La ecuación de conservación de momento para la componente  $u$  de la velocidad nos queda:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 u^{(m*)}}{\partial x^2} + \frac{\partial u^{(m*)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^{(m*)}}{\partial z^2} \right) - \frac{Re}{cd(m)} u^{(m*)} = \\ & = \frac{Re}{cd(m)} \left[ u^{(m-1)} + cnl2(m) H_x^{(m)} \right] + \left( \frac{\partial^2 u^{(m-1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(m-1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^{(m-1)}}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Para las componentes  $v$  y  $w$  resultan ecuaciones equivalentes.

El lado derecho de la ecuación (32) puede ser calculado con información conocida, entonces para simplificar el análisis, el lado derecho de la ecuación se escribirá como  $rhs_x^{(m*)}$ .

Como siguiente paso, se realiza la transformada de Fourier (en las direcciones  $x$  e  $y$ ) de la ecuación (32)

$$\frac{\partial^2 \hat{u}^{(m*)}}{\partial z^2} - \left( \frac{Re}{cd(m)} + k_x'^2 + k_y'^2 \right) \hat{u}^{(m*)} = r\hat{h}s_x^{(m*)}, \quad (33)$$

donde  $k_x'^2 = \frac{2\pi k_x}{L_x}$ ,  $k_y'^2 = \frac{2\pi k_y}{L_y}$  y el sombrero "ˆ" indica el coeficientes de fourier. De manera similar se procede con la ecuación (23) para el campo escalar

$$\frac{\partial^2 \hat{\rho}^{(m)}}{\partial z^2} - \left( \frac{Pe}{cd(m)} + k_x'^2 + k_y'^2 \right) \hat{\rho}^{(m)} = r \hat{h}_\rho^{(m)}. \quad (34)$$

La discretización en la dirección  $z$  puede expresarse en términos de una operación de multiplicación matricial (Canuto et al., 2012). Combinando una transformación discreta de Chevyshev, diferenciación recursiva y una transformación inversa de Chevyshev, puede ser definida una única operación de multiplicación matricial para diferenciar una variable discretizada. La matriz para la derivada primera con respecto a  $z$  es escrita de manera simbólica como

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial z} = \overline{\overline{D}}_1(\cdot). \quad (35)$$

La matriz  $\overline{\overline{D}}_1(\cdot)$  es asimétrica de  $N_z$  filas y  $N_z$  columnas (Canuto et al., 2012). El operador para realizar la segunda derivada parcial con respecto a  $z$  puede ser formulado simplemente multiplicando dos operadores matriciales de derivada primera.

$$\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2} = \frac{\partial \left( \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \right)}{\partial z} = \overline{\overline{D}}_1 \left( \overline{\overline{D}}_1(\cdot) \right) = \overline{\overline{D}}_2(\cdot). \quad (36)$$

La notación de la ecuación (36) puede ser utilizada para reemplazar las derivadas parciales en la ecuación (33):

$$\overline{\overline{D}}_2(\hat{u}^{(m*)}) - \left( \frac{Re}{cd(m)} + k_x'^2 + k_y'^2 \right) \hat{u}^{(m*)} = r \hat{h}_{s_x}^{(m*)}. \quad (37)$$

De manera similar, las componentes  $y$  y  $z$  de la ecuación de advección-difusión y para el escalar puede ser discretizada como:

$$\overline{\overline{D}}_2(\hat{v}^{(m*)}) - \left( \frac{Re}{cd(m)} + k_x'^2 + k_y'^2 \right) \hat{v}^{(m*)} = r \hat{h}_{s_y}^{(m*)}, \quad (38)$$

$$\overline{\overline{D}}_2(\hat{w}^{(m*)}) - \left( \frac{Re}{cd(m)} + k_x'^2 + k_y'^2 \right) \hat{w}^{(m*)} = r \hat{h}_{s_z}^{(m*)}, \quad (39)$$

$$\overline{\overline{D}}_2(\hat{\rho}^{(m)}) - \left( \frac{Re Sc}{cd(m)} + k_x'^2 + k_y'^2 \right) \hat{\rho}^{(m)} = r \hat{h}_\rho^{(m)}. \quad (40)$$

### 3.4. Tratamiento de las condiciones de contorno

Las ecuaciones (37)-(40) son sólo válidas para el interior del dominio, por lo que para tener el sistema de ecuaciones completo se utilizan condiciones de contorno mixtas para los bordes superior e inferior. Para simplificar la notación utilizaremos la variable  $\hat{c}$  (en el espacio de Fourier) que puede representar el campo escalar  $\hat{\rho}$  o una de las tres componentes del campo vectorial de velocidades ( $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  o  $\hat{w}$ ).. De aquí en adelante, se omitirán los súper-índices  $m$  y  $m^*$  que indican el número de etapa de nuestro esquema numérico, con el objetivo de simplificar la notación. Una vez transformado al espacio de Fourier, el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial z^2} + \alpha \hat{c} = r \hat{h} s, \quad (41)$$

$$\alpha_b \hat{c}|_b + \beta_b \left. \frac{\partial \hat{c}}{\partial z} \right|_b = \gamma_b, \quad (42)$$

$$\alpha_t \hat{c}|_t + \beta_t \left. \frac{\partial \hat{c}}{\partial z} \right|_t = \gamma_t. \quad (43)$$

donde el sub-índice "b" se refiere al borde inferior del dominio y "t" al borde superior.

El coeficiente  $\alpha$  de la ecuación (41) puede adquirir distintos valores según que variable presente  $\hat{c}$ :

$$\alpha = \frac{Re}{cd(m)} + k'_x{}^2 + k'_y{}^2 \quad \text{si } \hat{c} = \hat{u}, \hat{v}, \hat{w}; \quad (44)$$

$$\alpha = \frac{Re Sc}{cd(m)} + k'_x{}^2 + k'_y{}^2 \quad \text{si } \hat{c} = \hat{\rho}. \quad (45)$$

El sistema de ecuaciones (41)-(43) puede presentarse en su forma discreta, como se planteó en las ecuaciones (37)-(40):

$$\overline{\overline{D}}_2 \hat{c} + \alpha \overline{\overline{I}} \hat{c} = r \hat{h} s, \quad (46)$$

$$\alpha_t \hat{c}_1 + \beta_t \overline{\overline{D}}_1 \hat{c} = \gamma_t, \quad (47)$$

$$\alpha_b \hat{c}_n + \beta_b \overline{\overline{D}}_1 \hat{c} = \gamma_b. \quad (48)$$

donde  $n = N_z$ . En el caso que  $\hat{c} = \hat{\rho}$  los coeficientes de las ecuaciones (47) y (48) pueden adquirir cualquier valor. Si  $\hat{c} = \hat{u}$  o  $\hat{c} = \hat{v}$ :

$$\alpha_t = \{0, 1\}, \beta_t = 1 - \alpha_t, \gamma_t = 0, \quad (49)$$

$$\alpha_b = \{0, 1\}, \beta_b = 1 - \alpha_b, \gamma_b = 0, \quad (50)$$

donde  $\alpha_t = 0, \beta_t = 1$  y  $\gamma_t = 0$  representa la condición de contorno de libre deslizamiento, mientras que  $\alpha_t = 1, \beta_t = 0$  y  $\gamma_t = 0$  la condición de contorno de no deslizamiento. Para el caso  $\hat{c} = \hat{w}$ :

$$\alpha_t = 1, \beta_t = 0, \gamma_t = 0 \quad (51)$$

$$\alpha_b = 1, \beta_b = 0, \gamma_b = 0 \quad (52)$$

la cual representa la condición de contorno de no penetración.

Este sistema de ecuaciones discretizado puede ser representado en su forma matricial:

$$\overline{\overline{A}} \hat{c} + \alpha \overline{\overline{I}} \hat{c} = \hat{R}, \quad (53)$$

donde:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \alpha_t + \beta_t \bar{D}_{111} & \beta_t \bar{D}_{112} & \cdots & \beta_t \bar{D}_{11i} & \cdots & \beta_t \bar{D}_{11n} \\ \bar{D}_{221} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \bar{D}_{22n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \bar{D}_{2n-1\ 1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \bar{D}_{2n-1\ n} \\ \beta_b \bar{D}_{1n1} & \cdots & \cdots & \beta_b \bar{D}_{1ni} & \cdots & \beta_b \bar{D}_{1n-1\ n} & \alpha_b + \beta_b \bar{D}_{1n\ n} \end{bmatrix},$$

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \vdots \\ \hat{c}_i \\ \vdots \\ \hat{c}_{n-1} \\ \hat{c}_n \end{bmatrix} \quad y \quad \hat{R} = \begin{bmatrix} \gamma_t \\ r \hat{h} s_2 \\ \vdots \\ r \hat{h} s_k \\ \vdots \\ r \hat{h} s_{n-1} \\ \gamma_b \end{bmatrix}.$$

Para obtener la solución a este sistema de ecuaciones, se descompone en tres subsistemas: la ecuación de la primer fila ( $k = 1$ ), el subsistema de ecuaciones  $k = 2, \dots, n - 1$  y la ecuación de la última fila ( $k = n = N_z$ ). Tras un trabajo algebraico, se obtiene una ecuación para el valor del campo  $\hat{c}$  en el borde inferior del dominio ( $\hat{c}_n$ ) y otra para el valor en el borde superior del dominio ( $\hat{c}_1$ ). Este desarrollo se puede ver de manera detallada en [Salinas \(2014\)](#).

$$\hat{c}_n = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{nn} - a_{n1}a_{1n}} \hat{R}_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}a_{nn} - a_{n1}a_{1n}} \hat{R}_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \hat{c}_i \frac{a_{n1}a_{1i} - a_{11}a_{ni}}{a_{11}a_{nn} - a_{n1}a_{1n}}, \quad (54)$$

$$\hat{c}_1 = \frac{a_{nn}}{a_{11}a_{nn} - a_{n1}a_{1n}} \hat{R}_1 - \frac{a_{1n}}{a_{11}a_{nn} - a_{n1}a_{1n}} \hat{R}_n + \sum_{i=2}^{n-1} \hat{c}_i \frac{a_{ni}a_{1n} - a_{1i}a_{nn}}{a_{11}a_{nn} - a_{n1}a_{1n}}. \quad (55)$$

Empleando (54) y (55), el sistema (53) se puede escribir en forma reducida como:

$$\bar{B} \hat{c}^* + \alpha \bar{I} \hat{c}^* = \hat{N}. \quad (56)$$

donde la matriz  $\bar{B}$  (de dimensiones  $n - 2 \times n - 2$ ) y los vectores  $\hat{c}^*$  y  $\hat{N}$  (de dimensiones  $n - 2$ ) son:

$$\begin{aligned} \bar{B}_{k-1\ i-1} &= a_{ki} + a_{k1} \frac{a_{1i}a_{nn} - a_{ni}a_{1n}}{a_{n1}a_{1n} - a_{11}a_{nn}} + a_{kn} \frac{a_{11}a_{ni} - a_{n1}a_{1i}}{a_{n1}a_{1n} - a_{11}a_{nn}}, \\ \hat{c}_{k-1}^* &= \hat{c}_k, \\ \hat{N}_{k-1} &= \hat{R}_k + \hat{R}_1 \frac{a_{k1}a_{nn} - a_{kn}a_{n1}}{a_{n1}a_{1n} - a_{11}a_{nn}} + \hat{R}_n \frac{a_{kn}a_{11} - a_{k1}a_{1n}}{a_{n1}a_{1n} - a_{11}a_{nn}}, \end{aligned} \quad (57)$$

donde  $i = 2, n - 1$  y  $k = 2, n - 1$  (el sub-índice  $n = N_z$ ).

Utilizando el sistema de ecuaciones (56) junto con las ecuaciones (54) y (55) se obtienen los valores de  $\hat{c}$  para nuestro problema con condiciones de contorno mixtas. El procedimiento de resolución se explicará en la sección 3.5.

Las condiciones de contorno periódicas en las direcciones horizontales  $x$  e  $y$  son automáticamente satisfechas con el uso de expansiones de Fourier. El tratamiento de las condiciones de contorno para el campo de velocidades intermedio se muestra de manera detallada en Salinas (2014).

### 3.5. Procedimiento de resolución

Para resolver los campos del flujo en el paso de tiempo intermedio, se debe resolver el sistema de ecuaciones (56) junto con las ecuaciones (54) y (55) para las tres componentes de velocidad y el campo escalar, para cada combinación de números de onda horizontal. Además, se debe resolver la ecuación de Poisson para la presión. Es necesario una técnica para resolver estas ecuaciones de manera rápida. En su forma actual, las ecuaciones requieren una inversión matricial para cada combinación de números de onda. Diagonalizando la matriz  $\overline{\overline{B}}$ , es posible eliminar la dependencia de la inversión con respecto a los números de onda y, por ende, será posible invertir la matriz una sola vez en todo el cálculo. Definimos la matriz modal  $\overline{\overline{T}}$  de la matriz  $\overline{\overline{B}}$  (ver ecuación (56)),  $\overline{\overline{T}}^{-1}$  la inversa de la matriz modal,  $\overline{\overline{\Lambda}}$  el vector cuyos elementos son los autovalores de  $\overline{\overline{B}}$  y  $\overline{\overline{\Lambda}}$  la matriz diagonal de dimensiones  $N_z - 2 \times N_z - 2$  cuyos elementos diagonales son los autovalores de  $\overline{\overline{B}}$ . Como  $\overline{\overline{B}}$  es diagonalizable, puede ser descompuesta como:

$$\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{T}} \overline{\overline{\Lambda}} \overline{\overline{T}}^{-1}. \quad (58)$$

De esta forma, la ecuación (56) puede ser reescrita como:

$$\overline{\overline{T}} \overline{\overline{\Lambda}} \overline{\overline{T}}^{-1} \hat{c}^{*(m*)} + \alpha \overline{\overline{I}} \hat{c}^{*(m*)} = \hat{N}^{(m*)}. \quad (59)$$

El coeficiente  $\alpha$  puede ser combinado con  $\overline{\overline{\Lambda}}$ . Sea  $\overline{\overline{I}}$  una matriz identidad de dimensiones  $N_z - 2 \times N_z - 2$ , la ecuación (59) puede invertirse para dar una expresión para  $\hat{c}^{*(m*)}$ :

$$\hat{c}^{*(m*)} = \overline{\overline{T}} \left( \overline{\overline{\Lambda}} - \alpha \overline{\overline{I}} \right)^{-1} \overline{\overline{T}}^{-1} \hat{N}^{(m*)}, \quad (60)$$

donde:

$$\left( \overline{\overline{\Lambda}} - \alpha \overline{\overline{I}} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - \alpha} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2 - \alpha} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda_{n-2} - \alpha} \end{bmatrix},$$

donde el sub-índice  $n = N_z$ .

Entonces, los cuatro sistemas matriciales a resolver son

$$\hat{u}^{*(m*)} = \overline{\overline{T}} \left( \overline{\overline{\Lambda}} - \alpha_{\hat{u}} \overline{\overline{I}} \right)^{-1} \overline{\overline{T}}^{-1} \hat{N}_x^{(m*)}. \quad (61)$$

$$\hat{v}^{*(m*)} = \overline{\overline{T}} \left( \overline{\overline{\Lambda}} - \alpha_{\hat{v}} \overline{\overline{I}} \right)^{-1} \overline{\overline{T}}^{-1} \hat{N}_y^{(m*)}. \quad (62)$$

$$\hat{w}^{*(m*)} = \overline{\overline{T}} \left( \overline{\overline{\Lambda}} - \alpha_{\hat{w}} \overline{\overline{I}} \right)^{-1} \overline{\overline{T}}^{-1} \hat{N}_z^{(m*)}. \quad (63)$$

$$\hat{\rho}^{*(m^*)} = \bar{\bar{T}} \left( \bar{\Lambda} - \alpha_{\rho} \bar{\bar{I}} \right)^{-1} \bar{\bar{T}}^{-1} \hat{N}_{\rho}^{(m^*)}. \quad (64)$$

Una vez calculado el vector  $\hat{c}^{*(m^*)}$ , se pueden calcular  $\hat{c}_1^{(m^*)}$  y  $\hat{c}_{N_z}^{(m^*)}$  con las ecuaciones (55) y (54), respectivamente.

### 3.6. Implementación realizada al código

Inicialmente se realizaron varias simulaciones con diferentes características (geometría, números adimensionales, resolución, etc.), teniendo en cuenta un sólo escalar global. A modo de ejemplo, se presenta una de las simulaciones iniciales en la figura 4, la cual posee las siguientes características:

- Geometría: geometría plana (simulación 3D).
- $L_x \times L_y \times 2H = 1,5 \times 26 \times 2$ .
- Número de Reynolds:  $Re = 3450$ .
- Número de Coriolis:  $C = 0$ .

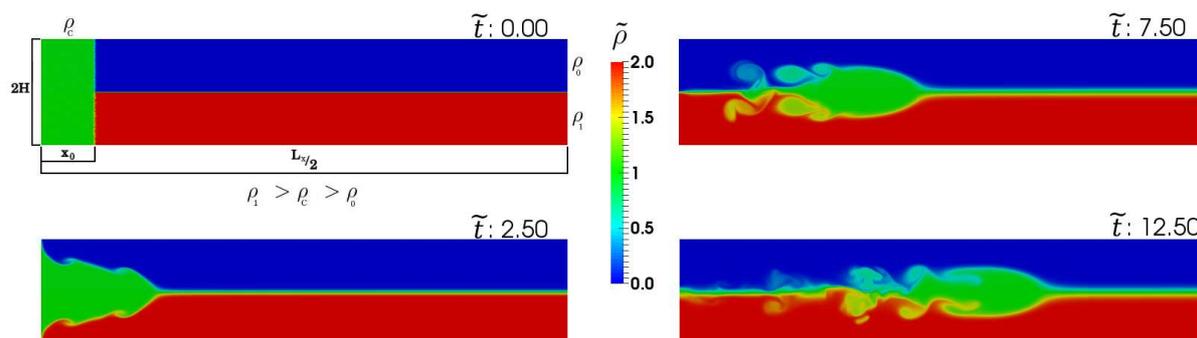


Figura 4: Simulación realizada con un sólo escalar para una geometría plana, donde se presenta un corte de la mitad del dominio. Inicialmente en la región de longitud  $x_0$  esta lleno de un fluido de densidad  $\rho_c$ , el cual esta separado de dos fluidos ambiente, uno de densidad  $\rho_0$  ( $\rho_0 < \rho_c$ ) y el otro de densidad  $\rho_1$  ( $\rho_1 > \rho_c$ ). Al comienzo de la simulación el fluido de densidad  $\rho_c$  se libera, produciendo un flujo que se propaga principalmente a lo largo de la dirección  $x$ .

Se puede observar en la figura 4 que el espesor de la interfaz horizontal entre las densidades máxima y mínima ( $\rho_1$  y  $\rho_0$  respectivamente) aumenta de tamaño con el paso del tiempo. Si bien no tiene influencia en el desarrollo del flujo, este aumento progresivo de la interfaz provoca diversos problemas en el posprocesamiento de los resultados como ser:

- Dificultad en el análisis de las propiedades de la intrusión, como la posición y la velocidad de la propagación del frente.
- Dificultad para realizar visualizaciones para el estudio de la dinámica de la intrusión.

Estas dificultades se observaron en todas las simulaciones realizadas con un sólo escalar. Por estos principales motivos se realizó una modificación al código, que consta de la incorporación

de un segundo escalar a nuestras ecuaciones de gobierno. El objetivo de esto es tratar de aislar el fluido de la corriente (ver figura 4, fluido de densidad  $\rho_c$ ) para poder estudiar sus propiedades sin tener que convivir con la interfaz debido a los fluidos ambiente (ver figura 4, fluidos de densidad  $\rho_1$  y  $\rho_0$ ).

Vamos a explicar la implementación con el proceso de resolución descrito en la sección 3.2 para un paso de tiempo  $\Delta t$ . Primeramente se calcula el campo de velocidades auxiliar con la ecuación (22) utilizando los datos del paso anterior (ver ecuaciones (18) y (19)), donde para el cálculo de este campo vectorial se usa el campo escalar global, es decir, se utiliza  $C_{global} = C = C_1 + C_2$  que es la suma de los dos escalares (donde  $C_1$  es el primer escalar, que tiene en cuenta el fluido de la corriente, y  $C_2$  es el segundo escalar, que tiene en cuenta los fluidos ambiente). Luego, se utiliza la ecuación (23) para el cálculo del campo escalar, pero esta ecuación se resuelve dos veces, una por cada escalar. Después, el cálculo de la ecuación de Poisson (ecuación (24)) y la corrección del campo de velocidades (ecuación (25)) se realizan de la misma manera. Luego de todo esto, se actualizan los campos (ver ecuaciones (26) y (27)) y el proceso comienza nuevamente.

En la figura 5 se muestra una simulación realizada con los mismos parámetros presentados para la simulación de la figura 4, pero esta vez resuelta con la nueva implementación. Con esto se puede analizar el fluido de la corriente y los fluidos ambiente por separado, con lo cual la fuerza impulsora de nuestro problema será la suma de los dos, que es el resultado obtenido que se visualiza en la figura 5. Como se muestra en la figura 5, gracias a realizar la simulación

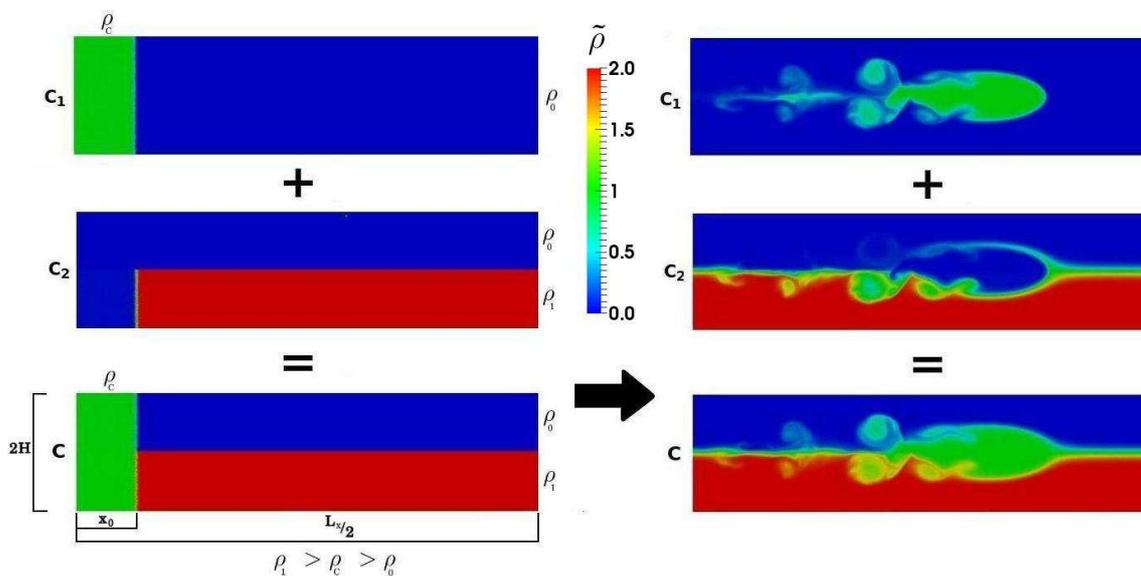


Figura 5: Simulación realizada con dos escalares para una geometría plana con las mismas características que la simulación presentada en la figura 4.

con dos escalares se puede separar el problema en dos, observando el frente de la intrusión de manera aislada.

Comparando las dos simulaciones presentadas (con un sólo escalar y con dos escalares), se puede determinar ciertas ventajas, como ser:

- El análisis de las propiedades del frente de la intrusión se puede realizar de manera más detallada con la utilización del primer escalar (ver figura 5,  $C_1$ ).

- El estudio de la dinámica de la intrusión por medio de visualizaciones se simplifica, ya que con este método se puede estudiar el fluido de la corriente de manera aislada.
- Se podría analizar otras características de la intrusión, como ser la incorporación del fluido ambiente al frente de la intrusión ( "entrainment", por sus siglas en inglés).

Pero también tenemos desventajas en la utilización de este método, como ser:

- Aumenta el tiempo computacional. El aumento es aproximadamente un 20 %, donde se resuelve dos ecuaciones de transporte en vez de una.
- Aumenta el tamaño de los archivos de salida. El aumento es aproximadamente un 20 %, donde se guarda los datos de los dos escalares en vez de uno sólo.

## 4. RESULTADOS

### 4.1. Validación del código

Realizado una vez la implementación al código pseudo-espectral, se prosigue a corroborar que los cálculos realizados con este código nos devuelven resultados correctos, por lo cual se realizó una validación/comparación para la geometría utilizada en nuestras simulaciones.

#### 4.1.1. Validación - Geometría cilíndrica

Se realizó una validación/comparación del código descrito anteriormente para una geometría cilíndrica. Las características de la simulación son:

- $L_x \times L_y \times 2H = 10 \times 10 \times 2$ .
- Número de Reynolds:  $Re = 4000$ .
- Número de Coriolis:  $C = 0,25$ .

Para este caso, se comparó la simulación realizada con los datos presentados en la tesis de [Salinas \(2014\)](#). En este trabajo se realizaron simulaciones de corriente de gravedad, con lo cual se comparó la mitad del dominio de nuestra simulación con la simulación de la corriente de gravedad de la tesis (ver figura 7).

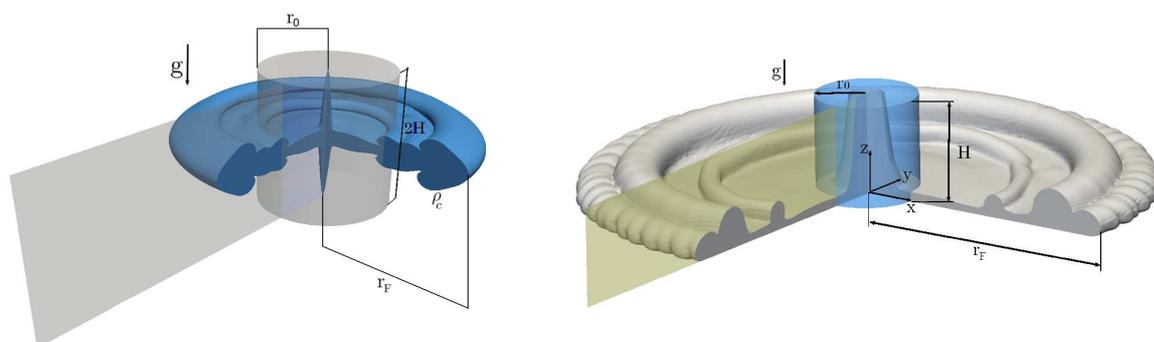


Figura 6: (*izq.*)Intrusión cilíndrica, donde el dominio tiene dimensiones  $L_x \times L_y \times 2H$ ; (*der.*)Corriente de gravedad cilíndrica, donde el dominio tiene dimensiones  $L_x \times L_y \times H$ , imagen obtenida de la tesis de [Salinas \(2014\)](#).

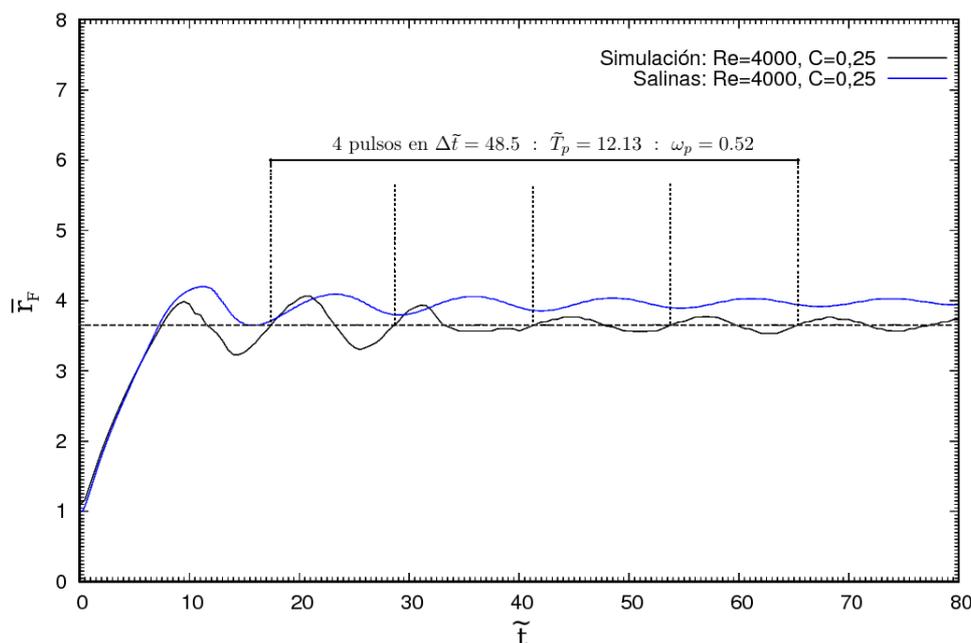


Figura 7: Gráfico de la posición del frente en función del tiempo para la simulación realizada para una geometría cilíndrica.

En la figura 7 se muestra la posición del frente en función del tiempo obtenida de la simulación realizada con el código pseudo-espectral.

A continuación se presentan los valores de posición máxima y frecuencia de oscilación para las simulaciones, observando que los valores son comparables entre lo simulado y lo presentado por Salinas (2014).

- Salinas:  $\bar{r}_{max} = 4,2 - \omega_p = 0,5$
- Simulación:  $\bar{r}_{max} = 3,97 - \omega_p = 0,52$

Analizando la figura 7, se observan diferencias en las curvas de posición del frente, estas discrepancias pueden deberse a que en el caso de la intrusión la interfaz tiene su propia dinámica, mientras que en el caso de Salinas (2014) esta superficie es rígida. Además, el ambiente estratificado nos impulsa la formación de ondas internas en la interfaz, las cuales se generan cuando el frente está en retroceso (Holdsworth et al., 2012; Stegner et al., 2004; Stegner, 2007). La diferencia en la posición máxima puede deberse a la acción de estas ondas internas, las cuales viajan hasta el frente de la intrusión afectando la avance del mismo, donde en ocasiones pueden hasta detener la propagación (Stegner et al., 2004; Stegner, 2007). Esto puede verse en la figura 8, que presenta la simulación numérica realizada con dos escalares ( $C_1$  tiene en cuenta el fluido de la corriente y  $C_2$  tiene en cuenta los fluidos ambiente) para diferentes tiempos, indicando con flechas negras la existencia de ondas internas en la interfaz de los fluidos ambiente.

#### 4.2. Efectos del parámetro de Coriolis en las intrusiones cilíndricas

En esta sección se estudia el efecto del parámetro de Coriolis en el desarrollo de las intrusiones cilíndricas. En la tabla 1 se muestran las simulaciones realizadas en esta geometría.

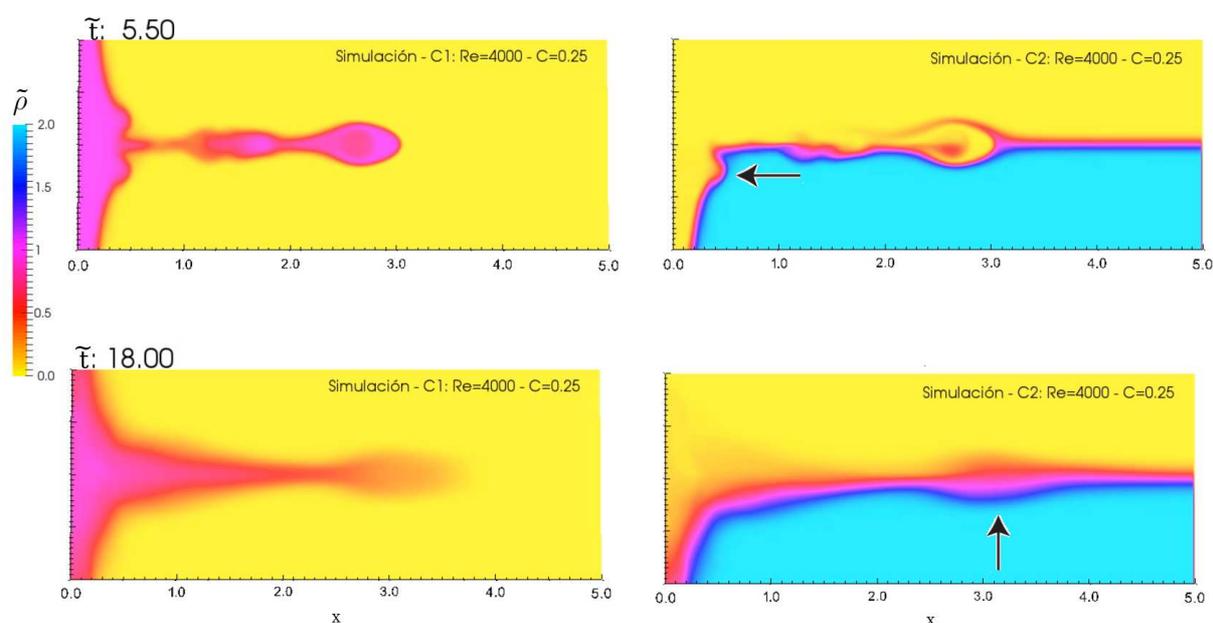


Figura 8: Simulación numérica realizada para diferentes tiempos: (izq.)Escalar  $C_1$  que simula el fluido corriente; (der.)Escalar  $C_2$  que simula los fluidos ambientales.

Caso	$C$	$Re$	$Sc$	$L_x \times L_y \times 2H$	$N_x \times N_y \times N_z$	$C.C.$	$\bar{r}_p$	$\omega_p$
1	1.5	4000	1	$10 \times 10 \times 2$	$650 \times 650 \times 300$	$L.D.$	1,29	—
2	0.8	4000	1	$10 \times 10 \times 2$	$650 \times 650 \times 300$	$L.D.$	1,67	1,54
3	1.1	4000	1	$6 \times 6 \times 2$	$480 \times 480 \times 350$	$L.D.$	1,45	2,20

Tabla 1: Simulaciones numéricas realizadas en una geometría cilíndrica. También se muestran los valores del primer pico alcanzado por el frente ( $\bar{r}_p$ ) y la frecuencia de oscilación ( $\omega_p$ ). La columna  $C.C.$  corresponde a las condiciones de contorno en la pared inferior y superior del dominio, donde  $L.D.$  significa la condición de libre deslizamiento.

#### 4.2.1. Análisis de la propagación del frente

Para el cálculo de la distancia de propagación del frente se define una altura equivalente local  $\bar{h}(\tilde{r}, \tilde{t})$ , donde al tratarse de una geometría cilíndrica, definiremos  $\tilde{h}$  en sus coordenadas cilíndricas. Los trabajos [Shin et al. \(2004\)](#) y [Marino et al. \(2005\)](#) definen la altura equivalente como:

$$\tilde{h}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{t}) = \frac{1}{\tilde{H}} \int_0^{\tilde{H}} \tilde{\rho} d\tilde{z}, \quad (65)$$

donde  $\tilde{r}$  es la dirección radial y  $\tilde{\theta}$  es la dirección azimutal. Por lo tanto, en las regiones donde toda la altura del canal es ocupada por el fluido más denso, la altura adimensional  $\tilde{h}$  es igual a dos ( $\rho = \rho_1 \rightarrow \tilde{\rho} = 2$ ), mientras que en las regiones donde el fluido menos denso llena toda la altura,  $\tilde{h}$  es cero ( $\rho = \rho_0 \rightarrow \tilde{\rho} = 0$ ).

La altura equivalente local media es:

$$\bar{h}(\tilde{r}, \tilde{t}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{h}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{t}) d\tilde{\theta}. \quad (66)$$

La posición media del frente  $\bar{r}_F$  puede ser definida como la ubicación de la altura equivalente local media  $\bar{h}$  se hace más pequeña que un umbral  $\delta$ . Para el cálculo de la oscilación del frente se utilizará un umbral  $\delta = 0,01$  (para más detalle ver [Cantero et al. \(2007\)](#)).

La figura 9 muestra la posición del frente en función del tiempo para diferentes umbrales de  $\bar{h}$ , para los casos (1) a (3). En todos los casos el frente comienza a acelerarse hasta que la velocidad del frente se vuelve cero y la corriente comienza a moverse hacia el interior.

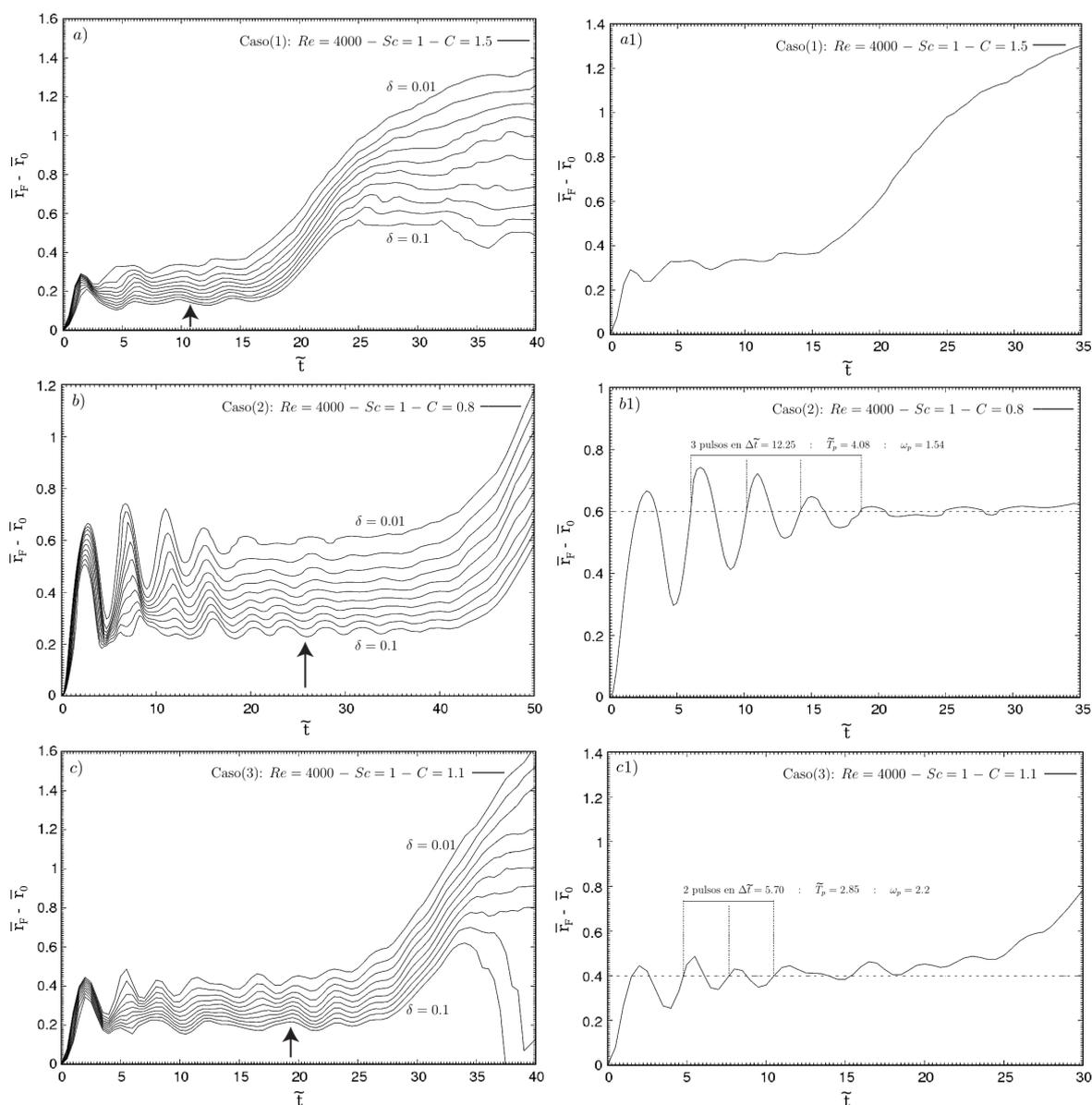


Figura 9: Posición del frente  $r_F - r_0$  en función del tiempo  $t$  para diferentes umbrales de  $\bar{h}$ , para los casos *a*) Caso (1), *b*) Caso (2), *c*) Caso (3) (ver tabla 1). Se han utilizado umbrales de  $\delta = 0,01$  hasta  $\delta = 0,1$ , con intervalos de  $0,01$  entre cada umbral.

En la figura 9 se observan diferencias entre los casos (1) a (3) con diferentes número de Coriolis. El aumento de este parámetro produce una disminución en la propagación de la corriente y una mayor frecuencia de oscilación (ver tabla 1).

En la figura 9, la posición del frente de las intrusiones cilíndrica en rotación tienen un comportamiento oscilatorio hasta que el flujo llega a un pseudo-estado estacionario. El período de

las oscilaciones  $\tilde{T}_p$  se define como el intervalo de tiempo promedio en el que los sucesivos frentes que se propagan en la dirección radial positiva llegan a una determinada distancia radial  $\bar{r}$ . Comparando la frecuencia de los sucesivos frentes  $\omega_p$  para las simulaciones realizadas, obtenemos una dependencia lineal con el parámetro de Coriolis.

$$\omega_p = 1,96 C, \quad (67)$$

obteniendo un resultado similar al reportado por Salinas (2014) que estudia las corrientes de gravedad en la misma geometría pero para bajos números de Coriolis.

Luego de unas pocas oscilaciones del frente, en todos los casos el flujo comienza a comportarse de manera totalmente distinta a los primeros tiempos de simulación (ver figura 9, indicado por las flechas negras) aumentando considerablemente la posición del frente. Visualizaciones 3D del flujo muestran que a partir de un cierto tiempo, indicado por las flechas negras (ver figura 9), el flujo comienza desestabilizarse, es decir, el flujo pierde simetría y el movimiento es completamente distinto a los tiempos previos. Cabe destacar que la herramienta utilizada para poder analizar la propagación del frente es inservible debido a esta inestabilidad, siendo incorrecto promediar en la dirección transversal para el estudio del frente de la intrusión.

A continuación en la sección 4.3 se muestran las simulaciones numéricas para los distintos casos y un análisis de como se manifiesta esta inestabilidad en el flujo.

### 4.3. Inestabilidad de la intrusión

En esta sección presentamos las simulaciones realizadas con el código pseudo-espectral (ver tabla 1). Las figuras 10, 11 y 12 muestran las simulaciones para el primer escalon  $C_1$  para diversos tiempos, observando como se desestabiliza el flujo dando lugar a la formación y movimiento de una determinada cantidad de vórtices, variando en número para cada caso.

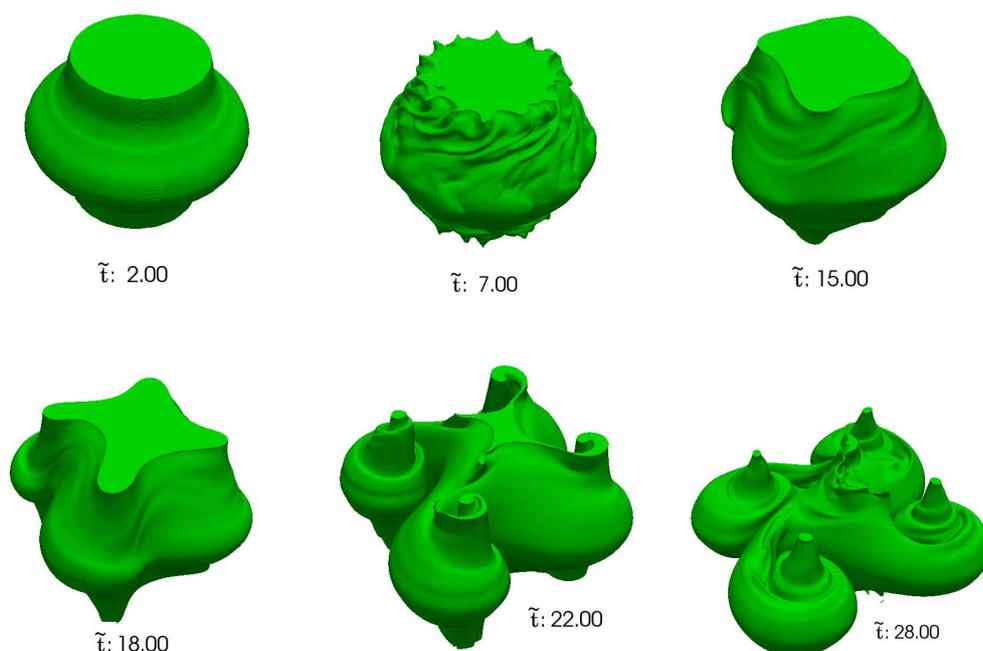


Figura 10: Simulación numérica para el caso (1). Visualización realizada con el primer escalon  $C_1$  que sólo contempla el fluido de la intrusión.

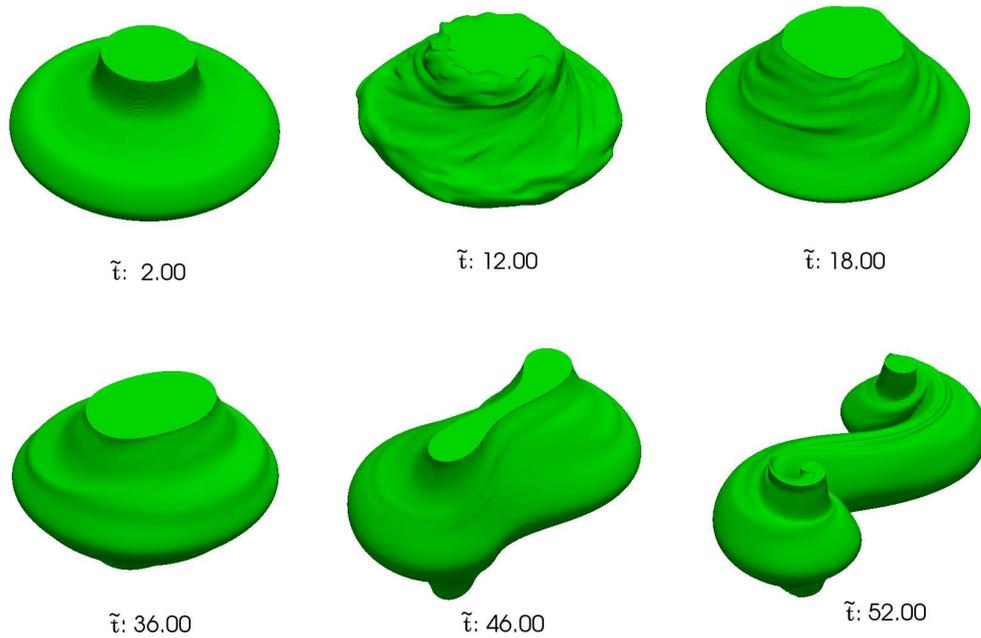


Figura 11: Simulación numérica para el caso (2). Visualización realizada con el primer escalar  $C_1$  que sólo contempla el fluido de la intrusión.

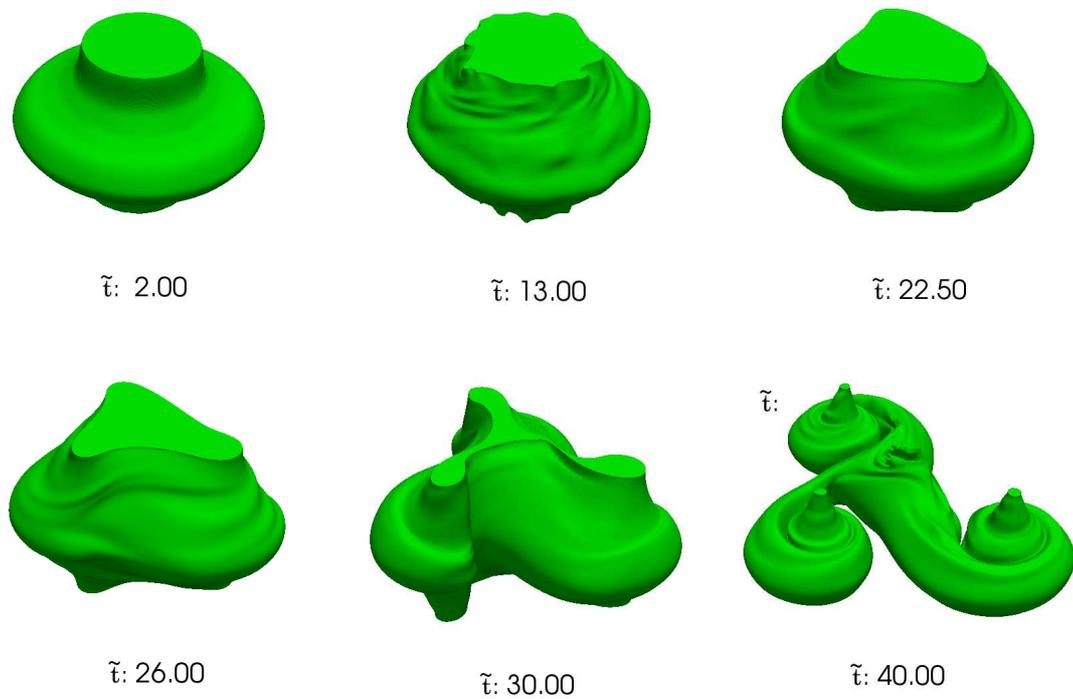


Figura 12: Simulación numérica para el caso (3). Visualización realizada con el primer escalar  $C_1$  que sólo contempla el fluido de la intrusión.

Analizando las figuras 10, 11 y 12, en los primeros tiempos se desarrolla la intrusión sin visualizar ninguna inestabilidad, pero luego de un determinado intervalo de tiempo, el flujo comienza a perder simetría, pudiendo observar lóbulos en el frente de la intrusión que aumentan su amplitud con el transcurso del tiempo. Después para cada caso se observa como el flujo se desestabiliza dando lugar a la formación de diversos vórtices.

Este tipo de inestabilidades en este tipo de flujos también se encontraron en resultados experimentales presentados por [Saunders \(1973\)](#), y luego unos años después por [Griffiths y Linden \(1981\)](#). Ambos realizaron experimentos sobre corrientes de gravedad sometidas a elevadas velocidades de rotación.

En la figura 13 se muestran los experimentos realizados por Saunders para una corriente de gravedad para diversos números de Coriolis ([Saunders, 1973](#)). Para bajas velocidades de rotación, el experimento con un número de Coriolis de  $C = 0,39$  no presenta ninguna inestabilidad, pero para elevadas velocidades de giro, en el flujo se comienza a visualizar la misma desestabilización mostrada en nuestras simulaciones numéricas. En los experimentos se observa la formación de una determinada cantidad de vórtices, variando en número con el parámetro de Coriolis.

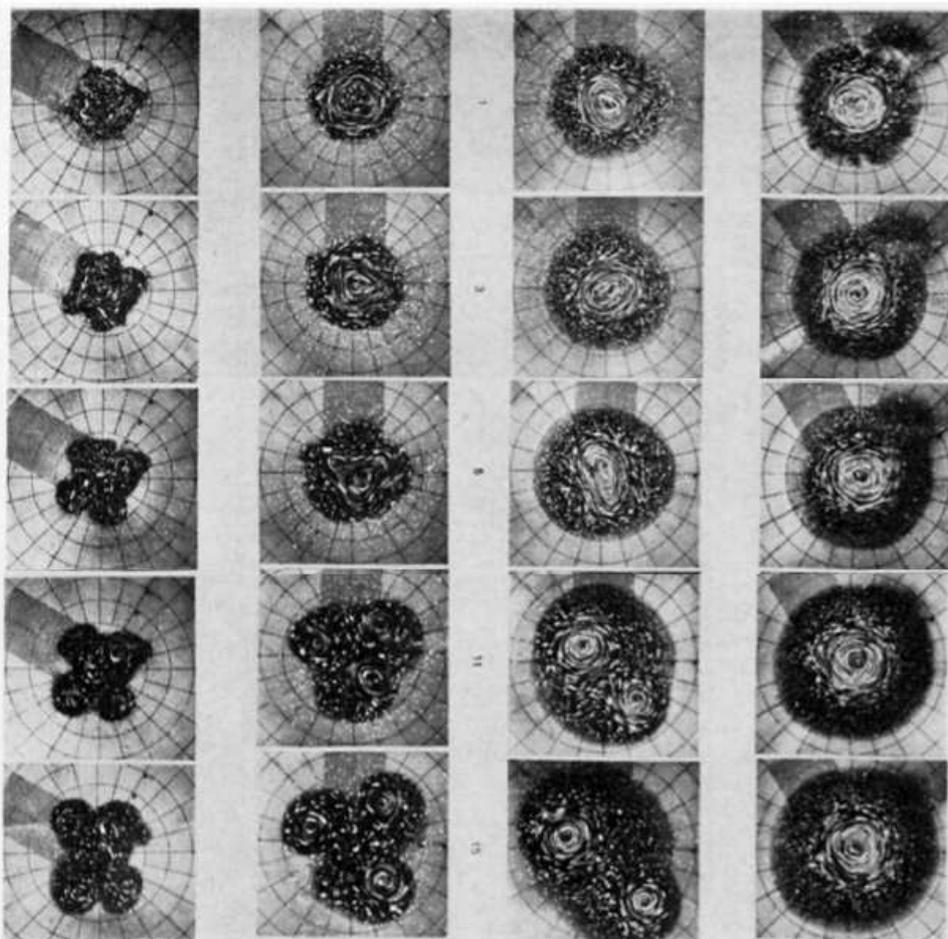


Figura 13: Experimentos realizados por Saunders, para distintos números de Coriolis  $C = 1,2; 0,85; 0,56; 0,39$ , presentados de izquierda a derecha respectivamente para varios tiempos. Imagen obtenida de la publicación de [Saunders \(1973\)](#).

[Griffiths y Linden \(1981\)](#) también realizaron experimentos con corrientes de gravedad estu-

diando como afecta un parámetro de forma para distintas velocidades de rotación. El parámetro de forma se define como  $\delta_0 = \frac{h_0}{H}$ , que es la relación entre la altura que ocupa el fluido de la corriente ( $h_0$ ) y la altura del fluido ambiente ( $H$ ).

La figura 14 muestra dos gráficos presentados en dichas publicaciones (Saunders, 1973; Griffiths y Linden, 1981) que exhiben el número de onda azimutal  $n$  (o número de vórtices) para distintas configuraciones del experimento. Los gráficos muestran la dependencia del número de vórtices con la velocidad de giro, para ello se utilizan dos parámetros, uno es el número adimensional  $\theta_0 = \left(\frac{R_d}{R_c}\right)^2$  que es igual al cociente entre el cuadrado del radio de deformación de Rossby ( $R_d = \frac{\sqrt{g^*H}}{f}$ , donde  $f = 2\Omega_z$  es el parámetro de Coriolis que es igual a dos veces la velocidad de rotación,  $g^*$  es la gravedad reducida y  $H$  es la escala de longitud vertical) y el cuadrado de la escala de longitud horizontal ( $R_c$ ). Este número adimensional también se puede definir como  $\theta_0 = \frac{C^{-2}}{4}$  que es la inversa del cuadrado del número de Coriolis. El otro factor es el parámetro de forma  $\delta_0$ , donde para Saunders (1973) y para nuestras simulaciones es igual a la unidad.

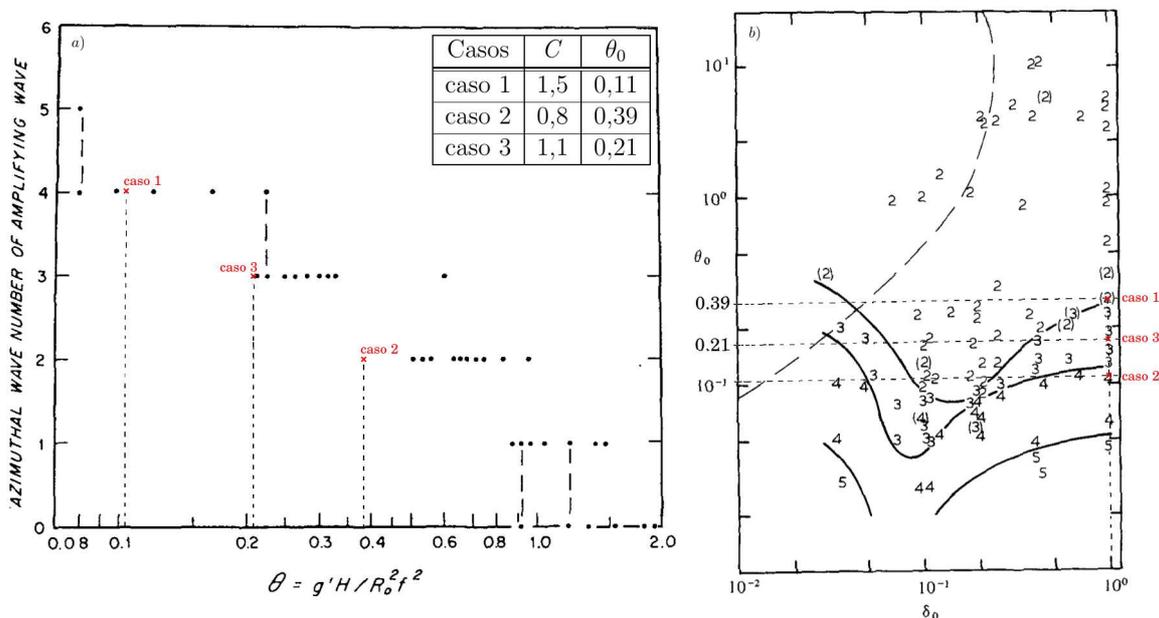


Figura 14: a) Gráfico del número de vórtices en función del parámetro adimensional  $\theta_0$ , obtenido de la publicación de Saunders (1973); b) Gráfico del parámetro adimensional  $\theta_0$  en función del parámetro de forma  $\delta_0$ , indicando los números de vórtices por zonas, obtenido de la publicación de Griffiths y Linden (1981).

En la figura 14 se puede observar una tabla con las equivalencias entre el parámetro adimensional  $\theta_0$  y el número de Coriolis utilizado. En la misma figura para ambos gráficos se muestran señalizados los casos simulados en este capítulo, corroborando los resultados visualizados en las simulaciones numéricas presentados previamente, obteniendo en el caso (1) un número de vórtices  $n = 4$  (ver figura 10), en el caso (2) un  $n = 2$  (ver figura 11) y en el caso (3) un  $n = 3$  (ver figura 12).

Tomando como referencia el caso (3) con un número de vórtices igual a  $n = 3$ , vamos a tratar de explicar y describir la formación de estas inestabilidades. La figura 15 muestra un bosquejo de las etapas de la generación de los vórtices (Griffiths y Linden, 1981). En la figura 15(a) se puede ver el fluido de la corriente en los momentos iniciales moviéndose en sentido horario. Este fluido comienza a ser afectado por el ambiente, el cual gira en sentido antihorario, observando

como en el flujo comienza a formarse lóbulos en el frente de la intrusión. Con una pequeña amplitud y moviéndose en sentido antihorario, tenemos una concentración de vorticidad alrededor de unos punto marcados con cruces (ver figura 15(a)) en la zona donde se denotan la formación de los lóbulos. A medida que transcurre el tiempo estos lóbulos aumentan de amplitud y el fluido ambiente comienza a aumentar su velocidad de giro incrementando la concentración de vorticidad en las cruces. Estos puntos de acumulación de vorticidad pueden deberse al incremento de energía cinética presente en el frente de la intrusión (Griffiths y Linden, 1981). En la tesis de Santillán (2017) se analizó el comportamiento de los perfiles de velocidad, obteniendo que el aumento de la velocidad de giro del ambiente y la interacción entre los fluidos (ambiente y corriente) cambian el sentido de giro del frente.

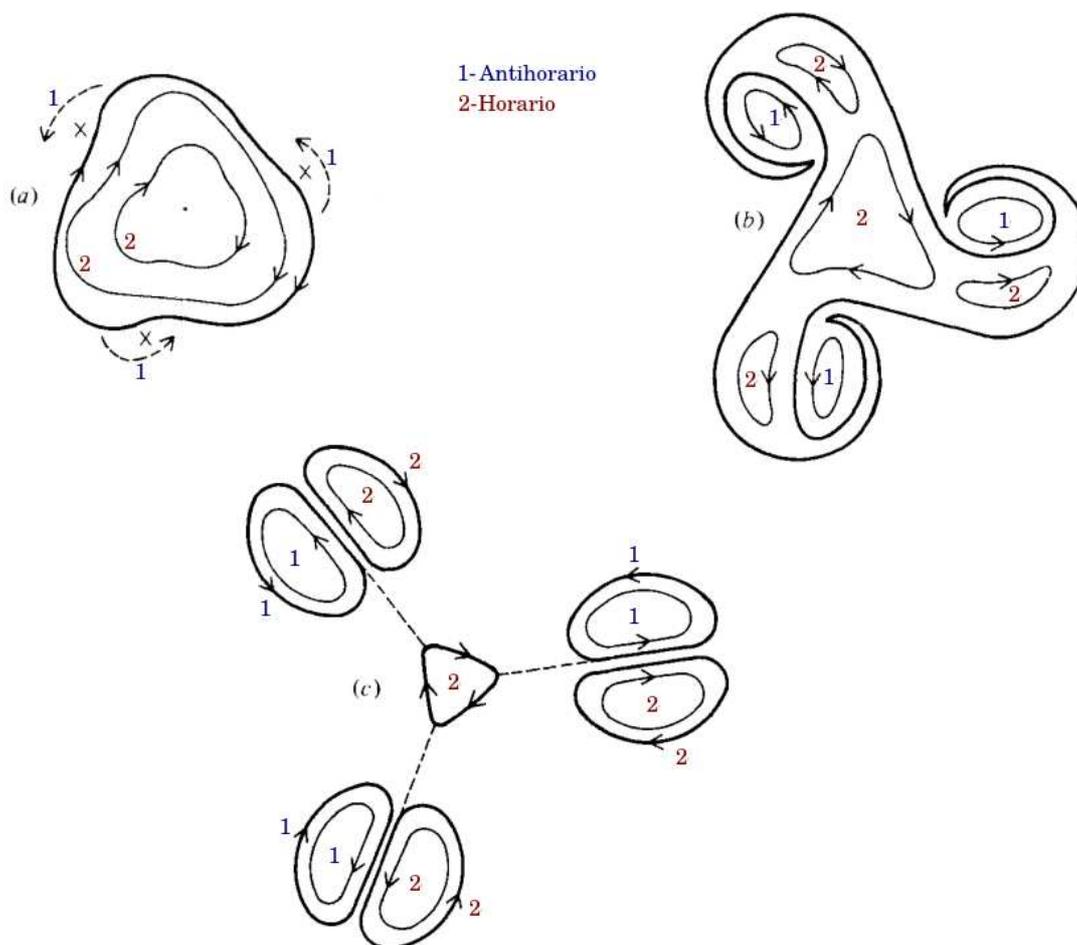


Figura 15: Diagrama esquemático del movimiento durante la formación de vórtices. En (a) las cruces marcan los puntos de acumulación de vorticidad, donde el movimiento antihorario se desarrolla. Imagen obtenida de la publicación de Griffiths y Linden (1981).

El crecimiento de los lóbulos se extiende en toda la altura del dominio, dando lugar a la incorporación del fluido ambiente al frente de la intrusión (o "entrainment", por sus siglas en inglés), esto se muestra en la figura 15(b). El entrainment produce anillos con movimiento antihorario. El incremento de la amplitud de los lóbulos favorecen el mezclado pudiendo cerrar la circulación y generar la inestabilidad. Estos pares de vórtices (horario y antihorario, ver figura 15(c)) se forman debido al mezclado entre el fluido de la corriente y el ambiente que va aumentando su velocidad con el tiempo, donde la inestabilidad se va alimentando del vórtice

permanente central, hasta que el movimiento de estos causa el rompimiento final del vórtice original. El análisis de los perfiles de velocidad se puede ver de manera detallada en Santillán (2017).

#### 4.3.1. Estructuras tridimensionales del flujo

Las figuras 16, 17 y 18 muestran una visualización compuesta de las simulaciones numéricas (parte superior) junto con la fuerza de arremolinado  $\tilde{\lambda}_{ci}$  (Chakraborty et al., 2005) (parte inferior) a diferentes tiempos para los distintos casos. El fluido de la corriente se visualiza con el primer escalar  $C_1$  y la fuerza de arremolinado se visualiza por una iso-superficie de  $\tilde{\lambda}_{ci}$  distinta para cada caso.

En la figura 16 se observa como es la formación de los vórtices según lo descrito en la sección 4.3 (ver figura 15). Para  $\tilde{t} = 11$  se visualiza el vórtice central, luego para  $\tilde{t} = 22$  se observa como se van formando los nuevos vórtices debido al mezclado entre los distintos fluido. Por último para  $\tilde{t} = 28$  se ve como estos vórtices están completamente formados, moviéndose libremente, alimentándose del vórtices central, el cual se va consumiendo con el transcurso del tiempo.

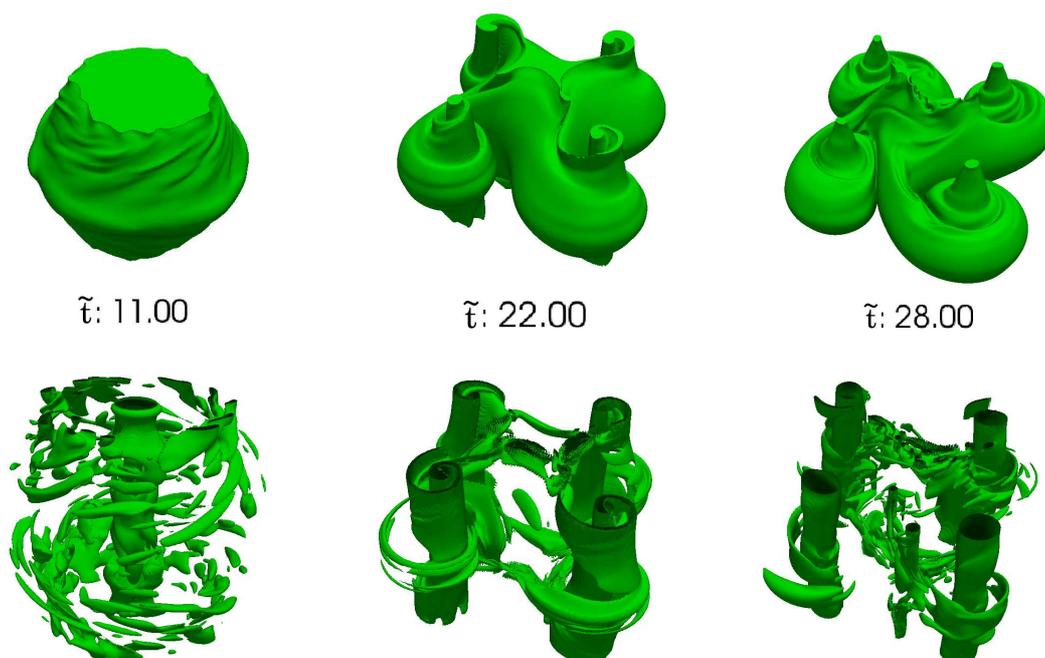


Figura 16: Visualización compuesta para el caso(1): (*parte superior*) Simulaciones numéricas para varios tiempos; (*parte inferior*) Fuerza de arremolinado visualizada por una iso-superficie de  $\tilde{\lambda}_{ci} = 1$ .

Análogamente en la figura 17 se observa la formación de estos vórtices y su movimiento para distintos tiempos.

En la figura 18 para  $\tilde{t} = 15$  también se muestra el vórtice central y para  $\tilde{t} = 31$  la formación de los nuevos vórtices. Para  $\tilde{t} = 45$  estos están completamente desarrollados, pudiendo observar como el vórtice central original se va consumiendo con el tiempo.

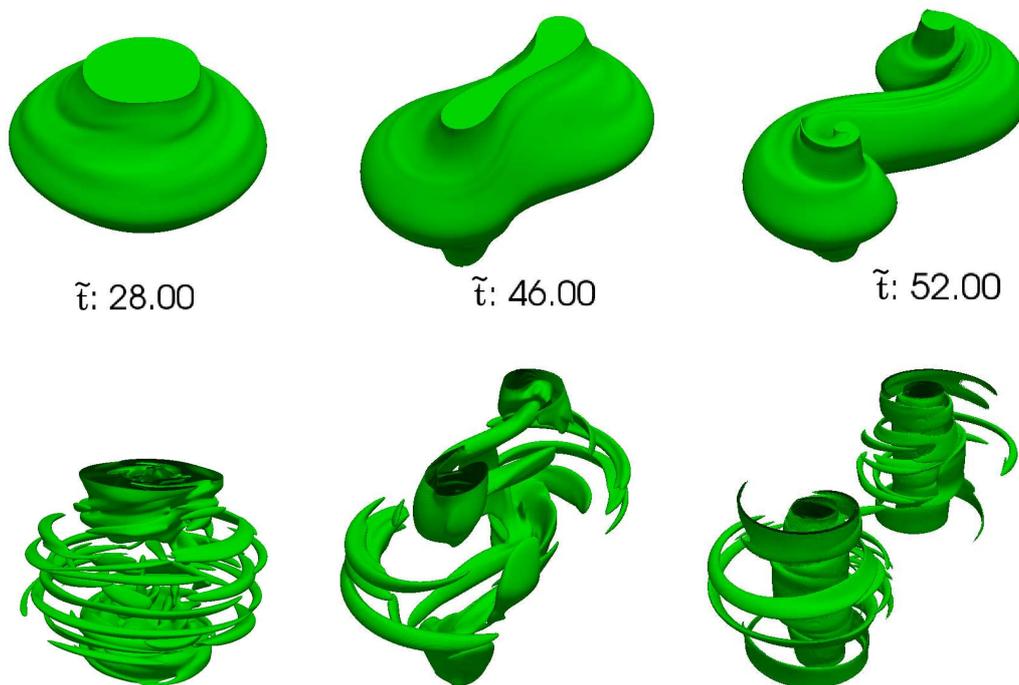


Figura 17: Visualización compuesta para el caso(2): (*parte superior*) Simulaciones numéricas para varios tiempos; (*parte inferior*) Fuerza de arremolinado visualizada por una iso-superficie de  $\tilde{\lambda}_{ci} = 0,5$ .

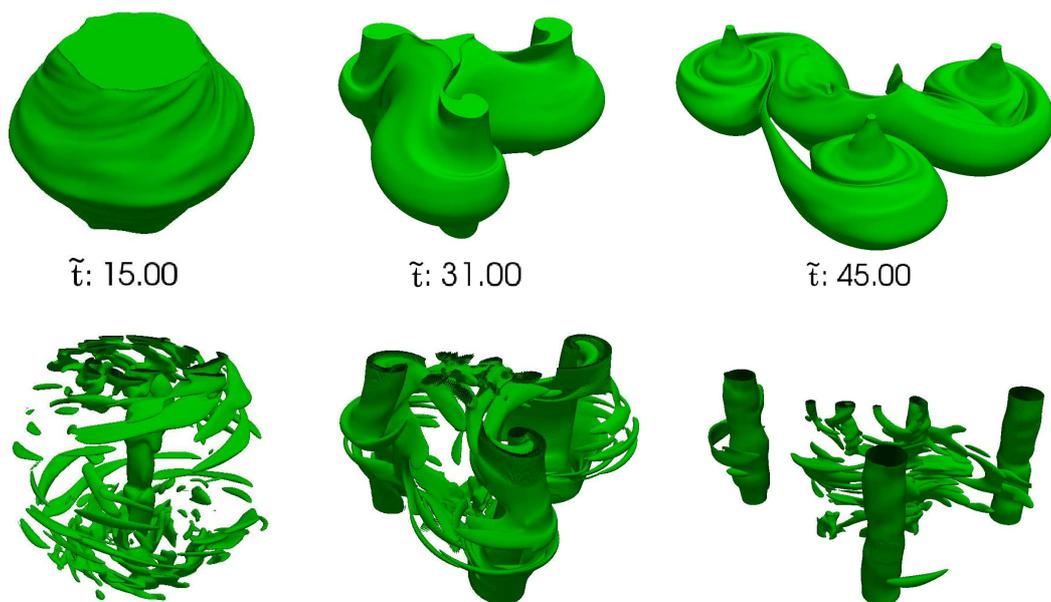


Figura 18: Visualización compuesta para el caso(3): (*parte superior*) Simulaciones numéricas para varios tiempos; (*parte inferior*) Fuerza de arremolinado visualizada por una iso-superficie de  $\tilde{\lambda}_{ci} = 0,8$ .

## 5. CONCLUSIONES

Se realizó una implementación al código de cálculo pseudo-espectral, pudiendo de esta manera, analizar correctamente la dinámica de nuestro problema mediante herramientas de procesamiento en  $2D$  y  $3D$ . Las ventajas de esta modificación son muy satisfactorias, siendo un factor clave poder aislar los dos fluidos (corriente y ambiente). Las desventajas son aceptables y no nos generan inconvenientes en tiempo de cálculo y espacio de almacenamiento.

Se realizaron cálculos preliminares utilizando esta implementación, pudiendo validar/comparar nuestras simulaciones con resultados publicados para la configuración geométrica utilizada en nuestras simulaciones. Para la intrusión cilíndrica se validó/comparó con los datos de posición máxima y frecuencia de oscilación presentados en la tesis de [Salinas \(2014\)](#) para una corriente de gravedad cilíndrica.

En este trabajo se analizó el comportamiento de las intrusiones sometidas a elevados efectos de rotación para una geometría cilíndrica mediante simulación directa de turbulencia (*DNS*). Se analizó para el seguimiento de la posición media del frente  $\bar{r}_F$ . Con el aumento del parámetro de Coriolis se observó un desarrollo más restringido en la dirección del flujo, disminuyendo la propagación del frente a medida que este parámetro aumenta (ver figura 9). En la etapa de oscilación se encontró una relación entre el parámetro de Coriolis y la frecuencia de las oscilaciones para la primera etapa de la simulación:

$$\omega_p = 1,96 C, \quad (68)$$

obteniendo resultados similares a los datos reportados por [Salinas \(2014\)](#) para corrientes de gravedad cilíndricas en rotación.

En las intrusiones cilíndricas, se observa un comportamiento oscilante para los tiempos iniciales, y luego para todos los casos, el flujo se desestabiliza, perdiendo simetría. Debido al incremento de velocidad en el ambiente, que interactúa afectando al fluido de la corriente (para más detalle ver [Santillán \(2017\)](#)), se produce un mezclado entre los fluidos, dando lugar a la formación de los vórtices. El número de vórtices depende de la velocidad de rotación, donde para el estudio de los mismos se utiliza un parámetro adimensional  $\theta_0 = \frac{C^{-2}}{4}$  que es igual a la inversa del cuadrado del número de Coriolis, formándose una específica cantidad de vórtices dependiendo del parámetro adimensional  $\theta_0$ . Las simulaciones numéricas para las intrusiones cilíndricas se compararon con resultados experimentales presentados por [Saunders \(1973\)](#), y por [Griffiths y Linden \(1981\)](#), corroborando satisfactoriamente los resultados obtenidos para todos los casos.

Por último, se muestra para todos los casos simulados la fuerza de arremolinado  $\tilde{\lambda}_{ci}$  ([Chakraborty et al., 2005](#)) observando claramente la formación y el movimiento de estos vórtices (ver figuras 16, 17 y 18). Visualizando, según lo explicado por [Griffiths y Linden \(1981\)](#) (ver figura 15), para los primeros tiempos el vórtice central y el aumento de amplitud de los lóbulos en el frente de la intrusión, luego se puede ver la formación y el movimiento de los nuevos vórtices que se generan debido al mezclado de los fluidos (ambiente y corriente), y para tiempos finales se observa el rompimiento del vórtice original central y la completa formación de los nuevos.

## REFERENCIAS

Cantero M.I., Lee J., Balachandar S., y Garcia M.H. On the front velocity of gravity currents. *Journal of Fluid Mechanics*, 586:1–39, 2007.

- Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Thomas Jr A., et al. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- Canuto C., Quarteroni A., Hussaini M.Y., y Zang T.A. *Fundamentals of Fluid Dynamics*. Springer, 2007.
- Chakraborty P., Balachandar S., y Adrian R.J. On the relationships between local vortex identification schemes. *Journal of fluid mechanics*, 535:189–214, 2005.
- Deville M.O., Fischer P.F., y Mund E.H. *High-order methods for incompressible fluid flow*, volumen 9. Cambridge university press, 2002.
- Griffiths R. y Linden P. The stability of vortices in a rotating, stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 105:283–316, 1981.
- Holdsworth A.M., Barrett K.J., y Sutherland B.R. Axisymmetric intrusions in two-layer and uniformly stratified environments with and without rotation. *Physics of Fluids*, 24(3):036603, 2012.
- L. Brekhovskikh K. Turekian K.E. y Tseng. C. M. *Turbidity currents*, volumen 4. Academic press, 1992.
- Marino B., Thomas L., y Linden P. The front condition for gravity currents. *Journal of Fluid Mechanics*, 536:49–78, 2005.
- Salinas JS y Cantero M.y.D.E. *Modelado y simulación de corriente de gravedad con efectos de rotación*. Tesis de Maestría - Instituto Balseiro, 2014.
- Santillán PF y Cantero M. *Modelado matemático y simulación de alta resolución de intrusiones en medios estratificados*. Tesis de Maestría - Instituto Balseiro, 2017.
- Saunders P.M. The instability of a baroclinic vortex. *Journal of Physical Oceanography*, 3(1):61–65, 1973.
- Shin J., Dalziel S., y Linden P. Gravity currents produced by lock exchange. *Journal of Fluid Mechanics*, 521:1–34, 2004.
- Stegner A. Experimental reality of geostrophic adjustment. *Edited Series on Advances in Nonlinear Science and Complexity*, 2:323–379, 2007.
- Stegner A., Bouruet-Aubertot P., y Pichon T. Nonlinear adjustment of density fronts. part 1. the rossby scenario and the experimental reality. *Journal of Fluid Mechanics*, 502:335–360, 2004.