

ERROR DE DISCRETIZACIÓN EN EL ANÁLISIS DE SENSIBILIDADES DE FORMA POR MEDIO DE LA VERSIÓN P DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Félix. O. Payares^a, Francisco J. Fuenmayor^b

^a Centro de Métodos Numéricos de Ingeniería, Departamento de Mecánica, Universidad de Oriente, Av. Alternativa Barcelona-Pto. La Cruz, Pto. La Cruz, Anzoátegui, Venezuela, fpayares@gmail.com

^b Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales (ETSII)
Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, España

Palabras Clave: Sensibilidades, error de discretización, elementos finitos, versión p.

Resumen. Por lo general, en el cálculo de sensibilidades se emplean procedimientos de análisis numérico, en especial el método de los elementos finitos (MEF). Este método, por basarse en técnicas de aproximación, contiene errores en sus resultados, los cuales influyen directamente en el cálculo de sensibilidades. Si se toman las precauciones en cuanto al modelado de la geometría, la única causa de la imprecisión del método se deberá entonces al error de discretización.

El trabajo desarrollado trata sobre la influencia del *error de discretización en el cálculo de sensibilidades de forma*. Se inicia aprovechando las ventajas que ofrece la versión *p* del MEF, como lo son la minimización en los errores en el modelado geométrico, y la poca distorsión en el refinamiento de la malla. En el desarrollo del trabajo se plantean los siguientes aspectos: a) formulación para el cálculo de sensibilidades de forma mediante el uso de la versión *p* del método de los elementos finitos, b) aplicación del método discreto analítico para el estudio de la influencia del error de discretización en el cálculo de sensibilidades, y c) desarrollo de un estimador del error de discretización en sensibilidades, basado en la extrapolación de Richardson.

Como resultado se estableció un procedimiento para el análisis de sensibilidades adaptado a la versión *p* del método de elementos finitos. La validez de este procedimiento se obtuvo a partir de su aplicación en problemas bidimensionales de análisis elástico lineal estructural.

1 INTRODUCCIÓN

En el estudio del comportamiento mecánico estructural, el análisis de sensibilidades está relacionado con determinar el efecto que produce el cambio de los parámetros de diseño de un componente estructural sobre la respuesta que se obtenga del mismo.

Cuando se considera la forma como variable de diseño el análisis de sensibilidades de forma se centra en determinar la influencia que ejerce el cambio de los contornos externos o internos en la respuesta estructural.

Para el estudio de las sensibilidades se emplean métodos de Análisis Numérico, en especial, el Método de los Elementos Finitos (MEF). Este método emplea técnicas de aproximación numérica y en consecuencia sus resultados contienen errores, los cuales tienen su origen en una serie de factores tales como: errores de modelado, de redondeo, computacionales y algorítmicos, y de discretización. Para el cálculo de sensibilidades [Yang y Botkin \(1986\)](#) confirmaron esta afirmación aplicando tanto el enfoque variacional como el de diferenciación implícita, encontrando que una de las fuentes de error en el cálculo de sensibilidades se debe a su dependencia de los resultados obtenidos de elementos finitos.

La mayoría de los trabajos relacionados con el análisis de sensibilidades se han desarrollado mediante el uso de la versión h del método. Sin embargo, cuando esta versión es utilizada se han encontrado problemas relacionados con el modelado de la geometría. El uso de la versión p tiene como ventaja, entre otras, que el contorno del modelo discretizado puede representar con exactitud la geometría a diseñar, eliminando así los errores entre el modelo de diseño y el de análisis. Esta ventaja motiva el uso de la versión p del MEF para el análisis de sensibilidades de diseño de forma, y a su vez sugiere el desarrollo de un método o técnica que permita cuantificar y controlar la influencia de los resultados obtenidos, con la aplicación de esta versión, sobre la precisión de las sensibilidades.

2 FORMULACIÓN PARA EL CÁLCULO DE SENSIBILIDADES DE FORMA

Considerando la formulación general de un problema elástico lineal de elementos finitos en la versión p , esta expresión viene dada por

$$\mathbf{K} \mathbf{c} = \mathbf{f} \quad (1)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez global reducida, \mathbf{c} el vector de coordenadas generalizadas (vector solución) y \mathbf{f} el vector de fuerzas equivalentes. Tanto \mathbf{K} como \mathbf{f} se obtienen de

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{K}^e \quad (2)$$

y

$$\mathbf{f} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{f}^e \quad (3)$$

estas expresiones indican el ensamblado de las matrices de rigidez y de los vectores de fuerzas equivalentes de cada elemento los cuales están definidos mediante

$$\mathbf{K}^e = \int_{A^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t dA^e \quad (4)$$

$$\mathbf{f}^e = \int_{A^e} \mathbf{N}^T \mathbf{m}^e t dA^e + \int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{s} t dS^e \quad (5)$$

en estas expresiones A^e denota el área del elemento, S^e su superficie y t el espesor. En la

ecuación (5) el primer término del lado derecho esta relacionado con las fuerzas másicas y el segundo con las fuerzas superficiales.

La matriz de deformación-desplazamientos \mathbf{B} , ecuación (4), se obtiene como resultado de

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \mathbf{N} \quad (6)$$

donde la matriz operador diferencial \mathbf{L} actúa sobre la matriz de funciones de \mathbf{N} .

En el caso de la versión p del MEF, $\mathbf{N}(\xi, \eta)$ representa la matriz de las funciones de forma jerárquicas

$$\mathbf{N}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & \dots & N_n(\xi, \eta) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & \dots & N_n(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (7)$$

En el presente trabajo se utilizaron las funciones de forma jerárquicas definidas por Szabo y Babuska (1991) correspondientes a un elemento de referencia triangular.

La correlación entre las coordenadas de un elemento real (perteneciente a la geometría real discretizada) y el elemento de referencia exige una transformación de coordenadas, para lo cual se definen las funciones de transformación (o de *mapping*). Por otra parte, la versión p del MEF utiliza elementos de gran tamaño para discretizar tal geometría, lo cual exige que la representación del contorno de la misma sea lo más precisa posible, e independiente del número o tamaño de los elementos. Para lograr ambos propósitos Gordon y Hall (1973) definen las funciones de blending.

En la formulación del MEF la matriz de rigidez del elemento y del vector de fuerzas equivalentes, ecuaciones (4) y (5), se obtienen mediante integración en el interior y en el contorno del elemento, respectivamente. Estas integrales se resuelven numéricamente por medio del método de cuadratura de Gauss. En esta integración Dunavant (1985) presenta un trabajo donde sugiere el número de puntos de Gauss necesarios para garantizar la exactitud de la integración de funciones de grado elevado en elementos triangulares.

La matriz \mathbf{D} , ecuación (4), contiene las propiedades del material. En el caso isótropo lineal E representa el módulo de elasticidad, y ν la relación de Poisson. Para problemas de tensión plana \mathbf{D} viene definida por

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

y para deformación plana

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Desde el punto de vista de la formulación, el análisis de sensibilidades de forma mediante elementos finitos ha seguido dos planteamientos básicos. Uno relacionado con técnicas basadas sobre las derivadas de las ecuaciones discretizadas de elementos finitos, conocido como enfoque de diferenciación implícita o discreto, y la otra, vinculada con la diferenciación de las ecuaciones del continuo que gobiernan la respuesta estructural, denominado enfoque

variacional o continuo (Haug et al. 1986, Mróz, 1986).

En el enfoque discreto se parte de un modelo estructural discretizado, definido por la ecuación (1), de la cual se obtienen las derivadas de las ecuaciones para el análisis de sensibilidades. Derivando dicha expresión con respecto a una variable de diseño cualquiera a_m se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_m} \mathbf{c} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial a_m} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial a_m} \quad (10)$$

que reordenando, resulta

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial a_m} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial a_m} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_m} \mathbf{c} \quad (11)$$

El lado derecho de esta expresión se puede considerar como una pseudocarga \mathbf{f}_{ps} , quedando expresada mediante

$$\mathbf{f}_{ps} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial a_m} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_m} \mathbf{c} \quad (12)$$

por lo que la ecuación (11) puede ser escrita como

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial a_m} = \mathbf{f}_{ps} \quad (13)$$

La parte izquierda de la ecuación anterior tiene la misma matriz de coeficientes que la ecuación (1). Almacenando la forma reducida de esta matriz, en el análisis de elementos finitos, se puede reutilizar para obtener al vector $\partial \mathbf{c} / \partial a_m$, disminuyendo así el número de operaciones en el cálculo de sensibilidades. Resolviendo esta ecuación para los diferentes vectores \mathbf{f}_{ps} asociados a cada componente del vector de variables de diseños

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \quad (14)$$

se obtendrán las sensibilidades de las coordenadas generalizadas con las que se determinarán las sensibilidades de las magnitudes de respuesta (desplazamientos, tensiones, etc.).

La evaluación de los vectores de pseudocarga puede realizarse mediante diferencias finitas (Haftka y Adelman, 1989), método discreto semianalítico (Olhoff y Rasmussen, 1991, Olhoff et al. 1993), o método discreto analítico.

3 APLICACIÓN DEL MÉTODO DISCRETO ANALÍTICO

Como su nombre lo indica, en este método las derivadas $\partial \mathbf{f} / \partial a_m$ y $\partial \mathbf{K} / \partial a_m$ (ver ecuación 12) se obtienen analíticamente, y por lo tanto, los errores en cuanto a la precisión deben ser despreciables frente al error de discretización.

Los trabajos de Fuenmayor et al. (1997), Wang (1985) y El-Sayed y Zumwalt (1991) permiten establecer una sistemática idónea para el cálculo de estas derivadas. En la formulación que sigue, se presta especial atención a la reducción del número de operaciones requeridas para la evaluación de las sensibilidades.

3.1 Derivada de la Matriz de Rigidez \mathbf{K}

Considerando la ecuación (4) la matriz de rigidez \mathbf{K}^e en función de las coordenadas normalizadas se define como

$$\mathbf{K}^e = \int_{A^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}| t dA_e \quad (15)$$

donde \mathbf{J} representa la matriz jacobiana

Tomando en cuenta que la derivada de \mathbf{D} con respecto a las variables de diseño (forma y tamaño) es nula se tiene

$$\frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial a_m} = \int_{A^e} \left[\frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial a_m} \mathbf{D} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial a_m} \right] |\mathbf{J}| t dA_e + \int_{A^e} \left[\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial a_m} \right] t dA_e \quad (16)$$

La primera integral del miembro derecho de la ecuación anterior puede simplificarse considerando la relación

$$\left[\frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial a_m} \mathbf{D} \mathbf{B} \right]^T = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial a_m} \quad (17)$$

obteniéndose de esta manera

$$\frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial a_m} = \int_{A^e} \left[2 \left[\mathbf{B}^T \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial a_m} \right]_s |\mathbf{J}| + \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial a_m} \right] t dA_e \quad (18)$$

donde el subíndice “s” indica la forma simetrizada de la matriz. La ecuación anterior puede reescribirse de forma análoga a la ecuación (15)

$$\frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial a_m} = 2 \int_{A^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} |\mathbf{J}| t dA_e \quad (19)$$

con

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial a_m} + \mathbf{B} \frac{|\mathbf{J}'|}{2|\mathbf{J}|} \quad (20)$$

y donde

$$|\mathbf{J}'| = \frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial a_m} \quad (21)$$

Para evaluar la ecuación (19) solo es necesario calcular dos nuevos términos, $\partial \mathbf{B} / \partial a_m$ y $|\mathbf{J}'| / |\mathbf{J}|$.

3.2 Derivada de la Matriz Jacobiana \mathbf{J}

La matriz jacobiana \mathbf{J} , establece las relaciones entre las coordenadas globales (x,y) y las coordenadas normalizadas (ξ,η)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (22)$$

donde

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (23)$$

La derivada del determinante de la matriz jacobiana, $\partial |\mathbf{J}|/\partial a_m$, puede escribirse como

$$\frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial a_m} = \sum_j \sum_k \frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial \mathbf{J}_{jk}} \frac{\partial \mathbf{J}_{jk}}{\partial a_m} \quad (24)$$

Realizando una expansión término a término de $\partial |\mathbf{J}|/\partial \mathbf{J}_{jk}$ puede demostrarse que

$$\frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial \mathbf{J}_{jk}} = \mathbf{J}_{kj}^{-1} |\mathbf{J}| \quad (25)$$

indicando por \mathbf{J}_{kj}^{-1} la componente (k,j) de la matriz jacobiana inversa. Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (24)

$$\frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial a_m} = \sum_j \sum_k \mathbf{J}_{kj}^{-1} |\mathbf{J}| \frac{\partial \mathbf{J}_{jk}}{\partial a_m} \quad (26)$$

Reordenando, se obtiene

$$\frac{|\mathbf{J}'|}{|\mathbf{J}|} = \sum_j \sum_k \mathbf{J}_{kj}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}_{jk}}{\partial a_m} = \text{traza} \left(\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial a_m} \right) \quad (27)$$

Con lo que es posible calcular el escalar $|\mathbf{J}'|/|\mathbf{J}|$ directamente sin evaluar $\partial |\mathbf{J}|/\partial a_m$.

Para obtener el término $\partial \mathbf{J}/\partial a_m$ es necesario definir previamente como varía la posición de los puntos materiales en relación con las variables de diseño, es decir, la sensibilidad de los puntos geométricos o campo de velocidades. En el desarrollo de las siguientes derivadas se supondrá que el término $\partial \mathbf{J}/\partial a_m$ es conocido.

3.3 Derivada de la Matriz \mathbf{B}

De acuerdo a lo expuesto en la ecuación (6), la matriz \mathbf{B} relaciona las deformaciones con los desplazamientos. Suponiendo una ordenación de los grados de libertad del elemento por direcciones coordenadas, la matriz \mathbf{B} tiene la forma

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & \dots & N_{n,x} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & N_{1,y} & N_{2,y} & \dots & N_{n,y} \\ N_{1,x} & N_{2,x} & \dots & N_{n,x} & N_{1,y} & N_{2,y} & \dots & N_{n,y} \end{bmatrix} \quad (28)$$

el subíndice después de la coma indica la derivada correspondiente. Derivando con respecto a la variable de diseño a_m se tiene

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial a_m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{1,x}}{\partial a_m} & \frac{\partial N_{2,x}}{\partial a_m} & \dots & \frac{\partial N_{n,x}}{\partial a_m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_{1,y}}{\partial a_m} & \frac{\partial N_{2,y}}{\partial a_m} & \dots & \frac{\partial N_{n,y}}{\partial a_m} \\ \frac{\partial N_{1,x}}{\partial a_m} & \frac{\partial N_{2,x}}{\partial a_m} & \dots & \frac{\partial N_{n,x}}{\partial a_m} & \frac{\partial N_{1,y}}{\partial a_m} & \frac{\partial N_{2,y}}{\partial a_m} & \dots & \frac{\partial N_{n,y}}{\partial a_m} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Considerando la ecuación (22), la derivada con respecto a la variable de diseño a_m de las derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas normalizadas es

$$\frac{\partial}{\partial a_m} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{J}^{-1}}{\partial a_m} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} + \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial a_m} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (30)$$

y, tomando en cuenta que las funciones de forma no dependen de la variable de diseño, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial a_m} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{J}^{-1}}{\partial a_m} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

El término \mathbf{J}^{-1} no se obtiene de forma explícita, por tanto no puede conseguirse una expresión directa para $\partial \mathbf{J}^{-1} / \partial a_m$. Utilizando la identidad

$$\frac{\partial \mathbf{J}^{-1}}{\partial a_m} \mathbf{J} + \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial a_m} = [\mathbf{0}] \quad (32)$$

y despejando $\partial \mathbf{J}^{-1} / \partial a_m$ se llega a la expresión

$$\frac{\partial \mathbf{J}^{-1}}{\partial a_m} = -\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial a_m} \mathbf{J}^{-1} \quad (33)$$

que sustituyendo en la ecuación (31) resulta

$$\frac{\partial}{\partial a_m} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial a_m} \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

Introduciendo la ecuación (22) en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial a_m} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial a_m} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (35)$$

lo que implica que para calcular el valor de $\partial \mathbf{K} / \partial a_m$, solo resta determinar las derivadas de las componentes de la matriz jacobiana \mathbf{J} con respecto a las variables de diseño

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial a_m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial a_m} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) & \frac{\partial}{\partial a_m} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial}{\partial a_m} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) & \frac{\partial}{\partial a_m} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \end{bmatrix} \quad (36)$$

En este punto se debe considerar que la matriz jacobiana \mathbf{J} depende de las ecuaciones de transformación de coordenadas. Como se destacó anteriormente, las ecuaciones de transformación para el desarrollo de este trabajo fueron tomadas de [Gordon y Hall \(1973\)](#) conocidas como funciones de blending.

Para definir como varía la posición de los puntos materiales en relación con las variables de diseño, es decir, la sensibilidad de los puntos geométricos o campo de velocidades, [Choi y Chang \(1994\)](#) proponen el método de mapping isoparamétrico, donde el campo de velocidades se obtiene a partir de una descomposición espacial. del dominio en 'superelementos', generándose dentro de cada uno de ellos los nodos internos en base a las mismas funciones de interpolación. La posición de los nodos internos es definida en términos de la posición de los nodos del contorno, en consecuencia el cambio de posición de estos últimos permite determinar el cambio de los nodos internos.

3.4 Derivada del Vector Cargas f^e

De la ecuación (5) se tiene que el vector de fuerzas equivalentes para un elemento en función de las coordenadas normalizadas viene representado por

$$\mathbf{f}^e = \int_{A^e} \mathbf{N}^T \mathbf{m}^e |\mathbf{J}| t dA_e + \int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{s} t dS_e \quad (37)$$

donde el primer término del lado derecho de la ecuación esta relacionado con las fuerzas másicas y el segundo con las fuerzas superficiales.

Para el vector relacionado con las fuerzas másicas, suponiendo a \mathbf{m}^e constante, se tiene que la derivada con respecto a la variable de diseño es

$$\frac{\partial}{\partial a_m} \int_{A^e} \mathbf{N}^T \mathbf{m}^e |\mathbf{J}| dA_e = \int_{A^e} \mathbf{N}^T \mathbf{m}^e \frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial a_m} dA_e \quad (38)$$

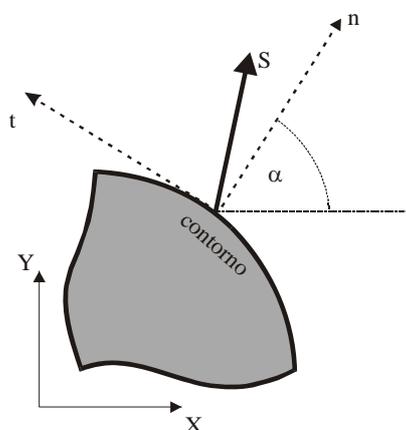


Figura 1: Dirección normal y tangencial al contorno

Las componentes en x e y del vector de fuerzas superficiales se pueden expresar como (Figura 1)

$$s_x = s_n \cos \alpha - s_t \operatorname{sen} \alpha \quad (39)$$

$$s_y = s_n \operatorname{sen} \alpha + s_t \cos \alpha \quad (40)$$

Si se asume que la superficie sometida a carga es independiente de la variable de diseño a_m se tiene que

$$\frac{\partial s_t}{\partial a_m} = \frac{\partial s_n}{\partial a_m} = 0 \quad (41)$$

por lo tanto la derivada del vector de fuerzas equivalentes asociada a las fuerzas superficiales es nula.

En el caso de que s_t , s_n y \mathbf{m}^e dependan de la variable de diseño, el usuario debe definir como dato, las expresiones que establecen la relación de estos términos con la variable.

4 DESARROLLO DE UN ESTIMADOR DEL ERROR DE DISCRETIZACIÓN

4.1 Norma de la Energía del Error

En problemas de elasticidad se utiliza habitualmente la norma energética del error como una medida global de la calidad de la solución de elementos finitos. Partiendo de la norma energética en desplazamientos $\|\mathbf{u}\|$ la cual se define como la raíz cuadrada de la energía de deformación (estrictamente se corresponde con el doble de la energía de deformación ya que no se considera la constante $1/2$. Esto se hace con el objeto de uniformar criterios en cuanto a la definición del error de discretización en sensibilidades dada posteriormente)

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{U(\mathbf{u})} \quad (42)$$

siendo U la energía de deformación, \mathbf{u} define cualquier campo de desplazamientos que cumpla las condiciones de contorno esenciales y de energía de deformación finita. Estableciendo el error absoluto en desplazamientos $\mathbf{e}_{(u)}$ por

$$\mathbf{e}_{(u)} = \mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef} \quad (43)$$

donde \mathbf{u}_{ef} define los desplazamientos obtenidas con el MEF y \mathbf{u}_{ex} los valores exactos. La norma energética del error en desplazamientos $\|\mathbf{e}_{(u)}\|$ queda definida mediante

$$\|\mathbf{e}_{(u)}\| = \|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef}\| = \sqrt{U(\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef})} \quad (44)$$

Esta norma puede calcularse sobre el dominio completo A o sobre elementos individuales A_e , cumpliéndose que

$$\|\mathbf{e}_{(u)}\|^2 = \sum_{i=1}^{ne} \|\mathbf{e}_{(u)_i}\|^2 \quad (45)$$

donde ne corresponde al número total de elementos.

En principio, se debe tomar en cuenta que la norma energética del error y el error en la norma energética no definen exactamente el error de la misma forma, es decir

$$\|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef}\|^2 \neq \|\mathbf{u}_{ex}\|^2 - \|\mathbf{u}_{ef}\|^2 \quad (46)$$

Sin embargo, bajo ciertas condiciones (Ciarlet, 1987) se puede demostrar la igualdad entre ambas medidas del error

$$\|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef}\|^2 = \|\mathbf{u}_{ex}\|^2 - \|\mathbf{u}_{ef}\|^2 \quad (47)$$

o expresada de otra manera en términos de la energía (Zienkiewicz y Taylor, 1994)

$$\|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef}\|^2 = U(\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef}) = |U(\mathbf{u}_{ex}) - U(\mathbf{u}_{ef})| = \|\mathbf{u}_{ex}\|^2 - \|\mathbf{u}_{ef}\|^2 \quad (48)$$

En el desarrollo del presente trabajo se asume que

$$\|\mathbf{e}_{ex(u)}\|^2 \approx \|\mathbf{u}_{ex}\|^2 - \|\mathbf{u}_{ef}\|^2 \quad (49)$$

donde $\|\mathbf{e}_{ex(u)}\|$ corresponde a la norma energética del error exacto. Si se toman precauciones en el análisis de elementos finitos en cuanto al modelado y a los procedimientos numéricos utilizados, entonces $\|\mathbf{e}_{ex(u)}\|$ representa el error de discretización.

Considerando lo establecido por la ecuación (49), la energía de deformación exacta del problema U_{ex} , se puede estimar sumando la energía de deformación obtenida con el MEF U_{ef} y la energía de deformación del error $\|\mathbf{e}_{(u)}\|^2$ (norma energética del error al cuadrado), es decir

$$\|\mathbf{u}_{ex}\|^2 \approx \|\mathbf{u}_{ef}\|^2 + \|\mathbf{e}_{ex(\mathbf{u})}\|^2 \quad (50)$$

La ecuación (50) establece una igualdad entre el error de la energía de deformación y la energía de deformación del error, que se cumple con más precisión a medida que los errores van haciéndose más pequeños.

En función de la norma energética del error, se puede definir el error relativo exacto $\eta_{ex}(\mathbf{u})$ como la relación entre la norma energética del error exacto $\|\mathbf{e}_{ex}(\mathbf{u})\|$ y la norma energética de la solución exacta $\|\mathbf{u}_{ex}\|$

$$\eta_{ex(\mathbf{u})} = \frac{\|\mathbf{e}_{ex}\|}{\|\mathbf{u}_{ex}\|} = \frac{\|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef}\|}{\|\mathbf{u}_{ex}\|} = \sqrt{\frac{U_{ex} - U_{ef}}{U_{ex}}} \quad (51)$$

4.2 Error de Discretización en Sensibilidades

Con el objeto de conservar el fundamento teórico utilizado para determinar la norma energética en desplazamientos, ecuación (42), la cuantificación del error de discretización en sensibilidades se puede obtener a partir de

$$\frac{\partial \|\mathbf{u}\|^2}{\partial a_m} = \frac{\partial U(\mathbf{u})}{\partial a_m} \quad (52)$$

Esta definición se hace por conveniencia ya que tiene una interpretación física sencilla, y corresponde a la sensibilidad de la energía de deformación.

Tomando en cuenta la definición establecida, y considerando la ecuación (48), el error de discretización en sensibilidades exacto $e_{ex(\xi)}$ se puede definir como

$$e_{ex(\xi)} = \frac{\partial}{\partial a_m} \|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef}\|^2 = \frac{\partial U(\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef})}{\partial a_m} = \left| \frac{\partial U(\mathbf{u}_{ex})}{\partial a_m} - \frac{\partial U(\mathbf{u}_{ef})}{\partial a_m} \right| = \frac{\partial \|\mathbf{u}_{ex}\|^2}{\partial a_m} - \frac{\partial \|\mathbf{u}_{ef}\|^2}{\partial a_m} \quad (53)$$

a partir de lo cual el error relativo en sensibilidades exacto $\eta_{ex(\xi)}$ se puede calcular a partir de

$$\eta_{ex(\xi)} = \frac{e_{ex(\xi)}}{\sqrt{\frac{\partial \|\mathbf{u}_{ex}\|^2}{\partial a_m}}} = \sqrt{\frac{\frac{\partial U_{ex}}{\partial a_m} - \frac{\partial U_{ef}}{\partial a_m}}{\frac{\partial U_{ex}}{\partial a_m}}} \quad (54)$$

4.3 Convergencia en la Norma Energética del Error

En cuanto a la convergencia de la norma energética del error, existe una base teórica bien desarrollada por Szabo (1986), Gui y Babuska (1986c, b, a). De estas referencias se sabe que aumentando los N grados de libertad en la discretización, la norma energética del error tiende a converger de forma asintótica. Específicamente, para la versión p del MEF la norma energética del error depende de la existencia de singularidades en la geometría del problema, es decir, de la suavidad de la solución (Szabo y Babuska, 1991).

En el caso de la presencia de puntos singulares, en el dominio o en el contorno de la solución, se dice que la convergencia es algebraica (Szabo y Babuska, 1991) y cumple con la siguiente relación

$$\|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef}\| \leq \frac{k}{N^\beta} \quad (55)$$

donde k y β son constantes positivas que dependen del problema y N es el número de grados de libertad. La constante k depende del grado del polinomio p .

La constante β puede tomar diferentes valores según la ubicación de los puntos singulares. En el caso donde el punto singular no coincide con un nodo, β toma el valor de

$$\beta = \frac{1}{2} \lambda \quad (56)$$

donde λ es una constante que define la intensidad de las singularidades. Por el contrario, si el punto singular coincide con un nodo, entonces β toma directamente este valor, es decir

$$\beta = \lambda \quad (57)$$

Por lo general los puntos singulares coinciden con los puntos nodales (vértice de una grieta o cambio de las condiciones de contorno), por lo tanto, la relación de convergencia dada por la ecuación (55) junto con el valor de β de la ecuación (57) es propio en los procesos de refinamientos p en problemas de este tipo.

Algunos valores típicos de λ que frecuentemente se encuentran en la práctica de la ingeniería se encuentran en Szabo y Babuska, 1991.

El valor absoluto de β se denomina velocidad de convergencia asintótica y es una medida de cómo el error puede ser regulado con el incremento de los grados de libertad. Cuando β es grande el error disminuye rápidamente al aumentar el número de grados de libertad, por el contrario, cuando β es pequeño el error disminuye lentamente.

En el caso de que no existan puntos singulares, bien sea en el dominio o en el contorno, (problema con solución suave), la convergencia es exponencial y satisface la siguiente expresión

$$\|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef}\| \leq \frac{k}{\exp(\gamma N^\theta)} \quad (58)$$

en este caso γ y θ son también constantes positivas ($\theta \geq 1/3$) (Szabo, 1986).

En la medida que el número de grados de libertad N aumenta en las ecuaciones (55) y (58) el símbolo de desigualdad (\leq) puede ser reemplazado por el de aproximadamente igual (\approx), de manera que estas expresiones pueden utilizarse como estimadores asintóticos del error a priori, lo cuales pueden indicar cómo de rápido cambia el error cuando cambia la discretización. La combinación de la información dada por este tipo de estimador junto con técnicas de extrapolación puede ser muy efectiva en la estimación del error.

4.4 Estimación del Error de Discretización en Sensibilidades

Uno de los métodos utilizado en la estimación del error de discretización es él basado en la extrapolación de Richardson (Szabo, 1986). Este método presenta la ventaja de ser adaptable a los proceso de refinamiento p uniforme, por lo que su aplicación es habitual con esta versión del método.

La aplicación del método se desarrolla a partir de las relaciones de convergencia dadas por las ecuaciones (55) y (58), suponiendo que N es lo suficientemente grande, de estas ecuaciones se obtienen

$$\|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef}\|^2 = |U(\mathbf{u}_{ex}) - U(\mathbf{u}_{fe})| \approx \frac{k^2}{N^{2\beta}} \quad (59)$$

$$\|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef}\|^2 = |U(\mathbf{u}_{ex}) - U(\mathbf{u}_{fe})| \approx \frac{k^2}{\exp(2\gamma(N_i)^\theta)} \quad (60)$$

Para mantener una relación entre la convergencia de la solución y la de su sensibilidad, se parte de la derivada de la expresión que define la ley de convergencia en norma energética del error con respecto a la variable de diseño a_m .

En el caso de convergencia algebraica esta relación viene dada por la expresión (59). Con la finalidad de simplificar el desarrollo de la formulación, se plantea como hipótesis suponer a la constante β independiente de la variable de diseño a_m , por lo tanto, derivando esta ecuación con respecto a esta variable se tiene

$$\frac{\partial}{\partial a_m} |U(\mathbf{u}_{ex}) - U(\mathbf{u}_{ef})| = \frac{\partial}{\partial a_m} \|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef}\| \leq \frac{2kk_{,a_m}}{N^{2\beta}} \quad (61)$$

en esta expresión $k_{,a_m}$ representa la derivada de la constante k con respecto a la variable de diseño a_m . Haciendo la sustitución de $C = 2kk_{,a_m}$ dentro de la ecuación (61) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial a_m} |U(\mathbf{u}_{ex}) - U(\mathbf{u}_{ef})| \leq \frac{C}{N^{2\beta}} \quad (62)$$

con esta expresión se define la convergencia del error de discretización en sensibilidades en función de la sensibilidad de la energía de deformación. Para la solución de esta última ecuación es necesario conocer los valores de $\partial U(\mathbf{u}_{ex})/\partial a_m$, C y β . Si se considera que N es lo suficientemente grande es posible plantear un sistema de ecuaciones a partir de las sensibilidades de la energía de deformación $\partial U/\partial a_m$ y de los grados de libertad N correspondientes a tres análisis sucesivos. Designando con $\partial U_I/\partial a_m$, $\partial U_{II}/\partial a_m$ y $\partial U_{III}/\partial a_m$ las sensibilidades de la energía de deformación para estos tres análisis, y con N_I , N_{II} y N_{III} sus correspondientes grados de libertad, el valor estimado de la sensibilidad de la energía de deformación $\partial U_{es}/\partial a_m$ se puede obtener de

$$\frac{\left(\frac{\partial U_{es}}{\partial a_m}\right) - \left(\frac{\partial U_{III}}{\partial a_m}\right)}{\left(\frac{\partial U_{es}}{\partial a_m}\right) - \left(\frac{\partial U_{II}}{\partial a_m}\right)} = \frac{\left(\left(\frac{\partial U_{es}}{\partial a_m}\right) - \left(\frac{\partial U_{II}}{\partial a_m}\right)\right)^Q}{\left(\left(\frac{\partial U_{es}}{\partial a_m}\right) - \left(\frac{\partial U_I}{\partial a_m}\right)\right)} \quad (63)$$

donde Q se calcula por medio de

$$Q = \frac{\log \frac{N_{II}}{N_{III}}}{\log \frac{N_I}{N_{II}}} \quad (64)$$

Ya obtenido el valor estimado de la sensibilidad de la energía de deformación $\partial U_{es}/\partial a_m$, la velocidad de convergencia estimada en sensibilidades $\beta_{(\xi)}$, se puede lograr mediante

$$\beta_{(\xi)} = \frac{1}{2} \frac{\log \frac{\frac{\partial U_{es}}{\partial a_m} - \frac{\partial U_{III}}{\partial a_m}}{\frac{\partial U_{es}}{\partial a_m} - \frac{\partial U_{II}}{\partial a_m}}}{\log \frac{N_{II}}{N_{III}}} \quad (65)$$

Para la solución iterativa de la ecuación (63) se sugiere como valor inicial $\partial U_{III}/\partial a_m$.

De forma similar se desarrolla la misma formulación para la convergencia exponencial. En este caso, la expresión a derivar viene dada por la ecuación (60), donde, por las mismas razones de simplificación en la formulación, las constantes γ y θ se consideran independientes de la variable de diseño a_m . Operando de esta manera la expresión obtenida corresponde a

$$\frac{\partial}{\partial a_m} |U(\mathbf{u}_{ex}) - U(\mathbf{u}_{ef})| = \frac{\partial}{\partial a_m} \|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef}\| \leq \frac{2kk_{,a_m}}{\exp(\gamma N^0)} \quad (66)$$

Reemplazando a $C = 2kk_{,a_m}$ dentro de esta ecuación se tiene

$$\frac{\partial}{\partial a_m} |U(\mathbf{u}_{ex}) - U(\mathbf{u}_{ef})| \leq \frac{C}{\exp(\gamma N^0)} \quad (67)$$

Tomando ahora el valor de $\theta = 1/2$, de forma similar el valor estimado de la sensibilidad de la energía de deformación $\partial U_{es} / \partial a_m$, para esta convergencia, se puede obtener de la expresión

$$\frac{\left(\frac{\partial U_{es}}{\partial a_m} \right) - \left(\frac{\partial U_{III}}{\partial a_m} \right)}{\left(\frac{\partial U_{es}}{\partial a_m} \right) - \left(\frac{\partial U_{II}}{\partial a_m} \right)} = \frac{\left(\left(\frac{\partial U_{es}}{\partial a_m} \right) - \left(\frac{\partial U_{II}}{\partial a_m} \right) \right)^{Q'}}{\left(\left(\frac{\partial U_{es}}{\partial a_m} \right) - \left(\frac{\partial U_{I}}{\partial a_m} \right) \right)} \quad (68)$$

donde Q' se determina por medio de la ecuación

$$Q' = \frac{N_{II}^0 - N_{III}^0}{N_I^0 - N_{II}^0} \quad (69)$$

Una vez calculado el valor estimado de $\partial U_{es} / \partial a_m$, se puede definir la magnitud que permitirá la estimación del error en la sensibilidad de la energía de deformación. Tomando en cuenta la ecuación (53) el estimador del error de discretización en sensibilidades $e_{es(\xi)}$ se puede definir como

$$e_{es(\xi)} = \left| \frac{\partial U(\mathbf{u}_{ex})}{\partial a_m} - \frac{\partial U(\mathbf{u}_{ef})}{\partial a_m} \right| \approx \left| \frac{\partial U_{es}}{\partial a_m} - \frac{\partial U_{ef}}{\partial a_m} \right| \quad (70)$$

donde $\partial U_{ef} / \partial a_m$ corresponde a la sensibilidad de la energía de deformación obtenida del postproceso de la solución de elementos finitos.

A partir de esta expresión, la definición del error relativo estimado en sensibilidades $\eta_{es(\xi)}$ se calcula mediante

$$\eta_{es(\xi)} = \frac{e_{es(\xi)}}{\frac{\partial U_{es}}{\partial a_m}} = \sqrt{\frac{\frac{\partial U_{es}}{\partial a_m} - \frac{\partial U_{ef}}{\partial a_m}}{\frac{\partial U_{es}}{\partial a_m}}} \quad (71)$$

expresión que permite al usuario medir y controlar el error en el cálculo de sensibilidades.

4.5 Índice de Efectividad

La fiabilidad de un estimador es evaluada por medio del índice de efectividad I , el cual se define como la relación entre el error estimado y el error exacto. Para que un estimador del error sea considerado como aceptable, la bibliografía sugiere que el índice de efectividad debe variar entre $0.8 \leq I \leq 1.2$ con tendencia hacia la unidad, en la medida que se incrementa el número de grados de libertad N . (Szabo, 1986). Considerando todo lo anterior, el índice de

efectividad $I_{(\xi)}$ para evaluar el estimador presentado se puede obtener a partir de

$$I_{(\xi)} = \frac{\mathbf{e}_{es(\xi)}}{\mathbf{e}_{ex(\xi)}} \quad (72)$$

Como se observa, este término puede ser calculado solamente para problemas de los cuales se conoce la solución exacta, por lo tanto, como una alternativa a este tipo de situaciones se tomará como solución “exacta”, la obtenida por medio de una malla con elevados grados de libertad y con un error un error despreciable en comparación con los de las mallas analizadas.

5 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Para validar numéricamente el estimador del error en sensibilidades propuesto se analizan ejemplos clásicos de los cuales se presentan dos de ellos a continuación. Estos resultados fueron obtenidos en cada problema para un proceso de refinamiento p uniforme de 8 análisis (desde $p=1$ hasta $p=8$).

Con cada tres análisis consecutivos, se han calculado los valores estimados sensibilidad de energía de deformación $\partial U_{es} / \partial a_m$, ecuación (63) ó (68), según el tipo de convergencia del problema. Se han obtenido valores de los errores relativos exactos y estimados, así como también los respectivos índices de efectividad. Los valores exactos correspondientes a estas magnitudes, se han obtenido a partir de las soluciones “exactas”.

La evolución de los resultados están representados por medio de gráficas en función del número de grados de libertad N .

5.1 Análisis de Magnitudes

La evaluación numérica y gráfica del comportamiento de los resultados obtenidos con el estimador del error propuesto se realiza a través del análisis de las siguientes magnitudes:

Errores relativos exactos $\eta_{ex(\xi)}$ y estimados $\eta_{es(\xi)}$, ecuaciones (54) y (71), respectivamente: estas magnitudes indican, por sí mismas, la calidad de la solución global alcanzada en cada análisis

Índices de efectividad $I_{es(\xi)}$, ecuación (72): tal como se indicó en la teoría esta magnitud evalúa la confiabilidad del estimador. Los valores esperados para considerar un estimador aceptable deben oscilar entre 0.8 y 1.2 con tendencia a 1.

Para las magnitudes de velocidad de convergencia y error relativo se presentan los casos *I*, *II* y *III* donde cada uno es obtenido sustituyendo en las expresiones respectivas los valores utilizados en la extrapolación de $\partial U_{es} / \partial a_m$. Así por ejemplo, para un análisis $p = 4$,

Grado	Magnitud	Se obtiene a partir de:
$p = 4$	$\partial U_{es} / \partial a_m$	$\partial U_2 / \partial a_m, \partial U_3 / \partial a_m, \partial U_4 / \partial a_m$
	<i>I</i>	$U_{es} \quad \frac{\partial U_1 / \partial a_m, \partial U_2 / \partial a_m,}{N_1, N_2}$
	β_{es} <i>II</i>	$\frac{\partial U_2 / \partial a_m, \partial U_3 / \partial a_m,}{N_2, N_3}$
	<i>III</i>	$\frac{\partial U_3 / \partial a_m, \partial U_4 / \partial a_m,}{N_3, N_4}$

η_{es}	I	$\frac{\partial U_2}{\partial a_m}$
	II	$\frac{\partial U_3}{\partial a_m}$
	III	$\frac{\partial U_4}{\partial a_m}$

Tabla 1: Ejemplo para análisis $p = 4$

5.2 Ejemplo 1. Cilindro de Pared gruesa

Como primer ejemplo se plantea el problema del cilindro de pared gruesa sometido a presión interna p_i , (ver Figura 2). Este ejemplo ofrece la ventaja de tener solución exacta (suave), lo cual permite evaluar con precisión los resultados obtenidos con la formulación propuesta. Los datos relacionados con la geometría, presión y propiedades elásticas se indican en la Figura 3a. Para los modelos geométrico y de análisis se aprovecha la doble simetría del problema, los cuales son representados por un sector de 90° (ver Figura 3a), y una malla de 9 elementos, Figura 3b.

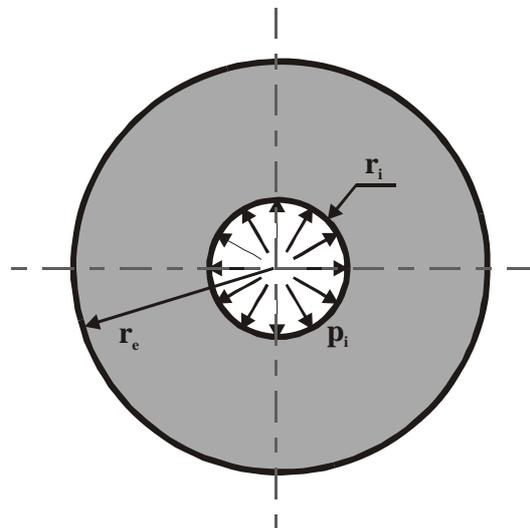


Figura 2: Cilindro de pared gruesa sometido a presión interna

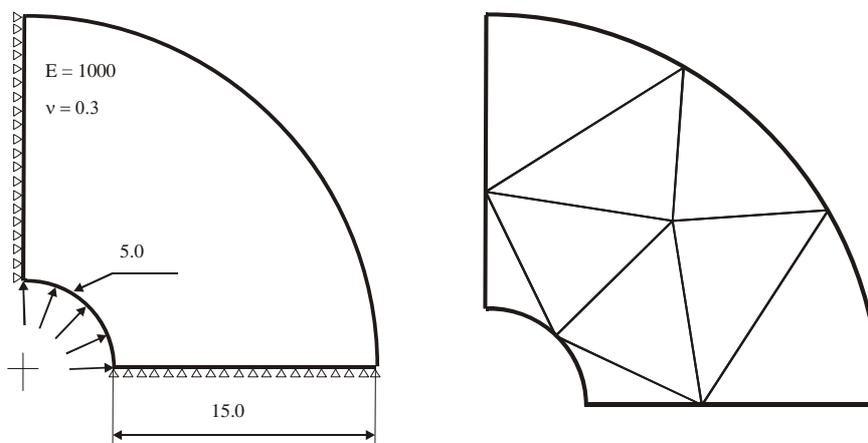


Figura 3: a) Modelo geométrico

b) Modelo de análisis

La energía de deformación exacta U_{ex} para un sector de 90° viene dada por la siguiente

expresión

$$U_{ex} = \frac{\pi p_i^2 r_i^3 (1-2\nu)(1+\nu)}{4(r_e^2 - r_i^2)E} \left(r_i + \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{r_e^2}{r_i} \right) \quad (73)$$

donde r_e y r_i representan los radios externo e interno, respectivamente, p_i corresponde a la presión interna, ν la relación de Poisson y E el módulo de elasticidad. Se selecciona como variable de diseño el radio externo r_e . La sensibilidad de la energía de deformación con respecto a esta variable viene dada por

$$\left(\frac{\partial U}{\partial a_m} \right)_{a_m=r_e} = \frac{\pi p_i^2 r_i^3 r_e (1+\nu)(1-\nu)}{(r_e^2 - r_i^2)^2 E} \quad (74)$$

Para los datos dados en la Figura 3 a), se obtienen como soluciones exactas

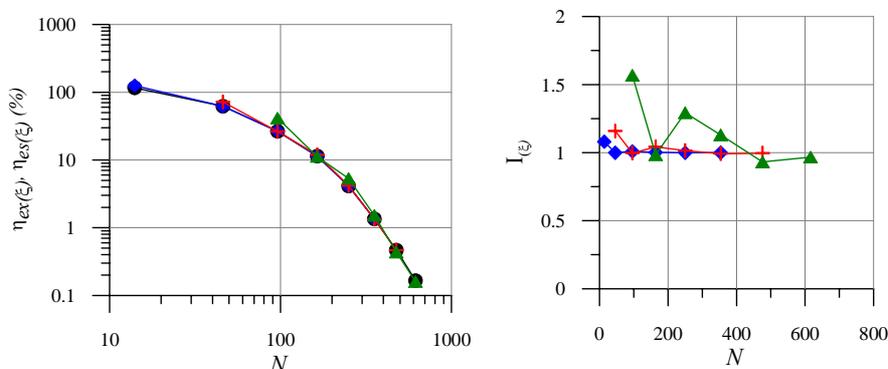
$$U_{ex} = 2.791 \cdot 10^{-2} \quad (75)$$

$$\left(\frac{\partial U_{ex}}{\partial a_m} \right)_{a_m=r_e} = -2.54120 \cdot 10^{-4} \quad (76)$$

Con este problema se desea estimar el error de discretización en sensibilidades considerando tanto convergencia exponencial, como algebraica. Aún cuando se sabe que esta última no corresponde a problemas con solución suave, su evaluación se hace de forma intencional. Este tratamiento se fundamenta en el hecho de que puntos muy cercanos entre si, en la curva del error en norma energética, pueden ajustarse aproximadamente bien considerando esta ley de convergencia.

La variable de diseño seleccionada para este estudio corresponde al radio externo r_e .

Con relación a la convergencia exponencial, en la Figura 4 se observa como la pendiente de la curva de convergencia, $\beta_{es}(\xi)$, tiende a aumentar de forma exponencial con el incremento de N . Este comportamiento es propio de las curvas asociadas a la norma energética del error en problemas con solución suave. Comparando las trayectorias de los errores relativos, se distingue como el caso I se aproxima con bastante fidelidad a la del valor exacto, lo cual significa, que el estimador es más preciso cuando se consideran resultados que no estén muy cercanos al valor estimado. Con respecto a los resultados del índice de efectividad $I(\xi)$, se puede decir que el estimador propuesto es fiable para todos los casos, ya que los valores obtenidos se encuentran, prácticamente, dentro del rango preestablecido.



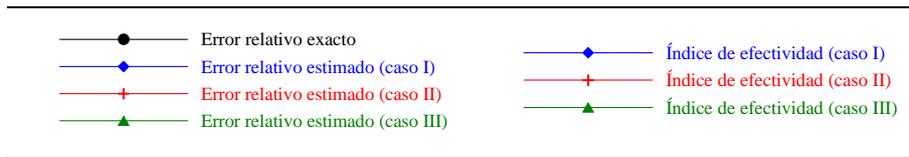


Figura 4: Errores relativos exacto y estimados en sensibilidades considerando convergencia exponencial (cilindro)

Considerando la convergencia algebraica, los resultados se resumen en la Figura 5. De estos, se puede observar como las pendientes de las curvas de convergencia aumentan con el incremento de N . Estas variaciones señalan que los errores relativos $\eta_{ex}(\xi)$ y $\eta_{es}(\xi)$ convergen de forma exponencial. Este comportamiento no difiere a los resultados obtenidos considerando convergencia exponencial.

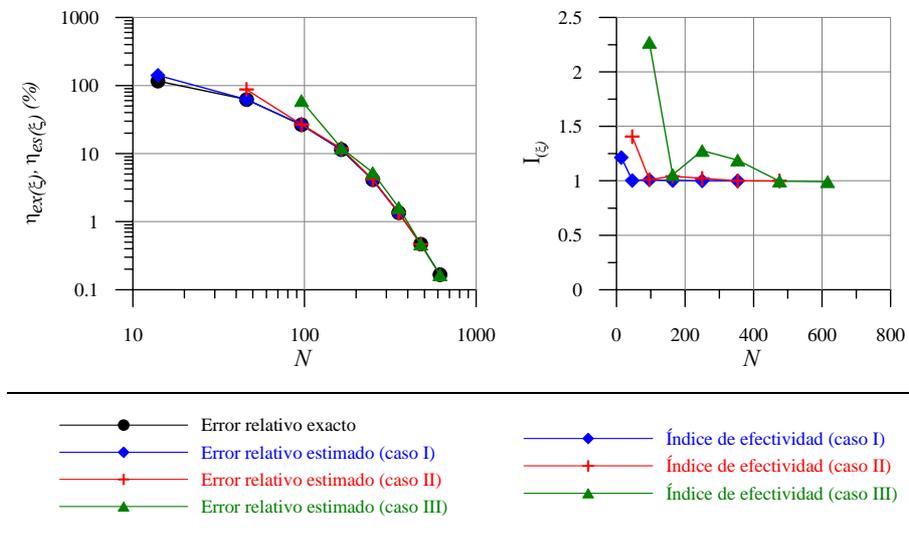


Figura 5: Errores relativos exacto y estimados en sensibilidades considerando convergencia algebraica (cilindro)

Referente a los errores relativos estimados $\eta_{es}(\xi)$, se observa que los mismos se alejan del valor exacto $\eta_{ex}(\xi)$ en la medida que se consideran los casos *I*, *II*, y *III*. Sin embargo, considerando cada caso en particular los valores estimados se acercan al valor exacto con el incremento de N . Para los casos *I* y *II*. Los índices de efectividad $I_{(\xi)}$, sugieren un estimador fiable para este tipo de convergencia. En el caso *III*, aún cuando los valores de índice de efectividad están alejados de los valores deseados, su tendencia es a estabilizarse hacia la unidad. Un detalle a resaltar en esta figura, es que esta ley de convergencia también se adapta a puntos cercanos entre si (últimos puntos de la curva).

5.3 Ejemplo 2. Placa con Abertura Cuadrada

En este caso se presenta un ejemplo con singularidad en su geometría. El problema consiste en una placa cuadrada con abertura cuadrada y concéntrica, sometida a tracción en los bordes (ver Figura 6).

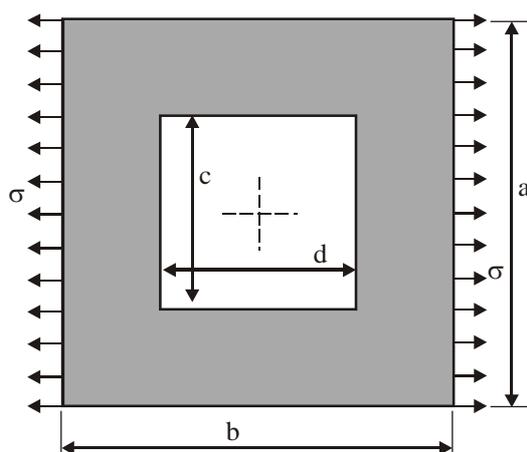


Figura 6: Placa cuadrada con abertura cuadrada concéntrica

Los datos correspondientes a la geometría y propiedades del material, y su modelo de análisis se describen en las Figuras 7a y b, respectivamente. Dada la doble simetría, el modelo geométrico es representado por un sector de 90° .

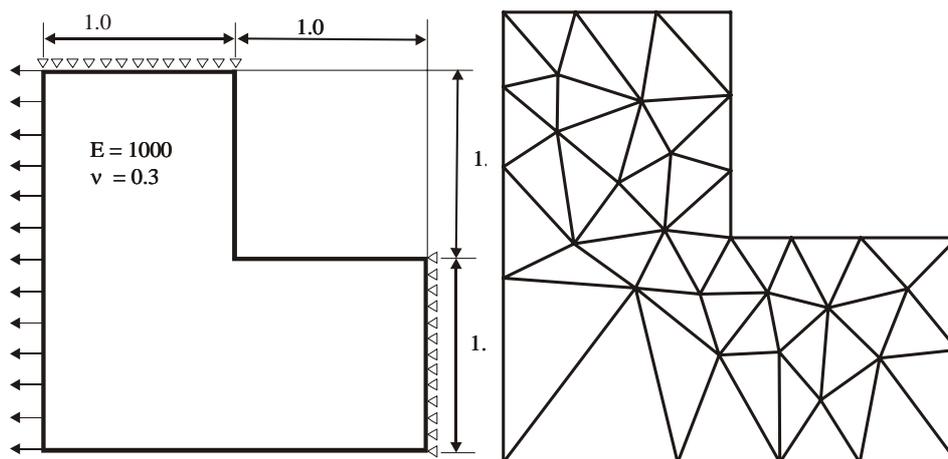


Figura 7: a) Modelo geométrico

b) Modelo de análisis

La solución “exacta” de la sensibilidad $\partial U_{ex}/\partial a_m$ de este ejemplo, es obtenida a partir de un proceso de refinamiento h -adaptativo para una malla muy refinada y con un error estimado menor a 0.5 %. El valor así calculado corresponde a

$$\frac{\partial U_{ex}}{\partial a_m} = -0.01862 \quad (77)$$

En la formulación de la convergencia del error de sensibilidades, se planteó como hipótesis que la velocidad de convergencia no depende de la variable de diseño, sin embargo, se puede observar, a través de este ejemplo, que cuando la singularidad está sobre el contorno al modificar esta influye en la velocidad de convergencia, esto implica una posible limitación para la hipótesis planteada. Con este ejemplo se estudia como es el comportamiento de los valores estimados en sensibilidades considerando la situación donde la singularidad está

localizada fuera y sobre el contorno a modificar.

Los resultados considerando la singularidad fuera del el contorno a modificar se muestran en la Figura 8. En esta figura se observa como la pendiente, $\beta_{(\xi)}$, varía con el incremento de los grados de libertad N de forma es algebraica, y es alcanzada para valores elevados de p . Considerando el índice de efectividad, la fiabilidad del estimador queda demostrada. Estos resultados, por si solos, coinciden con la hipótesis planteada, donde la velocidad de convergencia se considera constante.

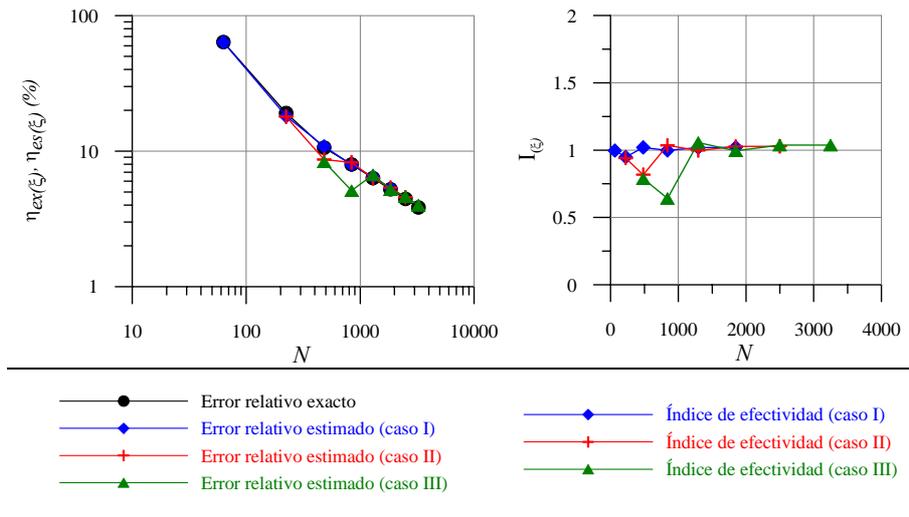


Figura 8: Convergencia en sensibilidades (placa, contorno variable sin singularidades)

En el caso donde la singularidad se sitúa sobre el contorno a modificar, los resultados se presentan en la Figura 9. Aquí se destaca como los errores relativos estimados tienden a separarse de los errores relativos exactos. Este detalle hace dudar de los resultados obtenidos con el estimador propuesto, lo cual es confirmado observando la gráfica de efectividad $I_{(\xi)}$. No obstante, no deben ser descartados del todo ya que los valores correspondientes a los errores relativos estimados $\eta_{es}(\xi)$ sugieren que se tiene una buena aproximación al valor exacto.

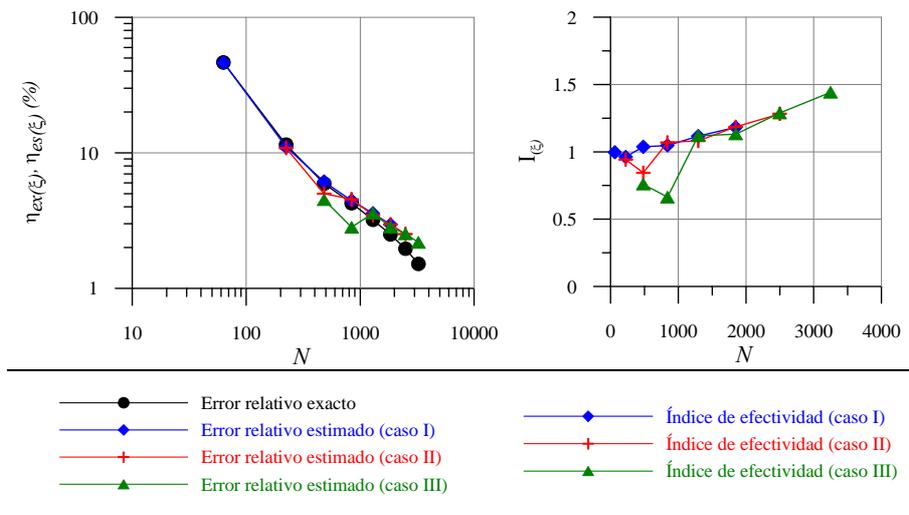


Figura 9: Convergencia en sensibilidades (placa, contorno variable con singularidades)

6 CONCLUSIONES

Con el método de cálculo de sensibilidades desarrollado, junto al estimador de error de sensibilidades propuesto, se ha establecido un procedimiento para el análisis de sensibilidades adaptado a la versión p del método de elementos finitos. La aplicación de este procedimiento ha sido probada en problemas bidimensionales de análisis elástico lineal estructural.

En la aplicación del método desarrollado para el cálculo de sensibilidades, a nivel de elementos, los resultados obtenidos en análisis consecutivos (no mostrados), presentaron grandes oscilaciones para algunos elementos de una misma malla, por lo tanto, se plantea extender el trabajo con la introducción de factores de corrección, o de indicadores de estimación del error a este nivel.

En cuanto a la velocidad de convergencia, se sugiere el estudio de su variación con respecto a la variable de diseño en problemas de sensibilidades de forma.

REFERENCIAS

- P.G. Ciarlet, *The Finite Element Methods for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, 1987.
- K.K. Choi and K.H. Chang, "A study of design velocity field computation for shape optimal design," *Finite Element in Analysis Design*, 15, 317-341, 1994.
- D.A. Dunavant, "High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle," *International Journal for Numerical Methods Engineering*, 21, 1129-1148, 1985.
- M.E.M. El-Sayed and K.W. Zumwalt, "Efficient design sensitivity derivatives for multi-load case structures as an integrated part of finite element analysis," *Computers and structures*, 40, 1461-1467, 1991.
- F.J. Fuenmayor, J.L. Oliver, and J.J. Ródenas, "Extension of the Zienkiewicz-Zhu Error Estimator to Shape Sensitivity Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 1413-1433, 1997.
- W. J. Gordon and C. A. Hall, "Construction of curvilinear coordinate systems and applications to mesh generation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7, 461-477, 1973.
- W. Gui and I. Babuska, "The h, p, and h-p Versions of the Finite Element Method in 1 Dimension. Part I. The Error Analysis of the p-Versión," *Numerische Mathematik*, 49, 577-612, 1986a.
- W. Gui and I. Babuska, "The h, p, and h-p Versions of the Finite Element Method in 1 Dimension. Part II. The Error Analysis of the h and h-p-Versión," *Numerische Mathematik*, 49, 613-657, 1986b.
- W. Gui and I. Babuska, "The h, p, and h-p Versions of the Finite Element Method in 1 Dimension. Part III. The Error Analysis of the h-p-Versión," *Numerische Mathematik*, 49, 659-683, 1986c.
- R.T Haftka and H.M. Adelman, "Recent developments in structural sensitivity analysis," *Structural Optimization*, 1, 1989.
- E. J. Haug, K. K. Choi, and V. Komkov, *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, INC, Orlando, Florida, 32887, 1986.
- Z. Mróz, "Variational approach to shape sensitivity analysis and optimal design (79-110)," *The Optimum Shape: Automated Structural Design*, Plenum Press, 1986.
- N. Olhoff and J. Rasmussen, "Study of inaccuracy in semi-analytical sensitivity analysis a model problem," *Structural Optimization*, 3, 203-213, 1991.
- N. Olhoff, J. Rasmussen, and Lund E., "A method of "exact" numerical differentiation for error

- elimination in finite-element-based-semi-analytical," *Mechanics of Structures and Machines*, 21, No. 1, 1-66, 1993.
- B.A. Szabo, Estimation and Control of Error Based on p convergence. Accuracy and Adaptive Refinements in Finite Elements Computations , 61-78. 1986. Great Britain, I. Babuska O.C. Zienkiewicz J. Gago E.R. de A. Oliveira. 1986.
- B.A. Szabo and I. Babuska, *Finite Element Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1991.
- S.H. Wang , Y. Sun, and R.H. Gallagher, "Sensitivity analysis in shape optimization of continuum structures," *Computers and Structures*, 33, 1089-1093, 1985.
- R. J. Yang and M. E. Botkin, "Comparison between the variational and implicit differentiation approaches to shape design sensitivities," *AIAA Journal*, 24, 1027-1032, 1986.
- O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *El Método de los Elementos Finitos. Vol. 1*, McGraw-Hill, Barcelona, España, 1994.