

## CUANTIFICACIÓN DE INCERTIDUMBRE EN UNA COLUMNA DE ILUMINACIÓN CON CARGAS AXIALES Y LATERALES

Claudia A. Egidi<sup>a</sup>, María D. Rey Saravia<sup>a</sup>, Marta B. Rosales<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, cegidi@uns.edu.ar, mdreysar@uns.edu.ar*

<sup>b</sup>*CONICET, Argentina, mrosales@criba.edu.ar*

**Palabras Clave:** Viento, cuantificación de incertidumbre, columna de alumbrado, sensibilidad estructural.

**Resumen:** En este trabajo, se estudia el problema estructural estático de una columna de iluminación de tres tramos sujeto a cargas gravitatorias y la acción lateral del viento. La torre que soporta una luminaria es modelada como una viga-columna bajo la acción de fuerzas y momentos concentrados, cargas axiales y laterales distribuidas representando las acciones del viento y el peso propio tanto respecto de la columna como de la luminaria. En una primera etapa, se deducen las ecuaciones diferenciales de coeficientes variables que, junto a las condiciones de borde, gobiernan el problema. Se incluye el efecto de segundo orden debido a las cargas axiales. La solución analítica expresada en series de potencia es verificada con un modelo de una torre similar resuelto con un software comercial de elementos finitos dando lugar a excelentes resultados. Una vez resuelto el problema determinístico, se utiliza la solución analítica para abordar la cuantificación de incertidumbre ante la hipótesis de que la velocidad de referencia del viento pueda ser una variable estocástica suponiendo que la torre pueda instalarse en una región dentro de la cual varía dicha velocidad. Se propone una función exponencial truncada para la distribución de probabilidad que surge de aplicar el Principio de Máxima Entropía con la información disponible de la variable aleatoria, i.e. un valor medio y un rango de valores. Las simulaciones se realizan utilizando el método de Monte Carlo. Se analizan desplazamientos en la cima de la columna y momentos en la base a través de herramientas estadísticas para valorar la sensibilidad estructural a las variaciones de la velocidad de referencia del viento.

## 1 INTRODUCCIÓN

La iluminación en la vía pública de un barrio o de una ciudad es fundamental para el cuidado y la seguridad de sus habitantes, brinda a los transeúntes y conductores una mejor visibilidad, y de esa manera logra reducir la cantidad de accidentes viales o hechos delictivos. Por otro lado, la iluminación artificial juega un papel importante en el desarrollo de las sociedades ya que permite realizar actividades nocturnas.

Con el paso del tiempo y de las necesidades del ser humano se han ido desarrollando y perfeccionando nuevas lámparas que proporcionen una mejor iluminación, cada vez más eficientes y ahorradoras de energía y que van montadas sobre estructuras que, en general, resultan muy esbeltas y sensibles a cargas ambientales como el viento.

Uno de los tipos estructurales de uso extendido es el poste construido en base a tramos de perfiles tubulares redondos de distintos diámetros que, al ser unidos mediante soldadura, configuran una estructura telescópica apta para sostener o dar apoyo a luminarias, con la opción de poner distintos accesorios como brazos, cruceta, ganchos, etc. (ver Figura 1).



Figura 1: Postes de sección variable por tramos

Un análisis dinámico de torres de iluminación fue incluido en un trabajo de Milford (1985). Por otro lado, Kwok *et al.* (1989) publica un estudio de factores de ráfaga para estos tipos estructurales. Mander *et al.* (1992), hicieron un reporte sobre el estado de postes de luminarias en el Rich Stadium de Orchard Park, New York en el cual se muestran los efectos de las cargas laterales de viento con descripción en dominio de frecuencias y temporal, con

modelos analíticos y mediciones experimentales. La repetición de fallas de torres de alumbrado de aluminio en el estado de Illinois (USA) motivó el trabajo de Caracoglia and Jones (2005). Combinaron estudios analíticos y numéricos de la estructura bajo la acción del viento. Observaron que, a pesar de la simplicidad de la estructura, la excitación externa es un desafío debido a sus incertidumbres. También realizaron evaluaciones experimentales. El estudio de fatiga inducida por cargas de viento es abordado por Phares *et al.* (2007) y Chang *et al.* (2009). Para tal efecto, utilizaron un modelo acoplado para considerar distintos efectos del viento (longitudinales, transversales, aeroelásticos). También se reportaron experimentos en túnel de viento. Tapia Hernández (2016) realizó un estudio analítico muy completo, de diferentes columnas delgadas de acero y su respuesta a las diferentes acciones dinámicas del viento, hasta el límite de cargas de servicio, utilizando los códigos del Distrito Federal de México. La construcción de curvas de fragilidad en postes de madera bajo carga de viento estocástica fue reportada por González de Paz *et al.* (2016). Un trabajo reciente de Repetto and Torrielli (2017) reporta un análisis de fatiga de estructuras esbeltas sujetas a la acción de viento con simulaciones a largo plazo.

En el presente trabajo, se aborda el estudio del comportamiento de una estructura metálica utilizada para el soporte de luminarias de uso en alumbrado público (autopistas, avenidas, aeropuertos, plazas, etc.) y estadios deportivos. Se construye un modelo de un poste telescópico de tres tramos con una parrilla de lámparas. La estructura está sujeta a cargas laterales de viento según reglamento sobre el poste y la parrilla y se considera el peso propio y el efecto de segundo orden. Se formulan las ecuaciones diferenciales gobernantes del problema dentro de la Resistencia de Materiales. Se comparan los resultados hallados con los que se obtienen con un modelo de elementos finitos unidimensional.

La velocidad básica de viento es un dato del reglamento. Sin embargo puede variar en la región de ubicación de la estructura. Por ello, y para evaluar la sensibilidad estructural a dicha variable, se realiza una propagación de incertidumbre. En efecto, en una segunda instancia del estudio y una vez verificado el modelo analítico, la velocidad básica del viento es considerada una variable estocástica. Se plantea el Principio de Máxima Entropía (PME) para obtener la Función de Densidad de Probabilidad (PDF) más representativa de acuerdo a la información disponible. Un estudio de convergencia permite determinar la cantidad necesaria de realizaciones para obtener resultados representativos. Se analiza la respuesta a la acción de cargas sobre el poste a través del desplazamiento en el extremo libre y del momento en el empotramiento.

## 2 PLANTEO DEL PROBLEMA

Se estudia un poste de acero F24 de sección variable, compuesto por tres tramos de perfiles tubulares redondos solicitado por cargas de viento y de peso propio. Además se consideran las cargas transmitidas por las luminarias y lámparas por medio de una carga de punta " $P_0$ " (peso propio luminarias), una carga horizontal " $H_0$ " (acción del viento sobre los artefactos de iluminación) y un momento " $M_0$ " (excentricidad de las cargas mencionadas respecto al eje del poste).

Se utiliza la teoría de segundo orden, es decir, el problema lineal de vigas considerando la influencia de las solicitaciones axiales en el valor del momento flector. Es un problema de Resistencia de Materiales con el cual es posible indirectamente calcular las cargas axiales críticas (Filipich, 1981), aunque no se hallan en este trabajo. En el presente estudio, su consideración permite tener en cuenta la disminución de la rigidez por carga axial.

## 2.1 Geometría y cargas

Para la determinación de las cargas de viento se utiliza el reglamento argentino CIRSOC 102 (CIRSOC-INTI, 2005). Se emplaza la estructura en la ciudad de Bahía Blanca, en un campo deportivo ubicado en zona suburbana, terreno llano y abierto, por lo cual se considera Exposición C y se la clasifica de acuerdo a la naturaleza de la ocupación como Categoría II.

Las presiones dinámicas de viento se computan mediante:

$$q_z = 0.613 \cdot K_z \cdot K_{zt} \cdot K_d \cdot V^2 \cdot I \quad (\text{N/m}^2) \quad (1)$$

Siendo

$V = 55$  m/s, velocidad básica de viento para la ciudad de Bahía Blanca.

$I = 1$ , factor de importancia para estructura Categoría II.

$K_{zt} = 1$ , factor topográfico terreno llano.

$K_d = 0.95$ , factor de direccionalidad del viento para el poste (chimeneas, tanques y estructuras similares).

$K_d = 0.85$ , factor de direccionalidad del viento para las luminarias (carteles abiertos y estructuras reticuladas).

$K_z$ : coeficiente de exposición de acuerdo a la altura  $z$  sobre el nivel del terreno. Para el poste se considera como altura  $z$  la del centro de masa del área proyectada normal al viento  $A_f$  de sus tramos y la presión dinámica de viento  $q_z$  se adopta constante a lo largo de toda la altura de cada uno de ellos. Para las luminarias, se tiene en cuenta que se colocan seis reflectores aptos para iluminación de estadios deportivos de aproximadamente 62 cm de ancho por 33 cm de alto cada uno y se ubica su centro de masa a 18.40 m de altura (ver Tabla 1).

ELEMENTO	$z$ (m)	$K_d$	$K_z$	$q_z (V)$	$q_z (55) (\text{N/m}^2)$	
LUMINARIA	18.40	0.85	1.138316	$0.593120 \cdot V^2$	1794.18	
POSTE	Tramo 1	15.00	0.95	1.090394	$0.634991 \cdot V^2$	1920.85
	Tramo 2	9.00	0.95	0.979216	$0.570247 \cdot V^2$	1725.00
	Tramo 3	5.00	0.95	0.865241	$0.503873 \cdot V^2$	1524.22

Tabla 1: Presiones dinámicas de viento  $q_z$

La fuerza de viento de diseño se determina mediante la siguiente expresión:

$$F = q_z \cdot G \cdot C_f \cdot A_f \quad (\text{N}) \quad (2)$$

$G = 1.10$ , factor de efecto de ráfaga para estructuras flexibles, valor recomendado para estructuras monopostes en el proyecto de reglamento argentino de antenas CIRSOC 306 (CIRSOC-INTI, 2014).

$C_f = 0.7$ , coeficiente de fuerza neta para el poste.

$C_f = 1.6$ , coeficiente de fuerza neta para los artefactos de iluminación.

$A_f$ : área proyectada normal al viento. Para el poste se adopta una carga lineal distribuida uniforme a lo largo de cada tramo, por lo que directamente se multiplica por el diámetro externo del perfil tubular. Para la luminaria, en cambio, se adopta  $A_f = 1.2 \text{ m}^2$  y se calcula la

carga total paralela a la dirección del viento aplicada en el centro de masa de la parrilla de reflectores.

Las presiones de viento de diseño sobre el poste y la fuerza neta de viento de diseño sobre las luminarias se indican en la Tabla 2.

POSTE	$q_z(V)$	$d_e$ (m)	$G \cdot C_f$	$q_i(V)$	$q_i(55)$ (N/m)
Tramo 1	$0.634991 \cdot V^2$	0.2730	0.77	$0.133481 \cdot V^2$	403.78
Tramo 2	$0.570247 \cdot V^2$	0.3238	0.77	$0.142177 \cdot V^2$	430.09
Tramo 3	$0.503873 \cdot V^2$	0.4064	0.77	$0.157676 \cdot V^2$	476.97
LUMINARIA	$q_z(V)$	$A_f$ (m <sup>2</sup> )	$G \cdot C_f$	$H_0(V)$	$H_0(55)$ (N)
	$0.593120 \cdot V^2$	1.2	1.76	$1.252669 \cdot V^2$	3789.32

Tabla 2: Presiones y fuerzas de viento de diseño

Las cargas debidas al peso propio del poste se obtienen multiplicando el área de la sección transversal de cada tramo por el peso específico del acero. Además, se estima el peso propio de los aparatos de iluminación y la estructura que los sostiene en 2000 N. En la Tabla 3 se indican el área  $A_i$ , momento de inercia  $J_i$  de cada tramo del poste y su peso propio.

POSTE	$d_e$ (m)	$d_i$ (m)	$A_i$ (m <sup>2</sup> )	$J_i$ (m <sup>4</sup> )	$p_i$ (N/m)
Tramo 1	0.2730	0.2476	0.010386	$8.81696 \cdot 10^{-5}$	799.50
Tramo 2	0.3238	0.2984	0.012412	$1.50413 \cdot 10^{-4}$	955.53
Tramo 3	0.4064	0.3810	0.015708	$3.04657 \cdot 10^{-4}$	1209.23

Tabla 3: Parámetros secciones transversales y peso propio de cada tramo

Las cargas transmitidas por las luminarias son:

$$P_0 = 2000 \text{ N};$$

$$H_0 = 3789.32 \text{ N (ver Tabla 2)}$$

Estas cargas provocan un momento en el extremo libre del poste:

$$M_0 = -0.4H_0 - 0.4 \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)P_0$$

$$M_0(V) = -0.4 \cdot 1.252669 \cdot V^2 - 0.4 \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot 2000 = -0.501067 \cdot V^2 - 214.35935 \quad (3)$$

En el caso del poste emplazado en la ciudad de Bahía Blanca:

$$M_0(55) = -1730.09 \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

La geometría del poste en estudio y las cargas que lo solicitan se muestran en la Figura 2.

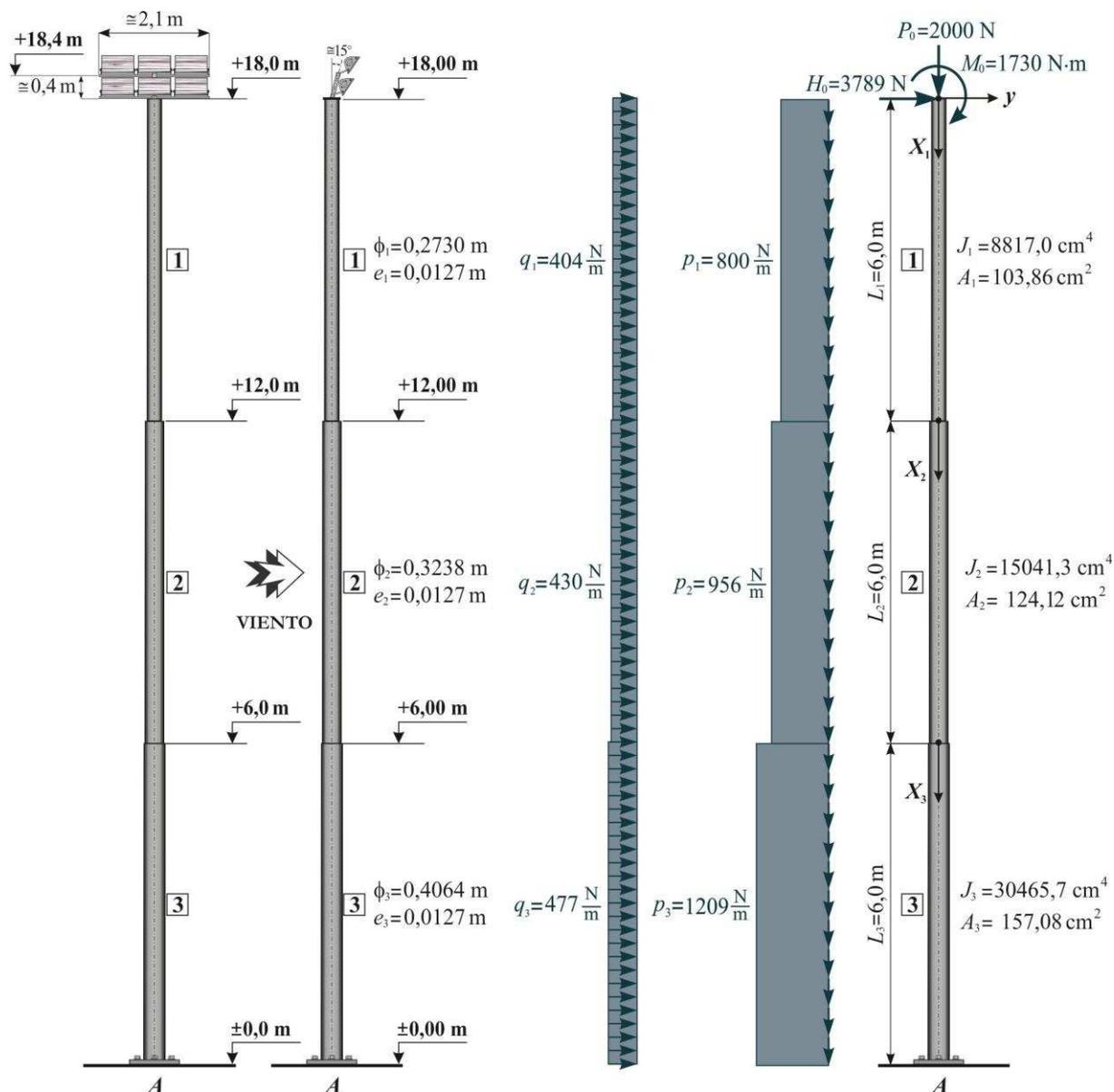


Figura 2: Geometría del poste y cargas actuantes

## 2.2 Ecuaciones gobernantes

Se acepta la validez del Teorema de Mínima Energía para problemas de equilibrio, según el cual la energía potencial total  $W$  para un estado equilibrado estable, debe ser un mínimo comparado con configuraciones muy próximas.

Se proponen las siguientes ecuaciones para las elásticas de deformación en la configuración de exploración:

$$\begin{aligned}
 \text{Tramo 1: } & \hat{v}_1(X_1); \quad 0 \leq X_1 \leq L_1; \quad N_1(X_1) = P_0 + p_1 \cdot X_1 \\
 \text{Tramo 2: } & \hat{v}_2(X_2); \quad 0 \leq X_2 \leq L_2; \quad N_2(X_2) = P_0 + p_1 \cdot L_1 + p_2 \cdot X_2 \\
 \text{Tramo 3: } & \hat{v}_3(X_3); \quad 0 \leq X_3 \leq L_3; \quad N_3(X_3) = P_0 + p_1 \cdot L_1 + p_2 \cdot L_2 + p_3 \cdot X_3
 \end{aligned} \quad (4)$$

Se recuerda que las cargas de viento  $q_i$  y las de peso propio del poste  $p_i$  en el caso que nos ocupa son constantes en cada uno de los tramos. La energía total  $W$  del poste de tres tramos

analizado es:

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{1}{2} \int_0^{L_1} E_1 J_1 [\hat{v}_1''(X_1)]^2 dX_1 - \frac{1}{2} \int_0^{L_1} N_1(X_1) [\hat{v}_1'(X_1)]^2 dX_1 + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} E_2 J_2 [\hat{v}_2''(X_2)]^2 dX_2 - \frac{1}{2} \int_0^{L_2} N_2(X_2) [\hat{v}_2'(X_2)]^2 dX_2 + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{L_3} E_3 J_3 [\hat{v}_3''(X_3)]^2 dX_3 - \frac{1}{2} \int_0^{L_3} N_3(X_3) [\hat{v}_3'(X_3)]^2 dX_3 - \\
 & - \int_0^{L_1} q_1 \hat{v}_1(X_1) dX_1 - \int_0^{L_2} q_2 \hat{v}_2(X_2) dX_2 - \int_0^{L_3} q_3 \hat{v}_3(X_3) dX_3 - H_0 \hat{v}_1(0) - M_0 \hat{v}_1'(0)
 \end{aligned} \quad (5)$$

Una vez planteada la nulidad de la variación primera de la energía total  $W$  y realizadas las integraciones por partes y otras operaciones algebraicas, se obtienen las ecuaciones diferenciales gobernantes

$$E_1 J_1 \hat{v}_1''''(X_1) + (P_0 + p_1 X_1) \hat{v}_1''(X_1) + p_1 \hat{v}_1'(X_1) - q_1 = 0 \quad (a)$$

$$E_2 J_2 \hat{v}_2''''(X_2) + (P_0 + p_1 L_1 + p_2 X_2) \hat{v}_2''(X_2) + p_2 \hat{v}_2'(X_2) - q_2 = 0 \quad (b) \quad (6)$$

$$E_3 J_3 \hat{v}_3''''(X_3) + (P_0 + p_1 L_1 + p_2 L_2 + p_3 X_3) \hat{v}_3''(X_3) + p_3 \hat{v}_3'(X_3) - q_3 = 0 \quad (c)$$

Si se introducen las coordenadas adimensionales  $x_i = X_i/L_i$ ;  $0 \leq x_i \leq 1$ , la expresión de la elástica de deformación en cada tramo resulta  $\hat{v}_i(X_i) = \hat{v}_i(x_i L_i) = v_i(x_i)$

Se definen los siguientes parámetros

$$k_i^2 = \frac{P_0 L_i^2}{E_i J_i} \quad (a) ; \quad \beta_i = \frac{p_i L_i^3}{E_i J_i} \quad (b) ; \quad q_i^* = \frac{q_i L_i^4}{E_i J_i} \quad (c) \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

$$\alpha_1 = k_1^2 \quad (a) ; \quad \alpha_2 = k_2^2 + \frac{L_2^2}{E_2 J_2} p_1 L_1 \quad (b) ; \quad \alpha_3 = k_3^2 + \frac{L_3^2}{E_3 J_3} (p_1 L_1 + p_2 L_2) \quad (c) \quad (8)$$

Las ecuaciones diferenciales se escriben en forma adimensional como:

$$v_i''''(x_i) + (\alpha_i + \beta_i x_i) \hat{v}_i''(x_i) + \beta_i \hat{v}_i'(x_i) = q_i^* \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (9)$$

### 2.3 Condiciones de borde

En el extremo empotrado  $x_3 = 1$  se tienen dos condiciones de borde geométricas

$$\begin{aligned}
 v_3(1) &= 0 \\
 v_3'(1) &= 0
 \end{aligned} \quad (10)$$

En los puntos de unión de los tramos del poste  $x_1 = 1$  y  $x_2 = 0$ ,  $x_2 = 1$  y  $x_3 = 0$  se tienen otras cuatro condiciones geométricas por continuidad (dos de desplazamientos y dos de giros)

$$\begin{aligned}
v_1(1) - v_2(0) &= 0 \\
L_2 v_1'(1) - L_1 v_2'(0) &= 0 \\
v_2(1) - v_3(0) &= 0 \\
L_3 v_2'(1) - L_2 v_3'(0) &= 0
\end{aligned} \tag{11}$$

El planteo de las restantes condiciones de borde surge de manera automática del planteo energético resultando en seis condiciones naturales

$$\begin{aligned}
v_1'''(0) + \alpha_1 v_1'(0) - \frac{H_0 L_1^3}{E_1 J_1} &= 0 \\
v_1''(0) + \frac{M_0 L_1^2}{E_1 J_1} &= 0 \\
E_1 J_1 L_2^3 v_1'''(1) - E_2 J_2 L_1^3 v_2'''(0) &= 0 \\
E_1 J_1 L_2^2 v_1''(1) - E_2 J_2 L_1^2 v_2''(0) &= 0 \\
E_2 J_2 L_3^3 v_2'''(1) - E_3 J_3 L_2^3 v_3'''(0) &= 0 \\
E_2 J_2 L_3^2 v_2''(1) - E_3 J_3 L_2^2 v_3''(0) &= 0
\end{aligned} \tag{12}$$

### 3 RESOLUCIÓN ANALÍTICA DEL PROBLEMA DETERMINÍSTICO

Dado que se realizará un estudio de incertidumbre en el cual se considera la velocidad básica de viento  $V$  como variable aleatoria, se resuelven las ecuaciones diferenciales dejando a  $V$  como una constante. Las soluciones de las tres ecuaciones diferenciales ordinarias de cuarto orden se obtienen con el programa de álgebra simbólica Maple 17 (Maplesoft, 2017). Se expresa la solución en forma de series. Luego de un estudio de convergencia, se encontró que diez términos son suficientes.

#### 3.1 Datos

El poste es de acero F24 con módulo de elasticidad  $E = 2.0593965 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>. Los datos geométricos necesarios se indican en la Tabla 4.

POSTE	$L_i$ (m)	$J_i$ (m <sup>4</sup> )
Tramo 1	6.00	$8.81696 \cdot 10^{-5}$
Tramo 2	6.00	$1.50413 \cdot 10^{-4}$
Tramo 3	6.00	$3.04657 \cdot 10^{-4}$

Tabla 4: Longitud y momento de segundo orden de cada tramo

En la Tabla 5 se indican las cargas uniformemente distribuidas por tramo.

POSTE	$q_i^*$ (V)	$p_i$ (N/m)
Tramo 1	$9.5272 \cdot 10^{-6} V^2$	799.50
Tramo 2	$5.9485 \cdot 10^{-6} V^2$	955.53
Tramo 3	$3.2570 \cdot 10^{-6} V^2$	1209.23

Tabla 5: Cargas uniformemente distribuidas por tramo

Las cargas aplicadas en el extremo libre son:

$$P_0 = 2000 \text{ N}$$

$$H_0(V) = 1.252669 \cdot V^2 \text{ (Tabla 2)}$$

$$M_0(V) = -0.501067 \cdot V^2 - 214.35935 \text{ (Ec. (3))}$$

Se muestran los valores obtenidos para las constantes  $\beta_i$  (Ec.(7b)) y  $\alpha_i$  (Ec. (8a), (8b) y (8c)).

POSTE	$\alpha_i$	$\beta_i$
Tramo 1	$3.96528 \cdot 10^{-3}$	$9.51072 \cdot 10^{-3}$
Tramo 2	$7.89938 \cdot 10^{-3}$	$6.66302 \cdot 10^{-3}$
Tramo 3	$7.18965 \cdot 10^{-3}$	$4.16305 \cdot 10^{-3}$

Tabla 6: Valores de las constantes  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  de cada tramo.

Como ya se mencionó, para el modelo determinístico, se emplaza el poste en un campo deportivo ubicado en la zona suburbana de la ciudad de Bahía Blanca siendo en este caso la velocidad básica de viento  $V = 55 \text{ m/s}$ .

### 3.2 Planteo de ecuaciones diferenciales y su solución

Se reemplazan las constantes de la Tabla 6 y las cargas de viento adimensionales de Tabla 5 en la Ec. (9) y se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales de la elástica de deformación de cada uno de los tramos del poste:

$$v_1'''' + (3.96528 \cdot 10^{-3} + 9.51072 \cdot 10^{-3} x_1) v_1'' + 9.51072 \cdot 10^{-3} v_1' = 9.5272 \cdot 10^{-6} V^2 \quad (a)$$

$$v_2'''' + (7.89938 \cdot 10^{-3} + 6.66302 \cdot 10^{-3} x_2) v_2'' + 6.66302 \cdot 10^{-3} v_2' = 5.9485 \cdot 10^{-6} V^2 \quad (b) \quad (13)$$

$$v_3'''' + (7.18965 \cdot 10^{-3} + 4.16305 \cdot 10^{-3} x_3) v_3'' + 4.16305 \cdot 10^{-3} v_3' = 3.2570 \cdot 10^{-6} V^2 \quad (c)$$

Cada una de estas ecuaciones diferenciales de cuarto orden arroja cuatro constantes:

$$v_i(0); v_i'(0); v_i''(0); v_i'''(0) \quad i = 1, 2, 3. \quad (14)$$

Se resuelve el sistema de doce ecuaciones dado por las condiciones de borde (Ec. (10) a Ec. (12)) en las doce constantes de Ec. (14) y se obtiene una solución polinómica para cada una de las elásticas de deformación. Estas expresiones no se exponen en el presente trabajo por resultar excesivamente largas, directamente se transcriben las que corresponden a las magnitudes que nos interesan, que son el desplazamiento en el extremo libre y el momento de empotramiento (de segundo orden).

Las ecuaciones constitutivas del momento flector y del esfuerzo de corte en función de la elástica de deformación en coordenadas adimensionales  $v_i(x_i)$  son:

$$M_i(x_i) = \frac{E_i J_i}{L_i^2} v_i''(x_i) \quad (a)$$

$$Q_i(x_i) = \frac{E_i J_i}{L_i^3} v_i'''(x_i) \quad (b) \quad (15)$$

El desplazamiento  $\delta$  en el extremo libre y el momento de empotramiento  $M_A$ , en función de la velocidad básica de viento son

$$\delta(V) = v_1(0) \cong 9.128027 \cdot 10^{-5} V^2 + 9.096217 \cdot 10^{-4} \quad (a) \quad (16)$$

$$M_A(V) = M_3(1) \cong 46.25470873 \cdot V^2 + 220.0661788 \quad (b)$$

En el caso determinístico del poste construido en la ciudad de Bahía Blanca ( $V = 55$  m/s) los resultados obtenidos de la formulación analítica son:

$$\delta(55) = 0.277032 \text{ m} \cong 27.7 \text{ cm} \quad (a) \quad (17)$$

$$M_A(55) = 140140.5601 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (b)$$

#### 4 MÉTODO COMPUTACIONAL DE ELEMENTOS FINITOS

Se simula el comportamiento de la torre de iluminación de acero con un método de elementos finitos que permite graficar geoméricamente la torre y realizar los estudios con un tiempo computacional reducido.

Como elemento estructural de la torre se utiliza un elemento viga en el plano  $x$ - $y$  de diferentes secciones, momentos de inercia y diámetros y se establece como condición de vínculo externa empotrada en un extremo, se tiene en cuenta su peso propio, las cargas distribuidas debido al viento y la fuerza excéntrica con su momento resultante.

La malla es de borde distribuida.

Se realizan cálculos lineales y no lineales estáticos. Los resultados obtenidos se utilizan para verificar el planteo analítico de la sección anterior.

#### 5 ANALISIS COMPARATIVO

Se puede observar, en la Tabla 7, que los resultados de la flecha máxima y del momento máximo hallados con el método analítico teniendo en cuenta solamente las ecuaciones de primer orden son exactamente iguales a los hallados con el método computacional. Si comparamos el método analítico determinístico, teniendo en cuenta los efectos del segundo orden con el método computacional de elementos finitos no lineal, el error relativo entre los dos es casi despreciable, demostrando que los resultados obtenidos con ambos métodos tienen una buena aproximación. Se observa que el desplazamiento  $\delta$  y el momento  $M_A$  calculados con la teoría de segundo orden y el método no lineal exceden a los valores obtenidos con la teoría de primer orden 1.85% y 1.49% respectivamente.

TEORIA	PRIMER ORDEN		SEGUNDO ORDEN	NO LINEAL
MÉTODO	ANALÍTICO	COMPUTACIONAL	ANALÍTICO	COMPUTACIONAL
$\delta$ (cm)	27.1978774	27.1978774	27.7032434	27.7027055
$M_A$ (N·m)	138088.339	138088.339	140140.560	140119.416

Tabla 7: Resultados comparativos del método analítico y el computacional.

#### 6 RESOLUCIÓN PROBLEMA ESTOCÁSTICO.

En esta sección se plantea el problema estocástico que consiste en asumir que la velocidad básica de viento es aleatoria, suponiendo que la misma varía en una región cercana a la ciudad de Bahía Blanca. La variable estocástica correspondiente a la velocidad se designa  $V$ .

Utilizamos el Principio de Máxima Entropía (PME) (Shannon, 1948) para construir la Función de Densidad de Probabilidad (PDF) asociada a  $\mathcal{V}$ . Según este principio, la distribución de probabilidad óptima atribuible a un sistema estadístico es aquella en la que la entropía es máxima, es decir aquella en la que la desinformación es máxima y consiste en "maximizar la entropía (o incertidumbre) sujeta a las restricciones impuestas por la información disponible" (Sampaio y Lima, 2012).

Si  $\mathcal{V}$  es la variable aleatoria de dominio  $\mathcal{D}$  y  $f(\mathcal{V})$  es la función de distribución de probabilidades (PDF) asociada a  $\mathcal{V}$ , la entropía de  $f(\mathcal{V})$  viene dada por

$$S(f(\mathcal{V})) = - \int_{\mathcal{D}} f(\mathcal{V}) \ln(f(\mathcal{V})) d\mathcal{V} \quad (18)$$

Siendo  $f(\mathcal{V})$  una función de densidad de probabilidades deberá cumplir con:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} f(\mathcal{V}) d\mathcal{V} &= 1 \quad \forall \mathcal{V} \in \mathcal{D} \\ E[\mathcal{V}] &= \mu_{\mathcal{V}} > 0 \\ \mathcal{D} &: a \leq \mathcal{V} \leq b \end{aligned} \quad (19)$$

En base a la distribución exponencial de media  $\mu_{\mathcal{V}} = 55$  m/s, se asume un rango de variación de la variable estocástica  $45 \text{ m/s} \leq \mathcal{V} \leq 65 \text{ m/s}$  y se deduce una función exponencial truncada para la distribución de probabilidad de la variable aleatoria  $\mathcal{V}$ . Su PDF está dada por

$$f(\mathcal{V}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{V} < 45 \text{ m/s} \\ \frac{1}{55} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{55}\mathcal{V}}}{-e^{-\frac{13}{11}} + e^{-\frac{9}{11}}} & \text{si } 45 \text{ m/s} \leq \mathcal{V} \leq 65 \text{ m/s} \\ 0 & \text{si } \mathcal{V} > 65 \text{ m/s} \end{cases} \quad (20)$$

Las expresiones del desplazamiento lateral  $\delta$  y del momento de empotramiento  $M_A$  en función de la variable estocástica  $\mathcal{V}$  son

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{V}) &= 9.128027 \cdot 10^{-5} \mathcal{V}^2 + 9.096217 \cdot 10^{-4} \quad (a) \\ M_A(\mathcal{V}) &= 46.25470873 \cdot \mathcal{V}^2 + 220.0661788 \quad (b) \end{aligned} \quad (21)$$

Se realiza un análisis de convergencia con el objeto de asegurar que los resultados sean representativos. Para ello se varía el número de realizaciones de la variable aleatoria hasta lograr que la estadística de la respuesta permanezca dentro de un margen de error previamente definido como aceptable. Se utiliza el Método de Monte Carlo, basado en dos teoremas muy importantes, el Teorema de Los Grandes Números y el Teorema del Límite Central.

Para la aplicación del método de Monte Carlo se generan muestras al azar de la variable aleatoria  $\mathcal{V}$  utilizando la función de distribución de probabilidades definida (Ec. (20)). Se evalúan los desvíos estándar  $\sigma_{\delta}$  y  $\sigma_{M_A}$  de 300 muestras variando la cantidad de valores de velocidades desde  $n=20$  hasta  $n=6000$ , con un incremento de 20 valores cada vez.

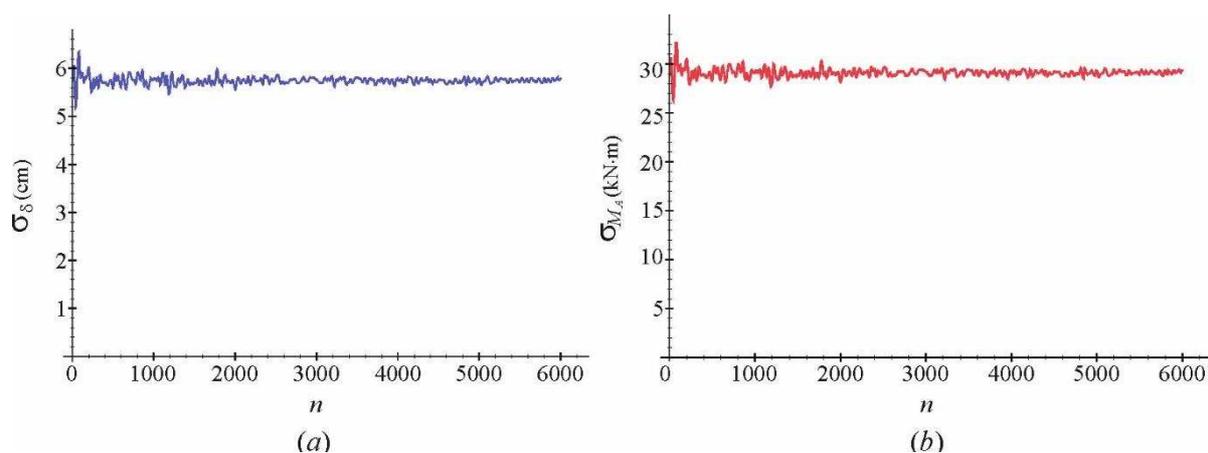


Figura 3: Estudio de convergencia: gráfico de número de realizaciones *vs* desvío estándar  
 (a) Desplazamiento lateral  $\delta$  en el extremo libre; (b) Momento  $M_A$  en el empotramiento

En base a la Figura 3 se adopta  $n=4000$  como cantidad de realizaciones para la convergencia. En la Figura 4 se indica el histograma de frecuencias de una muestra aleatoria de la variable estocástica  $V$  y la curva de densidad de probabilidad estimada (PDF).

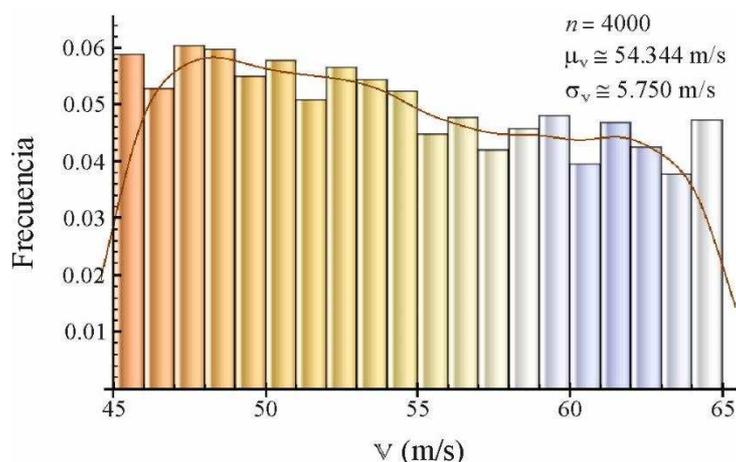


Figura 4: Histograma y PDF de velocidades  $V$

Con los valores de la variable aleatoria  $V$  se obtienen muestras del desplazamiento lateral  $\delta$  en el extremo libre y del momento de empotramiento  $M_A$  (Ec.(21)). Se realizan los histogramas y las curvas PDF de cada una de ellas (ver Figuras 5 y 6).

Se observa que ambas PDF ( $\delta$  y  $M_A$ ) tienen una forma similar a la PDF de la variable aleatoria  $V$  de salida, todas tienen sesgo positivo (el valor promedio es mayor que la mediana) pero en las variables de respuesta está levemente pronunciado, más en la del momento.

En la Figura 7 se hace un análisis de los desplazamientos admisibles. El valor del Límite 1 es igual a 1.5% de la altura total de la columna (CIRSOC-INTI, 2014) y el del Límite 2 es 2% (Pinós Calvet, 2001).

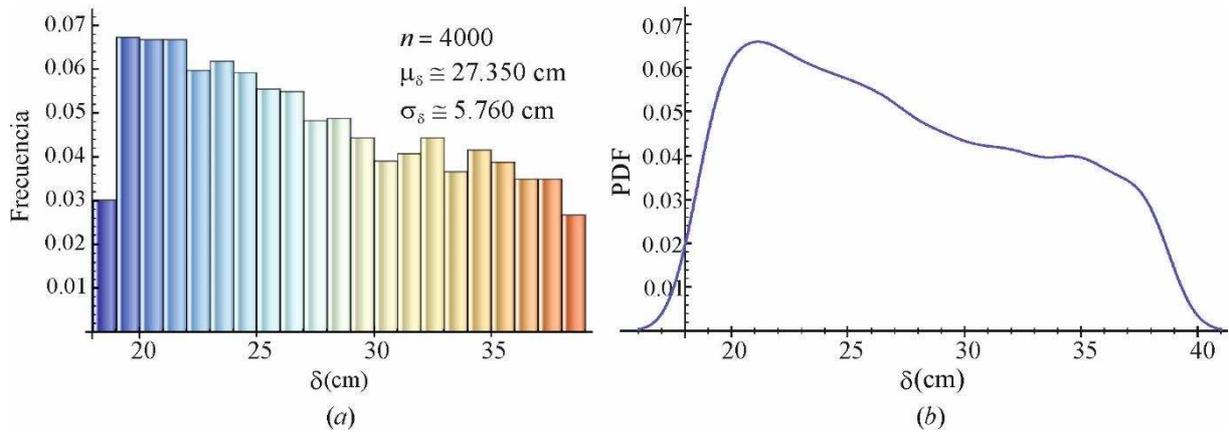


Figura 5: Respuesta desplazamiento  $\delta$ : (a) Histograma de frecuencias; (b) Curva PDF

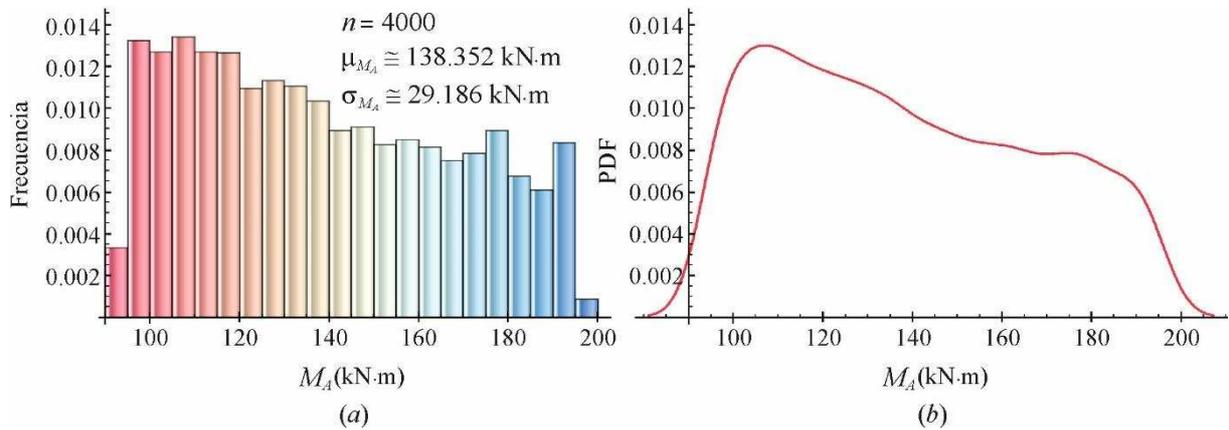


Figura 6: Respuesta momento  $M_A$ : (a) Histograma de frecuencias; (b) Curva PDF

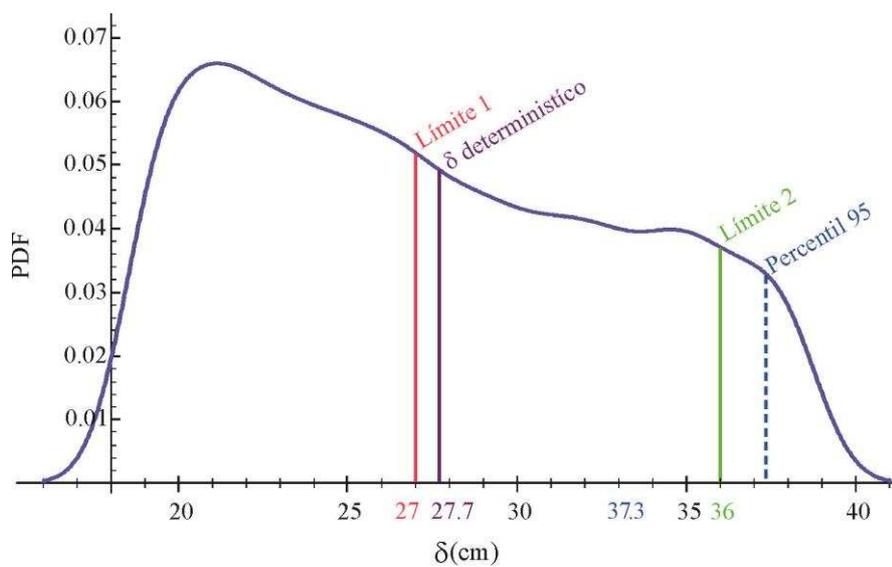


Figura 5: Estudio desplazamiento  $\delta$  admisible

## 7 CONCLUSIONES

- Los resultados comparativos del método estático analítico teniendo en cuenta solo las ecuaciones de primer orden con el método computacional, tanto la flecha máxima como el del momento máximo, son exactamente iguales.
- Si comparamos el método analítico determinístico, teniendo en cuenta los efectos de segundo orden con el método computacional de elementos finitos no lineal, el error relativo entre los dos, tanto para la flecha máxima como para el momento máximo, es casi despreciable, verificando las ecuaciones del método analítico.
- Se observa que tanto el desplazamiento máximo y el momento máximo calculado por la teoría de segundo orden y el método no lineal son levemente superiores al método estático de primer orden. Por razones de seguridad estos métodos reflejan mejor la respuesta estructural.
- Se hace notar que si se adopta como criterio de diseño en estados límites de servicio un valor de desplazamiento máximo admisible establecido por el Límite 1 el poste analizado en el problema determinístico es apenas aceptable debido a que el valor de  $\delta$  obtenido por la teoría de segundo orden o la no lineal es levemente superior, en cambio si se adopta el Límite 2 el poste verifica cómodamente ese valor. Sin embargo, si se tiene en cuenta como criterio de diseño el estudio estocástico se puede observar que si la velocidad básica de diseño varía entre 45 m/s y 65 m/s la posibilidad de superar ambos límites es amplia (ver Figura 7).

## 8 AGRADECIMIENTOS

Se agradece especialmente al Dr. Ing. Carlos P. Filipich por brindar con generosidad su tiempo y conocimiento, dando una herramienta fundamental para la ejecución del presente trabajo.

## REFERENCIAS

- Caracoglia, and L., Jones, N.F. Observations on wind-induced failures of highway light poles. *10th Americas Conference on Wind Engineering, ACWE 2005*, 12 p. 2005.
- Chang, B., Phares, B.M., Sarkar, P.P., Wipf, T.J., Development of a procedure for fatigue design of slender support structures subjected to wind-induced vibration, *Journal of the Transportation Research Board*, 2131: 23–33, 2009.
- CIRSOC-INTI, Proyecto de Reglamento CIRSOC 306. Reglamento Argentino de Estructuras de Acero para Antenas, INTI, Buenos Aires, Argentina, 2014.
- CIRSOC-INTI, Reglamento CIRSOC 102. Acción del Viento sobre las Construcciones, INTI, Buenos Aires, Argentina, 2005.
- Filipich, C.P., Inestabilidad del Equilibrio. Notas del curso N°813. Secretaría Argentina para el Centro Internacional de Ciencias Mecánicas (CISM)(INTI) Buenos Aires, Argentina, 1981
- González de Paz, L.V., García D.A., and Rosales M.B., Fragility curves of wood utility poles under stochastic wind load with material uncertain properties. *Mecánica Computacional*, XXXIV: 151–161, 2016.
- Kwok, K. C. S., Hancock, G.J., and Bailey, P. A., Dynamics of a free standing steel lighting tower, *Engineering Structures*, 7: 46-50, 1985.
- Mander, J.B., Chen, S.S., Shah, K.M. and Madan, A., Investigation of Light Pole Base Integrity, Technical Report submitted to Erie County Department of Public Works, State

- University of New York (SUNY) at Buffalo, Buffalo, NY, USA. 1992.
- Maplesoft. *Maple 17*. A division of Waterloo Maple Inc. (Waterloo Ontario), Canada, 2017.
- Milford, R. V., Gust loading factors for lighting masts, *Engineering Structures*, 11: 62-67, 1989.
- Phares, B.M., Sarkar, P.P., T. J. Wipf, T.J. and Chang, B. Development of Fatigue Design Procedures for Slender, Tapered Support Structures for Highway Signs, Luminaires, and Traffic Signals Subjected to Wind-Induced Excitation from Vortex Shedding and Buffeting. Final Report. *Midwest Transportation Consortium, Ames, Iowa*, 2007.
- Repetto, M.P., and Torrielli A., Long term simulation of wind-induced fatigue loadings, *Engineering Structures*, 132: 551–561, 2017.
- Sampaio R. y Lima R. Modelagem Estocástica e geração de amostras de variáveis e vetores aleatórios. SBMAC, 2012.
- Shannon C. A mathematical theory of communication. *Bell System Tech J*, 27:397–423 and 623–659, 1948.
- Tapia-Hernandez, E., Tubular Steel poles under lateral load patterns. *Advanced Steel Construction*, 12: 428-445, 2016.
- Verein, D.E., *El Acero en la Construcción*, Reverté, 1972.