

## **ANÁLISIS DE LA INFLUENCIA DE LA FRECUENCIA CARDÍACA SOBRE EL FLUJO EN ARTERIAS CON ESTENOSIS**

**Sebastián Ubal, Cristóbal Fresno Rodríguez, Anibal Bregains, Marcelo Berli, Diego Campana y José Di Paolo**

*Grupo Biomecánica Computacional, Universidad Nacional de Entre Ríos, Ruta Prov. No. 11 KM 10,  
3101 Oro Verde, Entre Ríos, Argentina, [jdipaolo@bioingenieria.edu.ar](mailto:jdipaolo@bioingenieria.edu.ar)*

**Palabras clave:** flujo sanguíneo, esfuerzo de corte, frecuencia cardíaca.

**Resumen.** Numerosas observaciones clínicas indican que la fluidodinámica juega un papel importante en el desarrollo y evolución de las placas de ateroma, las cuales aparecen en una patología muy común denominada aterosclerosis. Flujos lentos y/o con bajas tasas de deformación podrían fomentar la adhesión de células a la pared vascular e influir en la transferencia de sustancias a la misma. Por otro lado, el endotelio de las arterias podría verse dañado en los sitios donde el torrente sanguíneo produce grandes esfuerzos cortantes.

Las condiciones de flujo están caracterizadas por los números de Reynolds y Womersley. Este último relaciona las fuerzas inerciales pulsátiles con las viscosas. La frecuencia cardíaca, y por ende, el parámetro de Womersley, puede variar entre unas 70 y 200 pulsaciones por minuto, dependiendo de las condiciones de ejercicio. Con el objetivo de estudiar la influencia de la frecuencia cardíaca sobre la estenosis, en este trabajo se analiza como afecta de la frecuencia de un pulso de flujo senoidal a los esfuerzos de corte en un tramo arterial estenosado. Para ello, se resuelven las ecuaciones axisimétricas de Navier-Stokes y continuidad, con condiciones iniciales y de borde apropiadas, utilizando una técnica basada en el método de Galerkin/elementos finitos. El dominio, no deformable, se divide en una malla estructurada de cuadriláteros y se utiliza una formulación mixta velocidad-presión, con elementos bicuadráticos-bilineales de Lagrange.

Los resultados obtenidos muestran que, en el rango de parámetros estudiados, la frecuencia del pulso de caudal tiene una moderada influencia sobre el tamaño y la duración de los vórtices que se producen aguas debajo de la estenosis, como así también sobre los esfuerzos cortantes ejercidos sobre la pared.

## 1 INTRODUCCIÓN

Una de las principales patologías que presenta el sistema circulatorio y principal causa de decesos en los países desarrollados lo constituye la aterosclerosis. Esta patología consiste en una degeneración de la pared vascular que se produce en arterias de calibre mediano y grande, fundamentalmente en el territorio sistémico. Compromete así a las arterias coronarias, renales, carótidas, vertebrales, intracraneales, ilíacas, de los miembros inferiores, aorta y sus ramas abdominales. Las placas de ateroma consisten en masas que protruyen hacia la luz vascular y que originan estenosis de diferente grado, con aumento consecuente de la resistencia al flujo sanguíneo

Numerosas observaciones clínicas indican que la fluidodinámica juega un papel importante en el desarrollo y evolución de esta patología (Nerem y Cornhill, 1980). Flujos lentos y/o con bajas tasas de deformación podrían fomentar la adhesión de monocitos a la pared vascular e influir en la transferencia de sustancias a la misma (Das, Johnson y Popel, 2000). Por otro lado, experiencias in-vitro indican que la función y estructura celulares del endotelio son afectados por las fuerzas cortantes que el flujo sanguíneo le ejerce (Sato, Kataoka y Ohshima, 1996; Kamiya y Ando, 1996), llegando incluso a dañarlo en el caso que los esfuerzos sean lo suficientemente intensos (Fry, 1968). La comparación de observaciones clínicas con estudios in vitro y con simulaciones numéricas ha permitido establecer una fuerte correlación entre los sitios de localización preferencial de la lesión y los lugares donde el flujo produce esfuerzos de corte bajos y oscilatorios (Ku, 1997).

Las condiciones de flujo están caracterizadas por los números de Reynolds y Womersley. Este último relaciona las fuerzas inerciales pulsátiles con las viscosas. La frecuencia cardíaca —y por ende, el parámetro de Womersley— puede variar entre unas 70 y 180 pulsaciones por minuto, dependiendo de las condiciones de ejercicio.

Puesto que los sitios de lesión aterosclerótica están fuertemente relacionados con un carácter oscilatorio del esfuerzo cortante, el efecto de la frecuencia cardíaca sobre esta variable amerita ser estudiado. Por ello, el objetivo de este trabajo es analizar la influencia de la frecuencia de un pulso de caudal senoidal sobre el patrón de flujo en un tramo de un conducto que presenta una estenosis. Para ello, se resuelven las ecuaciones axisimétricas de Navier-Stokes y continuidad, con condiciones iniciales y de borde apropiadas, utilizando una técnica basada en el método de Galerkin/elementos finitos. El dominio, no deformable, se divide en una malla estructurada de cuadriláteros. Se utiliza una formulación mixta velocidad-presión, con elementos bicuadráticos-bilineales de Lagrange.

Los resultados obtenidos permiten analizar la extensión y duración de los vórtices que se originan en la estenosis, como así también la distribución de esfuerzos cortantes sobre la pared del conducto. De esta manera, se han identificado las regiones donde se observan preferencialmente altos o bajos esfuerzos de corte, los que han sido caracterizados mediante un análisis frecuencial de sus componentes armónicas.

## 2 FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA

El flujo sanguíneo arterial es eminentemente pulsátil. Las ondas de presión y caudal varían en un grado elevado, dependiendo de la ubicación dentro del complejo árbol circulatorio. En este trabajo se pretenden analizar los efectos generales que posee la variación de la frecuencia cardíaca sobre algunas variables fluidodinámicas, principalmente el esfuerzo de corte que el fluido ejerce sobre la pared de un vaso que presenta una estenosis. Las condiciones de flujo y características geométricas poseen una enorme diversidad, de acuerdo a la porción del árbol circulatorio estudiado, e incluso entre distintos individuos para un mismo vaso sanguíneo. Por

ello, se ha descartado la elección de parámetros específicos de una arteria particular: la configuración geométrica del dominio, el pulso de caudal utilizado y los valores asignados a los números adimensionales son genéricos, aunque éstos últimos son característicos de arterias de calibre pequeño y mediano.

Por lo tanto, en este trabajo se analiza el flujo no-estacionario axisimétrico de un líquido Newtoniano e incompresible en un tramo de un conducto cilíndrico recto, con una estenosis en su porción central. Las ecuaciones gobernantes son Navier-Stokes y continuidad, que en su forma adimensional pueden escribirse como

$$\begin{aligned} Wo \frac{\partial v_r}{\partial t} + Re \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \\ Wo \frac{\partial v_z}{\partial t} + Re \left( v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

donde  $Re = \rho VR/\mu$  es el número de Reynolds y  $Wo = \rho \omega R^2/\mu$  es el número de Womersley. En estas expresiones  $\rho$  y  $\mu$  son la densidad y viscosidad del líquido,  $R$  es el radio del tubo en una región sin obstruir, mientras que  $\omega$  y  $V$  son, respectivamente, la frecuencia angular y velocidad media máxima del caudal circulante, cuya expresión adimensional es la siguiente:

$$Q = \text{sen}(t), \quad (3)$$

si el mismo es medido en unidades de  $V/\pi R^2$ . Las escalas características empleadas en las ecs. (1)-(3) son:  $V$  para las velocidades,  $R$  para las longitudes,  $1/\omega$  para el tiempo y  $\mu V/R$  para las tensiones.

La Fig. 1 muestra un esquema del dominio del problema en la región cercana a la estenosis. Como puede observarse, la misma tiene forma sinusoidal, y en el punto de constricción máxima ( $z = 46$ ) el radio del conducto es  $r_{EST}$ . La estenosis está caracterizada por su longitud adimensional  $L_{EST}$  y el grado de obstrucción en porcentaje de la sección transversal original,  $G = (1 - r_{EST}^2) \times 100\%$ .

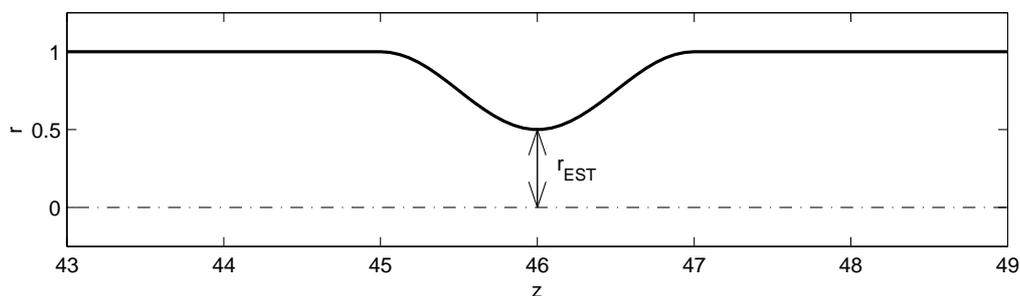


Figura 1: Esquema del dominio del problema en su región central, donde está presente la estenosis. La sección de entrada se ubica en  $z = 0$  y la de salida en  $z = 92$ .

Las condiciones de contorno utilizadas son  $v_r = \partial v_z / \partial r = 0$  sobre la línea de simetría ( $r = 0$ ),  $v_r = v_z = 0$  en la pared ( $r = 1$ ),  $\partial v_r / \partial z = \partial v_z / \partial z = 0$  en la sección de salida ( $z = 92$ ), y  $v_z = U(r, t)$  en la sección de entrada ( $z = 0$ ). Estos últimos son los perfiles de velocidad correspondientes a un caudal sinusoidal como el de la ec. (3) en un tubo sin estenosis, y que fueran calculados por

Womersley (1955). Se adopta como presión de referencia ( $p = 0$ ) a la existente en la sección de salida ( $z = 92$ ).

Las simulaciones se inician con el fluido en reposo como condición inicial. Se extienden en el intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq 3\pi$ , equivalente a tres semiciclos del pulso de caudal. Sin embargo, a fin de descartar los efectos transitorios generados por la condición inicial, se analizan sólo los dos últimos semiciclos.

### 3 TÉCNICA NUMÉRICA

La técnica numérica utilizada para resolver las ecuaciones gobernantes (ecs. (1)-(2)) está basada en el método de elementos finitos con una formulación estándar (Wille, 1982). Por este motivo, la misma será descripta sólo de manera somera.

Para la discretización espacial de las ecs. (1)-(2), el dominio del problema fue dividido en elementos cuadriláteros de Lagrange, conformando una malla estructurada. Se utilizó una formulación mixta velocidad-presión, con funciones base bicuadráticas y bilineales para aproximar las variables primitivas.

Luego de la formación de los residuos ponderados de Galerkin de las ecuaciones gobernantes, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, las que se discretizan mediante un sencillo esquema de diferencias finitas, donde las derivadas respecto del tiempo se aproximan mediante diferencias hacia atrás. El sistema de ecuaciones algebraicas no-lineales resultante se resuelve en un lazo de Newton. El algoritmo para la solución del sistema de ecuaciones utilizado en estas iteraciones fue el implementado en el paquete SuperLU (Demmel y col., 1999).

Los parámetros numéricos utilizados fueron los siguientes. La malla empleada en las simulaciones constó de  $910 \times 8$  elementos en las direcciones axial y radial, respectivamente, determinando un total de 70113 grados de libertad. El intervalo  $0 \leq t \leq 3\pi$  fue dividido en 100 pasos de tiempo fijos.

### 4 RESULTADOS

En todos los experimentos numéricos mostrados en este trabajo se utilizó un valor fijo del número de Reynolds,  $Re = 100$ . La geometría de la estenosis fue también mantenida en todas las simulaciones, con una longitud  $L_{EST} = 2$  y un porcentaje de obstrucción  $G = 75\%$ . A los efectos de investigar la influencia de la frecuencia del pulso de caudal sobre las variables fluidodinámicas, se exploraron diferentes valores del número de Womersley entre 5 y 20. El conjunto de parámetros utilizados podría ser —aproximadamente— el que caracteriza el flujo sanguíneo en las arterias coronarias. No obstante, debe tenerse en cuenta que este trabajo no pretende analizar las condiciones específicas del flujo en una arteria en particular, sino por el contrario, investigar algunos rasgos generales de la hemodinámica en vasos sanguíneos estenosados.

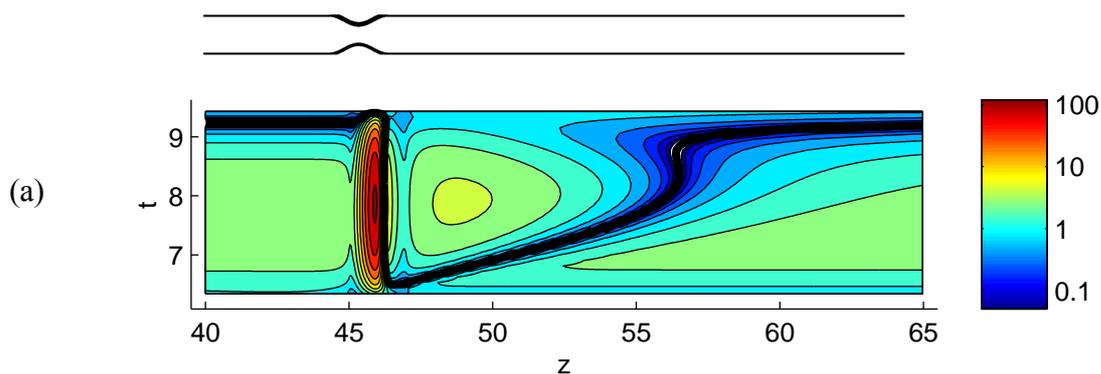
Los resultados obtenidos permiten observar en detalle la evolución en el tiempo de los campos de velocidad y presión. Sin embargo, existen numerosos trabajos en los que se han estudiado en profundidad estas variables. Por esta razón, se decidió analizar el comportamiento del esfuerzo de corte que el líquido ejerce sobre la pared,  $\tau(z,t)$ , ya que es una variable de gran importancia desde el punto de vista fisiológico y fisiopatológico.

La Fig. 2 muestra la evolución en el tiempo de la distribución de esfuerzos cortantes. Debido a la simetría temporal del pulso de caudal y espacial del dominio, sólo se ilustran los intervalos de tiempo y espaciales de relevancia. Así, para  $2\pi \leq t \leq 3\pi$  el caudal se encuentra en un semiciclo positivo, y las recirculaciones se producen aguas abajo de la estenosis. Los

gráficos de la Fig. 2 son curvas de nivel  $|\alpha(z,t)| = c_n$ ; los valores  $c_n$  están distribuidos de manera logarítmica, y son los mismos para todos los números de Womersley estudiados. En particular, se trazó también la curva  $\alpha(z,t) = 0$  en línea negra gruesa. La misma permite identificar los lugares e instantes donde se produce el desprendimiento de la capa límite y la formación de los vórtices.

Como puede verse, todos los gráficos muestran algunas características similares. En la región de la estenosis, donde la sección de paso se ha reducido a una cuarta parte de su valor normal, se producen los esfuerzos de corte más altos, alcanzando magnitudes al menos un orden de magnitud mayor a las observadas en un tramo recto. Aguas abajo del estrechamiento se aprecia que, casi al inicio del semi-ciclo analizado, se produce una recirculación cuyo tamaño va aumentando hasta el instante en que el flujo sobre la pared invierte su dirección ( $t \sim 9$ ) y el vórtice se desprende de la pared. En cambio, aguas arriba de la estenosis el flujo prácticamente no se ve perturbado por la presencia de la misma. Las diferencias principales entre los distintos casos radican en la extensión de los vórtices y en la distribución de los esfuerzos cortantes aguas abajo de la estenosis. Como se verá, sin embargo, estas diferencias no son demasiado importantes.

La Fig. 2 muestra que el tamaño de las recirculaciones, hacia el final del semi-ciclo, aumenta a medida que se incrementa el parámetro  $Wo$ . En la Fig. 3 se grafica la longitud de los vórtices en función del tiempo, para los diferentes números de Womersley analizados. Las recirculaciones aparecen casi al inicio del intervalo de tiempo analizado, aproximadamente en  $t \sim 6.5$ , aunque el instante en el que se produce el desprendimiento inicial se retarda ligeramente a medida que  $Wo$  aumenta. Hacia el final del ciclo ( $t \sim 9$ ) los vórtices se separan de la pared, aunque con pequeñas diferencias en el instante de tiempo particular (el fenómeno ocurre antes a medida que  $Wo$  se incrementa). Es decir, los vórtices están presentes un 80% del semi-ciclo. Durante las primeras 7/10 partes de su duración, la longitud de los vórtices depende de manera inversa del  $Wo$ ; el comportamiento se invierte para los restantes 3/10 de su existencia. Las diferencias entre los tamaños de las recirculaciones son mucho más pronunciadas durante ésta última fase.



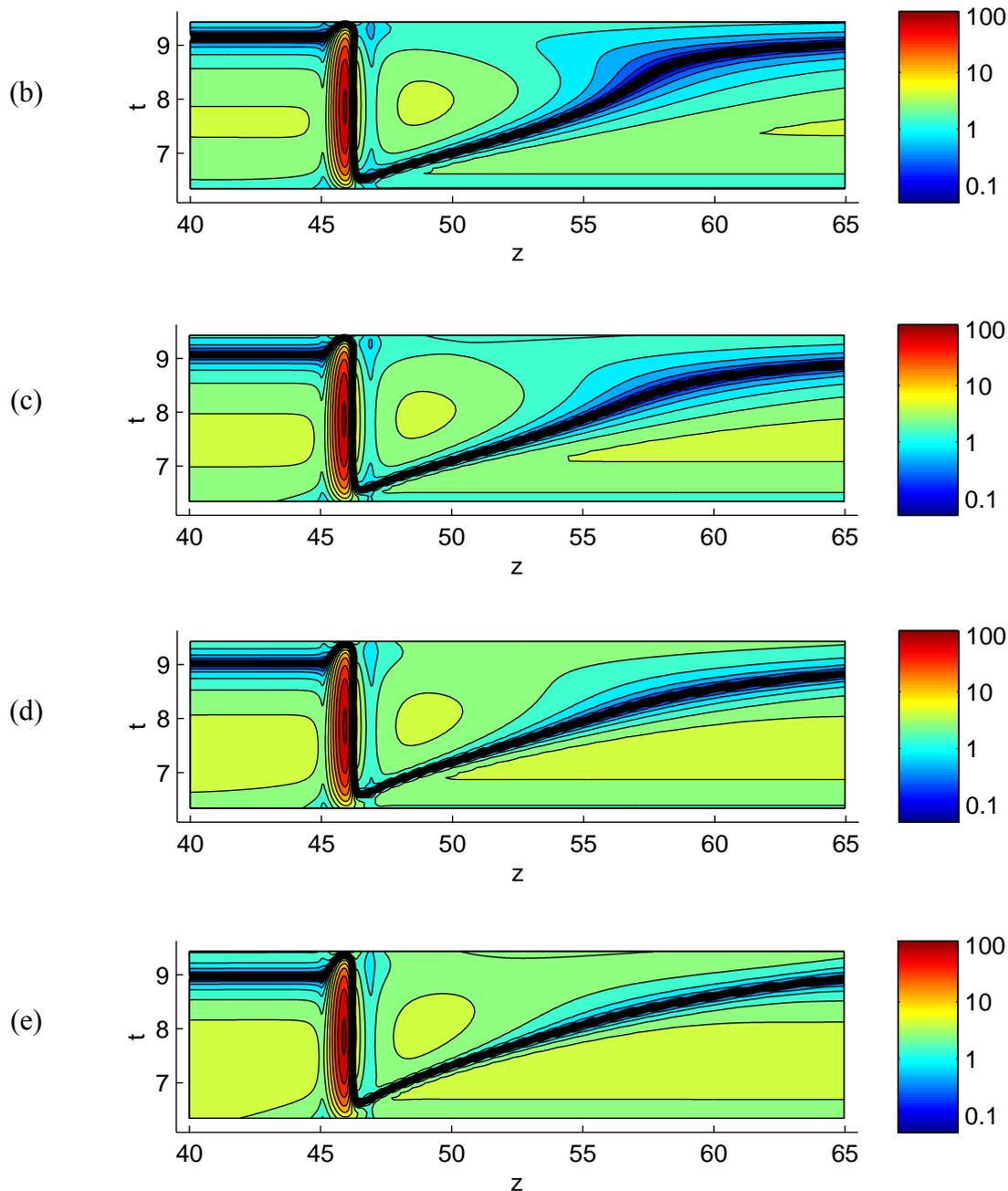


Figura 2: Esfuerzo de corte en la pared en función de la posición y del tiempo. Las gráficas muestran curvas de nivel de  $|\tau(z,t)|$ , espaciadas logarítmicamente, en el intervalo de tiempo  $2\pi \leq t \leq 3\pi$ , correspondiente al último semi-ciclo, de caudal positivo. Se incluye en la parte superior un contorno del tramo del dominio espacial analizado para una fácil referencia. (a)  $Wo = 5$ , (b)  $Wo = 8$ , (c)  $Wo = 11$ , (d)  $Wo = 15$  y (e)  $Wo = 20$ .

También se observan algunas diferencias en la distribución de esfuerzos cortantes aguas abajo del estrechamiento. En general se aprecia que los mismos son algo mayores a medida que se incrementa el número de Womersley. La Fig. 4 muestra el promedio temporal durante un ciclo completo de las tensiones de corte, en función de la posición, para distintos valores de  $Wo$ . En ella se aprecia que la influencia del parámetro de Womersley es pequeña, y sólo es apreciable en las regiones donde  $\tau(z,t)$  es bajo. La simetría de las curvas se debe a que el pulso de caudal y el dominio también lo son. Se puede apreciar que en la región de máximo

estrechamiento el valor medio de  $|\alpha(z,t)|$  es superior a 60, es decir, más de 15 veces mayor al valor correspondiente a un flujo estacionario Poiseuille ( $\tau_{poi} = 4$ ) para igual número de Reynolds en un tubo sin estenosis. El esfuerzo cortante desciende rápidamente a medida que nos alejamos de la zona estenosada ( $45 \leq z \leq 47$ ). Como es de esperar, en los extremos del dominio, donde el flujo es prácticamente unidireccional, la media de  $\alpha(z,t)$  tiende asintóticamente a cero. En cambio, el promedio de  $|\alpha(z,t)|$  tiende asintóticamente a un valor entre 0 y 4, que se incrementa a medida que aumenta  $Wo$ . La Fig. 4 (c) permite identificar además regiones muy cercanas a la estenosis donde el esfuerzo cortante es particularmente pequeño. En  $z \sim 46.95$  el valor medio de  $|\alpha(z,t)|$  no alcanza a 2. Esta región también es apreciable en la Fig. 2.

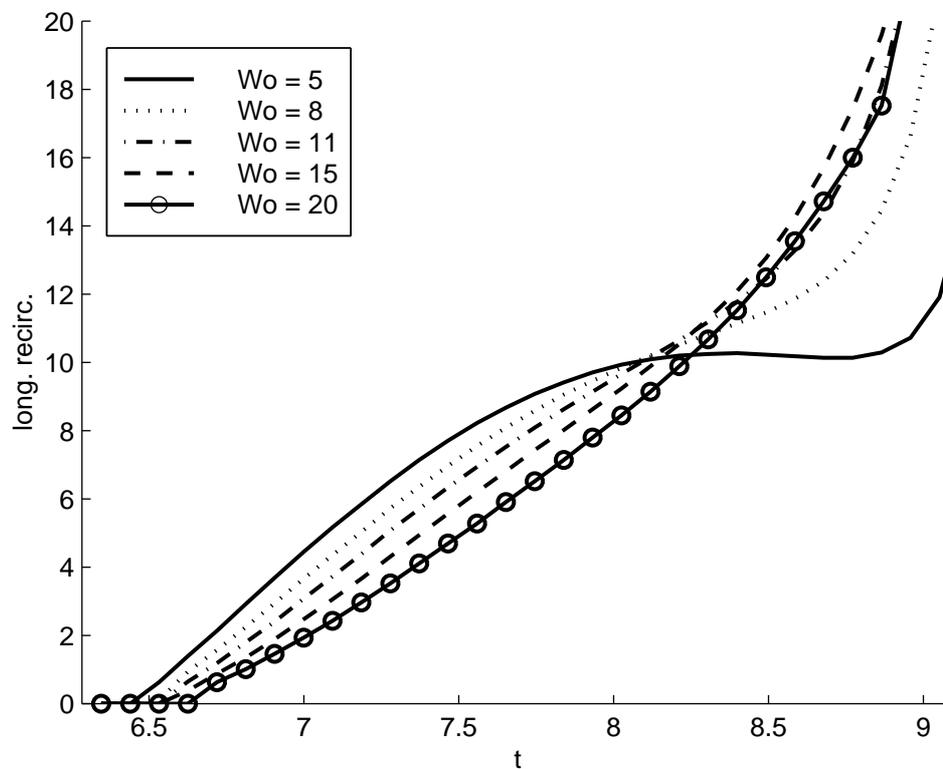


Figura 3: Tamaño de las recirculaciones formadas aguas abajo de la estenosis, en el intervalo de tiempo correspondiente al tercer semiciclo (donde el caudal es positivo) para diferentes valores del parámetro  $Wo$ .

Con el objeto de continuar analizando el efecto de la frecuencia del pulso sobre las tensiones de corte, se eligieron algunos puntos particulares a lo largo de la coordenada axial donde se estudiará en detalle la evolución en el tiempo de  $\alpha(z,t)$  durante un ciclo completo,  $\pi \leq t \leq 3\pi$ . La Fig. 5 muestra las variaciones en el tiempo de esta variable, para  $z = 46, 47, 50, 53$  y  $92$ . Estas posiciones corresponden, respectivamente, al punto de máximo estrechamiento, al lugar donde se registran menores valores medios de  $|\alpha(z,t)|$ , a dos puntos arbitrarios aguas abajo de la estenosis y al extremo derecho del dominio de cálculo. Esta última se adoptó a los efectos de tener una referencia, ya que en esta localización el flujo es unidireccional. Las tensiones de corte correspondientes a un caudal senoidal (ver Womersley, 1955) tienen también la forma de una oscilación armónica pura, aunque con un desplazamiento de fase. Esto puede confirmarse visualmente en la Fig. 5, y fue verificado mediante un análisis

frecuencial de las soluciones numéricas. El efecto del número de Womersley es incrementar las tensiones tangenciales máximas y producir un pequeño adelanto de fase.

Como puede observarse en la Fig. 5, la tensión de corte en el centro de la estenosis posee una forma aproximadamente senoidal, prácticamente en fase con el caudal. Los valores máximos alcanzados no superan 110, casi 28 veces el correspondiente a un flujo Poiseuille ( $\tau_{\text{poi}} = 4$ ). No existen diferencias visualmente apreciables para los diferentes números de Womersley explorados. Las curvas correspondientes a  $z = 50$  y  $53$  muestran un comportamiento en común. En ambos casos, durante un lapso de tiempo ( $3.5 < t < 6.5$  para  $Wo = 5$ ,  $4.5 < t < 6.75$  para  $Wo = 11$  y  $5 < t < 7$  para  $Wo = 20$ ) el esfuerzo de corte en estas posiciones es prácticamente igual al que se registra en un conducto recto sin estenosis (como en  $z = 92$ ). Poco después del comienzo del tercer semiciclo ( $t > 2\pi$ ) se produce el desprendimiento del flujo sobre la pared de la estenosis y la formación de una recirculación aguas abajo de la misma. Aquellos lugares abarcados por el vórtice registran un valor de  $\tau(z,t)$  negativo. Este es el comportamiento observado en  $z = 50$  y  $53$ , y como resulta lógico, el fenómeno se observa con un pequeño retraso en el caso del último punto. En estas localizaciones, se observa un esfuerzo de corte promedio inferior al que se ve para  $z = 92$ . La influencia del parámetro de Womersley es pequeña, apreciándose un incremento en los valores máximos de  $|\tau(z,t)|$  y un retardo del instante donde el vórtice alcanza estos lugares. El punto  $z = 47$ , donde se observan las tensiones tangenciales menores, muestra un comportamiento distinto a todos los otros casos. Prácticamente durante todo el ciclo el esfuerzo de corte en este lugar es negativo, excepto durante un breve lapso entre  $t \sim 6$  y  $t \sim 6.5$ . La magnitud de las tensiones es inferior en el período  $2\pi \leq t \leq 3\pi$  que durante el intervalo  $\pi \leq t \leq 2\pi$ . Como puede apreciarse, el parámetro de Womersley tampoco tiene demasiada influencia sobre  $\tau(z,t)$  en este punto.

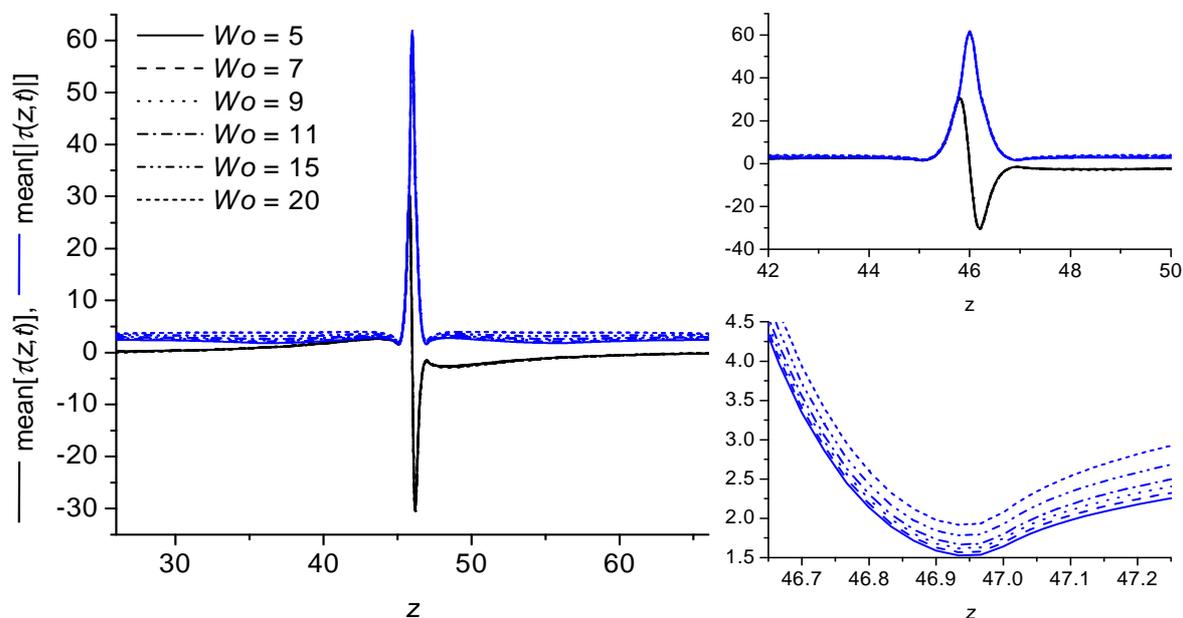


Figura 4: Media temporal (en el intervalo  $\pi \leq t \leq 3\pi$ ) de  $\tau(z,t)$  y de  $|\tau(z,t)|$  en función de la coordenada axial, para distintos valores del número de Womersley. A la derecha se muestran ampliaciones de la región central de la gráfica, donde se registran —en zonas muy cercanas— los esfuerzos de corte mayores y menores.

A fin de obtener información adicional, se realizó un sencillo análisis frecuencial de las tensiones de corte ejercidas sobre la pared, mediante la descomposición de Fourier de esta

variable:

$$\tau(z, t) = a_0(z) + \sum_n a_n(z) \text{sen}[nt + \phi_n(z)] \quad (4)$$

La Fig. 6 ilustra los coeficientes  $a_n(z)$  correspondientes a los primeros 6 modos ( $a_0(z)$  se muestra en la Fig. 4) para los mismos puntos seleccionados en la Fig. 5. Como puede verificarse, el esfuerzo de corte en  $z = 92$  es prácticamente un armónico puro. La amplitud de este modo (ver  $a_1(z = 92)$  en la Fig. 6) es algo superior a 4 —el valor correspondiente a un flujo Poiseuille— y la misma crece ligeramente con el aumento de  $Wo$ . El análisis del esfuerzo para  $z = 46$  (centro de la estenosis) confirma que el modo fundamental ( $a_1$ ) es al menos un orden de magnitud más importante que los armónicos impares que se observan (ver  $a_3$  y  $a_5$  en la Fig. 6). Tampoco en este caso existe una influencia remarcable del parámetro frecuencial, observándose un pequeño incremento de  $a_1$  con el  $Wo$ . De hecho, el efecto de este parámetro sobre las tensiones observadas en los tres puntos restantes también es escaso, observándose en general un leve incremento en la magnitud de las componentes frecuenciales con el aumento de  $Wo$ . En estos lugares ( $z = 47, 50$  y  $53$ ) las amplitudes de los distintos modos no son tan disímiles: los valores de  $a_1$  son sólo un orden de magnitud mayores a los de  $a_6$ . En particular, los coeficientes correspondientes a  $z = 50$  y  $53$  son similares, mientras que los observados para  $z = 47$  son algo menores.

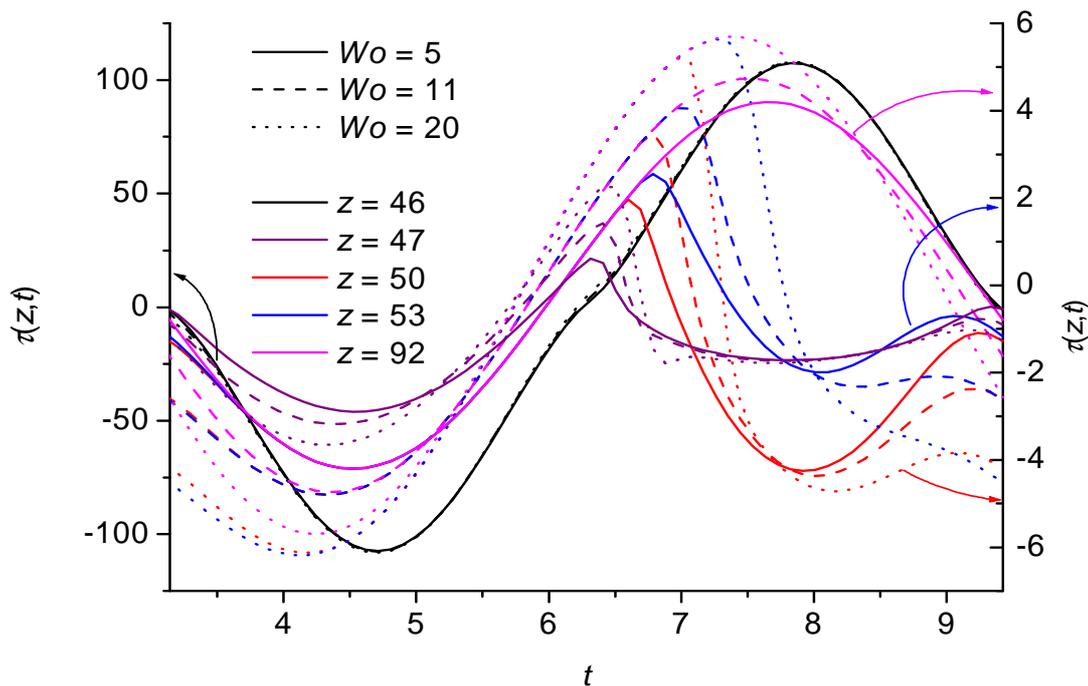


Figura 5: Evolución temporal del esfuerzo de corte, para distintas posiciones a lo largo de la coordenada axial y distintos valores del número de Womersley. Debido a la disparidad de valores observados, se utilizaron diferentes escalas para algunas de las curvas.

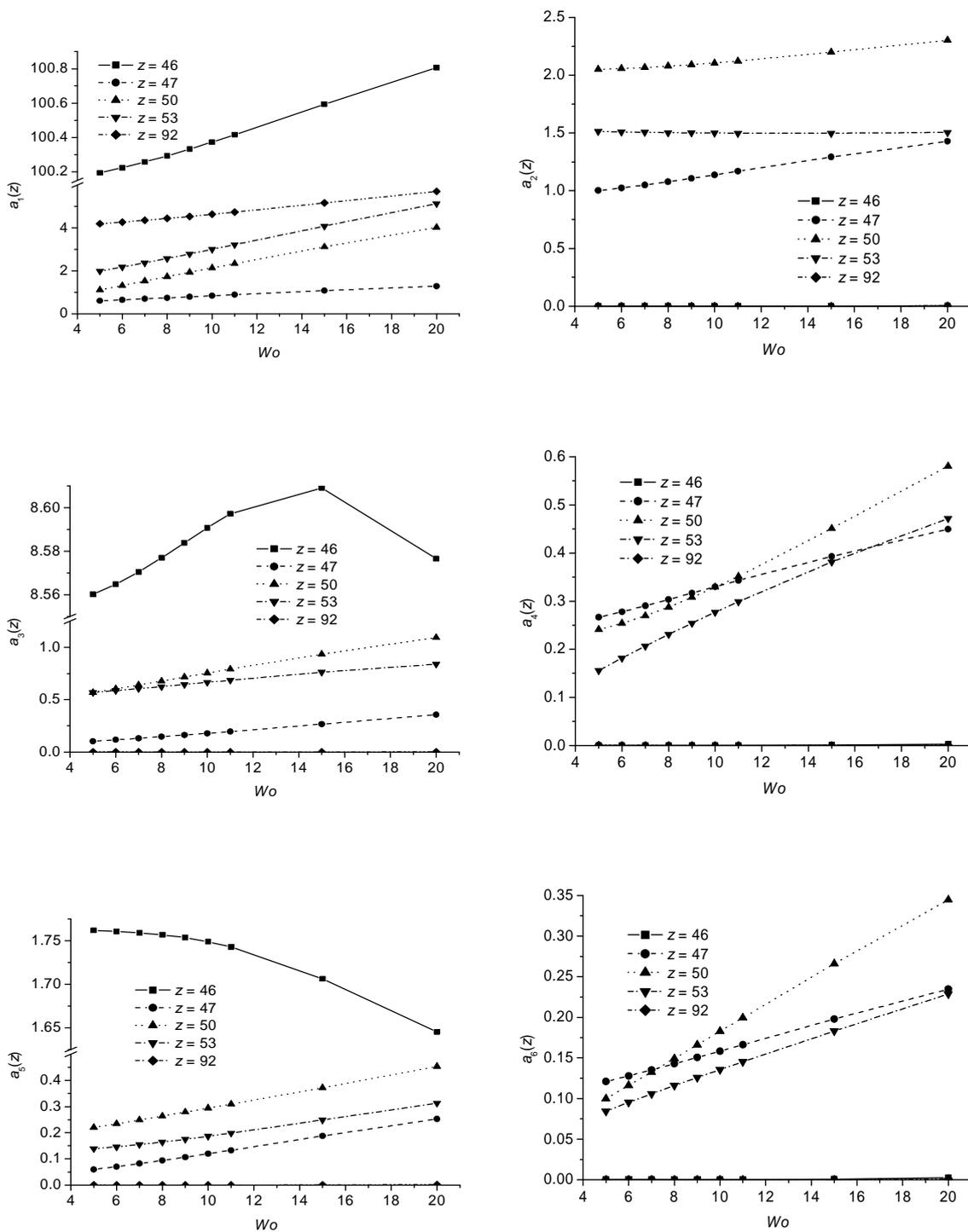


Figura 6: Primeros coeficientes de la expansión de Fourier de  $\pi(z,t)$  en función de  $W_0$ , para diferentes localizaciones axiales. El análisis se realizó en el intervalo de tiempo  $\pi \leq t \leq 3\pi$ .

### 5 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este trabajo se analizó el flujo pulsátil axisimétrico a través de un tubo recto con una estenosis. Los parámetros utilizados son característicos de arterias de pequeño y mediano

calibre. En particular, se analizó la influencia de la frecuencia del pulso de caudal senoidal impuesto, mediante la variación del parámetro de Womersley.

Las soluciones numéricas se obtuvieron mediante una técnica numérica basada en el método de elementos finitos, con una formulación estándar. En particular, en este trabajo se analizó la distribución temporal y espacial de esfuerzos cortantes sobre la pared, obtenidos mediante el posproceso de los campos de velocidades.

Los resultados obtenidos indican que, para el rango de parámetros y configuración geométrica estudiados, el número de Womersley no tiene gran influencia sobre las tensiones de corte ejercidas sobre la pared. En general, se observa que los valores máximos, registrados en la región estenosada, son prácticamente independientes de  $Wo$ , mientras que en las zonas donde existen recirculaciones y los esfuerzos cortantes son menores, el efecto de la frecuencia del pulso es un poco más notable. En estas regiones se observa, en general, un incremento moderado de  $\tau(z,t)$  a medida que se incrementa  $Wo$ . El carácter oscilatorio de las tensiones es más complejo en las regiones de vórtices, lo cual se ve reflejado en la magnitud relativa de las diferentes componentes frecuenciales de Fourier de las mismas.

Análisis de este tipo podrían ser de interés en el estudio de la evolución de una patología aterosclerótica incipiente y/o en desarrollo, dado que otros autores han encontrado una fuerte correlación entre la localización de la lesión con los sitios donde el esfuerzo de corte es particularmente bajo y de carácter oscilatorio.

Un estudio posterior debería tener en cuenta características más realistas en cuanto a la geometría arterial, como así también respecto al pulso de caudal, el cual depende —en cuanto a su forma y caudal medio— del vaso sanguíneo analizado y de la frecuencia cardíaca, entre otros factores.

**Agradecimientos:** A la Universidad Nacional de Entre Ríos, por el soporte económico a través del proyecto de investigación PID-6072.

## REFERENCIAS

- B. Das, P.C. Johnson y A.S. Popel. Computational fluid dynamic studies of leukocyte adhesion effects on non-Newtonian blood flow through microvessels. *Biorheology*, 37(3): 239-258, 2000.
- J.W. Demmel, S.C. Eisenstat, J.R. Gilbert, X.S. Li y J.W.H. Liu. A supernodal approach to sparse partial pivoting. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 20: 720-755, 1999.
- D.L. Fry. Acute vascular Endothelial Changes Associated with Increased Blood Velocity Gradients. *Circulation Research*, 22: 165-197, 1968.
- A. Kamiya y J. Ando. Response of Vascular Endothelial Cells to Fluid Shear Stress: Mechanism. En K. Hayashi, A. Kamiya, y K. Ono (eds.). "Biomechanics. Functional Adaptation and Remodeling". Tokio: Springer-Verlag, 1996.
- D.N. Ku. Blood flow in arteries. *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, 29:399-434, 1997
- R.M. Nerem y J.F. Cornhill. The role of fluid mechanics in atherogenesis. *Journal of Fluid Mechanics*, 102: 181-189, 1980.
- M. Sato, N. Kataoka y N. Ohshima. Response of Vascular Endothelial Cells to Flow Shear Stress: Phenomenological Aspect. En K. Hayashi, A. Kamiya, y K. Ono (eds.). "Biomechanics. Functional Adaptation and Remodeling". Tokio: Springer-Verlag, 1996.
- S.O. Wille. Finite Element Simulations of the Pulsatile Blood Flow Patterns in Arterial Abnormalities. En R.H. Gallagher, B.R. Simon, P.C. Johnson y J.F. Gross (eds.). "Finite Elements in Biomechanics". John Wiley & Sons, 1982.

J.R. Womersley. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when their pressure gradient is known. *J. Physiol.*, 127: 553-563, 1955.